Boletín de Matemáticas
Vol. XI (1977), págs. 185 - 207

CONSTRUCCION DE NUMEROS NO CONVENCIONALES A PARTIR DE LOS RACIONALES

por

Yu Takeuchi

1. Construcción de los números no-convencionales a partir de $\mathbb{Q}$.

Sea $\mathcal{F}^*$ un filtro maximal en $\mathbb{N}$.

Consideremos el conjunto $\mathfrak{S}$ de todas las sucesiones de números racionales. Dadas $(a_n),(b_n) \in \mathfrak{S}$, si existe una sucesión $(c_n) \to 0$ tal que

$$\{n : a_n \leq b_n + c_n\} \in \mathcal{F}^*$$

decimos que

$$(a_n) \leqslant (b_n) .$$

[1] Si $(a_n) \leqslant (b_n)$ y $(b_n) \leqslant (d_n)$ entonces $(a_n) \leqslant (d_n)$.

<u>Demostración</u>. Existen $(c_n) \to 0$, $(c'_n) \to 0$ tales que

$$\{n : a_n \leqslant b_n + c_n\} \quad , \quad \{n : b_n \leqslant d_n + c'_n\} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$\{n : a_n \leqslant d_n + (c_n + c'_n)\} \in \mathcal{F}^*$$

puesto que

$$\{n : a_n \leqslant d_n + (c_n + c'_n)\} \supset \{n : a_n \leqslant b_n + c_n\} \cap \{n : b_n \leqslant d_n + c'_n\}. \blacksquare$$

[2] Si $(a_n) \leqslant (b_n)$ y $(a'_n) \leqslant (b'_n)$ entonces

$$(a_n + a'_n) \leqslant (b_n + b'_n). \blacksquare$$

[3] Si $(a_n), (b_n) \in \mathfrak{S}$ entonces

$$(a_n) \leqslant (b_n) \quad ó \quad (b_n) \leqslant (a_n).$$

Demostración. Si $\{n: a_n \leqslant b_n + 0\} \in \mathcal{F}^*$ entonces $(a_n) \leqslant (b_n)$. Si $\{n: a_n \leqslant b_n + 0\} \notin \mathcal{F}^*$ entonces

$\{n: b_n < a_n\} \in \mathcal{F}^*$, luego

$$\{n: b_n \leqslant a_n + 0\} \in \mathcal{F}^*$$

esto es:

$$(b_n) \leqslant (a_n) . \blacksquare$$

Decimos que

$$(a_n) \sim (b_n)$$

si

$$(a_n) \leqslant (b_n) \quad y \quad (b_n) \leqslant (a_n) .$$

[4] $(a_n) \sim (b_n)$ si y sólo si existe una sucesión $(c_n) \to 0$ tal que

$$\{n: |a_n - b_n| \leqslant c_n\} \in \mathcal{F}^* . \quad (\text{¡Evidente!}) \blacksquare$$

[5] $(a_n) \sim (b_n)$ si y sólo si existe

$\{t(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*$ tal que

$$|a_{t(j)} - b_{t(j)}| \to 0. \quad (\text{¡Evidente!}) \blacksquare$$

[6] $\sim$ es una relación de equivalencia. (¡Evidente!)

Decimos que

$$(a_n) < (b_n)$$

si

$$(a_n) \leqslant (b_n) \quad \text{y} \quad (a_n) \not\sim (b_n).$$

[7] Si $(a_n) \leqslant (b_n) \leqslant (d_n)$ y $(a_n) \sim (d_n)$ entonces

$$(a_n) \sim (b_n) \quad , \quad (b_n) \sim (d_n).$$ (¡Inmediato!). $\blacksquare$

[8] Si $(a_n) < (b_n)$ y $(b_n) \leqslant (d_n)$ entonces

$$(a_n) < (d_n). \quad (\text{¡Inmediato!}) \blacksquare$$

[9] Si $(a_n) < (b_n)$ y $(d_n) \leqslant' (e_n)$ entonces

$$(a_n + d_n) < (b_n + e_n). \quad (\text{¡Inmediato!}) \blacksquare$$

[10] Si $(a_n)\cdot(b_n) = (a_n \cdot b_n) \sim (0)$ entonces $(a_n) \sim 0$ ó $(b_n) \sim 0$.

Demostración. Existe $S = \{n(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*$ tal que

$$a_{n(j)} \cdot b_{n(j)} \to 0 .$$

Sean

$$\{k(j)\} = \{k(j) \in S / |a_{k(j)}| \leqslant |b_{k(j)}|\},$$

$$\{t(j)\} = \{t(j) \in S / |a_{t(j)}| > |b_{t(j)}|\},$$

entonces

$$|a_{k(j)}|^2 \leqslant |a_{k(j)} \cdot b_{k(j)}| , \; |b_{t(j)}|^2 < |a_{t(j)} \cdot b_{t(j)}| .$$

Si $\{k(j)\}$, $\{t(j)\}$ son infinitos, como

$$\{k(j)\} \subset S \quad y \quad \{t(j)\} \subset S$$

se tiene que

$$a_{k(j)} \cdot b_{k(j)} \to 0 \quad y \quad a_{t(j)} \cdot b_{t(j)} \to 0,$$

luego:

$$a_{k(j)} \to 0 \quad y \quad b_{t(j)} \to 0 .$$

Si $\{k(j)\} \in \mathcal{F}^*$ entonces se tiene que $(a_n) \sim (0)$.
Si $\{k(j)\} \notin \mathcal{F}^*$ entonces $S - \{k(j)\} = \{t(j)\} \in \mathcal{F}^*$ (puesto que $S \in \mathcal{F}^*$). Luego:

$$(b_n) \sim (0).$$

Nótese que si $\{k(j)\}$ es finito entonces $\{k(j)\} \notin \mathcal{F}^*$, luego $\{t(j)\} \in \mathcal{F}^*$, así que

$$(b_n) \sim (0). \blacksquare$$

[11] Si $(a_n) > (0)$ y $(b_n) > (0)$ entonces

$$(a_n)\cdot(b_n) = (a_n \cdot b_n) > (0).$$

Demostración. Como $(a_n) \geqslant (0)$, $(b_n) \geqslant (0)$, existen $(c_n) \to 0$ y $(c'_n) \to 0$ tales que

$$\{n: 0 \leqslant a_n + c_n\} \in \mathcal{F}^* \quad y \quad \{n: 0 \leqslant b_n + c'_n\} \in \mathcal{F}^* .$$

Primero demostramos que el conjunto

$$A = \{n: a_n \leqslant 0\} \subset \mathbb{N} \quad \text{no está en } \mathcal{F}^*$$

Supongamos que $A \in \mathcal{F}^*$ entonces

$\{t(j) : j \in \mathbb{N}\} = \{n : a_n \leqslant 0\} \cap \{n : 0 \leqslant a_n + |c_n|\} \in \mathcal{F}^*$

luego:

$$0 \leqslant -a_{t(j)} \leqslant |c_{t(j)}| \to 0 \ ,$$

o sea que

$$|a_{t(j)}| \to 0 \quad \text{y} \quad \{t(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^* \ ,$$

esto es:

$$(a_n) \sim (0) \qquad \text{(¡absurdo!).}$$

Por lo tanto se debe tener que:

$$\mathbb{N} - A = \{n : a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*. \tag{1}$$

De la misma manera:

$$\{n : b_n > 0\} \in \mathcal{F}^* \tag{2}$$

De (1) y (2):

$$\{n : a_n > 0\} \cap \{n : b_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$\{n: a_n \cdot b_n \geqslant 0\} \in \mathcal{F}^* ,$$

esto es:

$$(a_n \cdot b_n) \geqslant (0) .$$

De [10] se tiene que $(a_n \cdot b_n) \not\sim (0)$, entonces:

$$(a_n \cdot b_n) > (0) . \blacksquare$$

[12] Si $(a_n) > (0)$ entonces $\{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$ (Ver (1) de la propiedad anterior).

<u>Nota</u>. $\{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$ no implica que $(a_n) > (0)$. Por ejemplo, $(\frac{1}{n}) \sim (0)$ y $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[13] Si $(a_n) > (0)$ existe $(b_n) \sim (a_n)$ tal que

$$b_n > 0 \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Demostración</u>. Tenemos que $\{n: a_n > 0\} \in \mathcal{F}^*$.
Sea

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad a_n > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad a_n \leqslant 0 . \end{cases}$$

Entonces $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además:

$$|b_n - a_n| \to 0 \qquad (n \to \infty) ,$$

luego

$$(a_n) \sim (b_n). \blacksquare$$

[14] Sea (c) una sucesión constante con $c > 0$. Si $(0) < (a_n) < (c)$ entonces existe $(b_n) \sim (a_n)$ tal que

$$0 < b_n < c \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

<u>Demostración</u>. Como $(c - a_n) > (0)$, se tiene que:

$$\{n : c - a_n > 0\} \cap \{n : a_n > 0\} \in \mathcal{F}^* .$$

Sea

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad c > a_n > 0 \\ \frac{c}{n} & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

entonces $c > b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$|a_n - b_n| \to 0 \qquad (\text{cuando } n \to \infty),$$

o sea:

$$(a_n) \sim (b_n). \blacksquare$$

[15] Sean (a_n), (b_n) tales que $(a_n - b_n)$ converge a un límite positivo, entonces $(a_n) > (b_n)$.

<u>Demostración</u>. Si $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = c$, sea $b_n - a_n + c = c_n$, entonces $c_n \to 0$ y $a_n + c_n = b_n + c \geqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\{n : b_n \leqslant a_n + c_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}^*,$$

esto es,

$$(b_n) \leqslant (a_n).$$

Evidentemente no existe una subsucesión de $(a_n - b_n)$ que tiende a cero, luego:

$$(a_n) \not\sim (b_n),$$

y así

$$(a_n) > (b_n). \blacksquare$$

[16] Si $(a_n) \sim (b_n)$ y $(d_n) \sim (f_n)$ entonces:

$$(a_n + d_n) \sim (b_n + f_n) \quad , \quad (a_n - d_n) \sim (b_n - f_n).$$

(¡Evidente!). ∎

[17] Si $(a_n) \sim (0)$, $(\frac{1}{b}) \not\sim (0)$, entonces

$$(a_n \cdot b_n) \sim (0).$$

Demostración. Sea $A = \{n : \sqrt{|a_n|} \cdot |b_n| > 1\}$.
Supongamos que $A \in \mathcal{F}^*$, entonces

$$A = \{n : \frac{1}{|b_n|} < \sqrt{|a_n|}\}$$

Como $(a_n) \sim (0)$, existe $B = \{s(j) : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}^*$ tal que $|a_{s(j)}| \to 0$, luego:

$$\sqrt{|a_{s(j)}|} \to 0 .$$

Como $B \cap A \in \mathcal{F}^*$ entonces $\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \sim (0)$, o sea:

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \sim (0) \quad \text{(¡absurdo!)}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$A \notin \mathcal{F}^* ,$$

luego:

$$\mathbb{N} - A = \{n: \sqrt{|a_n|}\cdot |b_n| \leqslant 1\} =$$

$$= \{n: |a_n \cdot b_n| \leqslant \sqrt{|a_n|}\} \in \mathcal{F}^* .$$

Como $(\mathbb{N} - A) \cap B \in \mathcal{F}^*$, se tiene que $(|a_n b_n|) \sim (0)$ o sea que:

$$(a_n \cdot b_n) \sim (0) .$$

[18] Sean $(a_n) \sim (b_n)$, $(d_n) \sim (f_n)$ tales que

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \not\sim (0), \left(\frac{1}{f_n}\right) \not\sim (0),$$

entonces

$$(a_n \cdot d_n) \sim (b_n \cdot f_n). \qquad (*)$$

Demostración.

$$(a_n d_n) - (b_n f_n) = (a_n d_n) - (a_n f_n) + (a_n f_n) - (b_n f_n)$$

$$= (a_n \cdot (d_n - f_n)) + ((a_n - b_n)\cdot f_n) \sim (0) + (0) \sim (0)$$

(*) Supóngase que $a_n \neq 0$, $f_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta no es una restricción esencial ya que dada (a_n) existe $(a'_n) \sim (a_n)$ con $a'_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considérese: $a'_n = a_n$ si $a_n \neq 0$, $\frac{1}{n}$ si $a_n = 0$. ■

puesto que

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \not\sim (0),\ (d_n - f_n) \sim (0),\ \left(\frac{1}{f_n}\right) \not\sim (0),\ (a_n - b_n) \sim (0).$$

Sea $\mathfrak{S}_1$ la familia de todas las sucesiones, $(a_n) \in \mathfrak{S}$, tales que

$$\left(\frac{1}{a_n}\right) \not\sim (0) \quad ((*)\ \underline{\text{Nota anterior}}).$$

Sea $\hat{\mathbb{R}}^* = \mathfrak{S}_{1/\sim}$ entonces $\hat{\mathbb{R}}^*$ es un cuerpo.

Si $\alpha \in \hat{\mathbb{R}}^*$ es la clase (en $\hat{\mathbb{R}}^*$) que contiene la sucesión que tiende a un número real α entonces la identificamos con el número real:

$$\alpha = \text{la clase } [(a_n)] \qquad \text{con} \qquad (a_n) \to \alpha.$$

Así se tiene que:

$$R \subset \hat{\mathbb{R}}^* .$$

En el próximo parágrafo se muestra que $\mathbb{R} \neq \hat{\mathbb{R}}^*$.

Observación. Para construir al cuerpo $\hat{\mathbb{R}}^*$ hemos utilizado la familia $\mathfrak{S}$ de las sucesiones racionales. Comenzando con las sucesiones de números reales podemos llegar al mismo cuerpo $\hat{\mathbb{R}}^*$, ya que dada una sucesión de números reales (x_n) existen dos sucesiones de números racionales (a_n) y (a_n') tales que

$$a_n \leqslant x_n \leqslant a'_n \quad , \quad a'_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

esto es:

$$(a_n) \sim (a'_n) \sim (x_n). \blacksquare$$

2. <u>Existencia de un infinitesimal en $\hat{\mathbb{R}}^*$</u>.

Decimos que $\varepsilon \in \hat{\mathbb{R}}^*$ es un infinitesimal si

$$-c < \varepsilon < c \quad (\text{ó } |\varepsilon| < c)$$

para todo c real positivo.

<u>Proposición</u>. Existe en $\hat{\mathbb{R}}^*$, por lo menos, un infinitesimal.

<u>Demostración</u>. Sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de números racionales denso en $[0,1]$ (*).

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los conjuntos, S, tales que

---

(*) Basta considerar una sucesión (a_n) tal que los límites de subsucesiones convergentes forman una sucesión que tiende a cero, por ejemplo:

$$(1, 1, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, 1, \tfrac{1}{2}, \ldots).$$

$$S = \{n : a_n < c\} - \{t(j)\} \quad \text{con} \quad c > 0 \ \text{real},$$

donde el conjunto $\{t(j)\} \subset \mathbb{N}$ es finito, infinito ó vacío tal que $\{a_{t(j)}\}$ tiene a lo más un número finito de puntos límites. Se puede comprobar inmediatamente que $\mathcal{F}$ es un filtro en $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{F}^*$ un filtro maximal más fino que $\mathcal{F}$ (*). Si ε es la clase en $\mathbb{R}^*$ representada por la sucesión (a_n): esto es,

$$\varepsilon = [(a_n)] ,$$

entonces ε es un infinitesimal positivo (de acuerdo con el filtro $\mathcal{F}^*$). En realidad, dado $c > 0$ real, tenemos que:

$$\{n : a_n < c\} \in \mathcal{F}^* \quad , \quad \{n : 0 < a_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}^*$$

luego:

$$(0) \leqslant (a_n) \leqslant (c).$$

Ahora, supongamos que

$$(a_n) \sim (0),$$

(*) En realidad, $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro de Fréchet.

entonces existe $\{s(j)\} \in \mathcal{F}^*$ tal que

$$a_{s(j)} \to 0$$

Pero:

$$\mathbb{N} - \{s(j)\} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$$

esto es,

$$\{s(j)\} \notin \mathcal{F}^* \quad \text{(¡absurdo!)}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(a_n) \not\approx (0) \; ,$$

así que:

$$0 < \varepsilon \leqslant c \quad \text{(para cualquier c real)},$$

esto es, ε es un infinitesimal.

3. <u>Algunas propiedades de los infinitesimales.</u>

Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los infinitesimales y el cero en $\hat{\mathbb{R}}^*$.

[1] El conjunto $\mathcal{E}$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

Demostración. Si $\varepsilon \in \mathcal{E}$ entonces $x\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq y$, $x,y \in \mathbb{R}$ entonces

$$x\varepsilon \neq y\varepsilon ,$$

luego $\mathcal{E}$ contiene un subconjunto equipotente a $\mathbb{R}$. Como el conjunto de todas las sucesiones de números racionales es equipotente a $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{E}$ es equipotente a $\mathbb{R}$. ∎

[2] Sea ε un infinitesimal positivo, entonces $\varepsilon \cdot \mathbb{R}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{E}$.

Demostración. Evidentemente $\varepsilon \cdot \mathbb{R} \subset \mathcal{E}$.

Supongamos que $\mathcal{E} = \varepsilon\mathbb{R}$; entonces existiría un $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varepsilon^2 = \varepsilon x$$

puesto que $\varepsilon^2 \in \mathcal{E}$, $\varepsilon^2 \neq 0$, luego:

$$\varepsilon = x \in \mathbb{R} \quad \text{(¡absurdo!)} \ ∎$$

[3] Sea ε un infinitesimal positivo, entonces

$$\varepsilon > \varepsilon^2 > \varepsilon^3 > \ldots > \varepsilon^n > \ldots > 0 \qquad (1)$$

$$\varepsilon < \varepsilon^{1/2} < \varepsilon^{1/3} \ldots < \varepsilon^{1/n} < \ldots \qquad (2)$$

Existe un infinitesimal positivo η tal que

$$0 < \eta < \varepsilon^n \quad (\text{para todo } n \in \mathbb{N}).$$

Demostración. Las relaciones (1), (2) son evidentes.

Sea $\varepsilon = [(a_k)]$ con $0 < a_k < \frac{1}{2}$ para todo k.

Consideremos:

$$\eta = [(b_k)] \quad \text{con} \quad b_k = (a_k)^{\frac{1}{a_k}}.$$

Dado $n \in N$, tenemos:

$$\{k : a_k < \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}^*$$

puesto que (a_k) es un infinitesimal; luego:

$$\{k : (a_k)^{1/a_k} \leqslant (a_k)^n\} \in \mathcal{F}^*$$

esto es: $\eta \leqslant \varepsilon^n$

Evidentemente: $0 \leqslant \eta$

Supongamos que

$$\eta = 0 \text{ , o sea, } (b_k) \sim (0) \text{ ,}$$

entonces existe $\{t(j)\} \in \mathcal{F}^*$ tal que

$$b_{t(j)} \to 0 \quad (j \to \infty),$$

o sea,

$$\log b_{t(j)} = \frac{r}{a_{t(j)}} \cdot \log a_{t(j)} \to -\infty,$$

ó

$$\left(\frac{1}{a_{t(j)}}\right) \log\left(\frac{1}{a_{t(j)}}\right) \to \infty \quad (t(j) \to \infty),$$

esto es:

$$\frac{1}{a_{t(j)}} \to \infty, \text{ó}, \quad a_{t(j)} \to 0 .$$

Por lo tanto se tiene que:

$$(a_k) \sim (0) \quad (\text{absurdo!}) \blacksquare$$

[4] Sea ε un infinitesimal positivo, entonces $\varepsilon^{\varepsilon}$ no es un infinitesimal.

<u>Nota</u>: Si $\varepsilon = [(a_n)]$ (con $a_n > 0$) se define que

$$\varepsilon^{\varepsilon} = [(a_n)^{a_n}].$$

<u>Demostración</u>. Sea $\varepsilon = [(a_n)]$ con $0 < a_n < 1$.

Sabemos que:

$$(a_n)^{a_n} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e} > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

Por lo tanto, $\varepsilon^{\varepsilon}$ no es un infinitesimal. ∎

Decimos que $a \in \hat{\mathbb{R}}^*$ es infinito si

$$|a| > x \quad \text{para todo} \quad x \text{ real positivo.}$$

Si ε es un infinitesimal, entonces $\frac{1}{\varepsilon}$ es infinito.

Sea $\mathbb{B} = \mathbb{R}^* - \{\text{infinito}\}$, entonces $\mathbb{B}$ es un anillo, y E es un ideal maximal de $\mathbb{B}$, se tiene:

$$\mathbb{B}/_E = \mathbb{R} .$$

Tenemos:

$$\underset{\text{(infinitesimal)}}{E} \subset \underset{\text{(reales)}}{\mathbb{R}} \subset \underset{(\neq \text{ infinito})}{\mathbb{B}} \subset \underset{\text{(no-convencional)}}{\hat{\mathbb{R}}^*}$$

∎

4. Relación entre $\mathbb{R}^*$ y $\hat{\mathbb{R}}^*$.

Sea $\mathfrak{S}_o$ la familia de todas las sucesiones de números reales, entonces definimos $\leq$, $\sim$ como sigue:

$$(a_n) \leq (b_n) \quad \text{si} \quad \{n : a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}^* ,$$

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{si} \quad (a_n) \leq (b_n) \text{ y } (a_n) \geq (b_n).$$

Sabemos que:

$$\mathfrak{S}_o/\sim = \mathbb{R}^*.$$

En $\mathbb{R}^*$, un número real x es la clase que contiene la sucesion constante (x).

Nótese que la sucesión $(\frac{1}{n})$ representa un infinitesimal positivo en $\mathbb{R}^*$.

(Ojo! $(\frac{1}{n}) \equiv (0)$ en $\hat{\mathbb{R}}^*$), también lo es la sucesión (a_n) utilizada en 2, obsérvese que la clase (a_n) no contiene sucesión convergente a cero.

En $\mathbb{R}^*$, sea E_1 el conjunto de todos los infinitesimales y el cero. Sea E_o el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{R}^*$ representados por sucesiones convergentes a cero, entonces se tiene evidentemente que:

$$E_o \subset E_1$$

La existencia de la clase en $\mathbb{R}^*$ que no contiene la sucesión convergente a cero nos indica inmediatamente que:

$$E_o \neq E_1$$

[1] Si $\eta_o \in E_o$, $\eta \in E_1 - E_o$, $\eta_o > 0$, $\eta > 0$

entonces

$$\eta_o < \eta$$

<u>Demostración</u>. Sean $\eta_o = [(a_n)]$ con $a_n \to 0$, $\eta = [(b_n)]$.

Supongamos que $\eta_o \geqslant \eta$ entonces

$$\{n : b_n \leqslant a_n\} \in \mathcal{F}^*.$$

Considerar:

$$\tilde{b}_n = \begin{cases} b_n & \text{si} \quad b_n \leqslant a_n \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad b_n > a_n \end{cases},$$

entonces

$$(\tilde{b}_n) \sim (b_n) \quad \text{y} \quad \tilde{b}_n \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{(absurdo!)} \blacksquare$$

Sean

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{R}^* - \{\text{infinito}\} = \{a \in \mathbb{R}^* : \tfrac{1}{a} \notin \mathcal{E}_1\} \quad ,$$

$$\mathbb{B}_o = \{a \in \mathbb{R}^* : \tfrac{1}{a} \notin \mathcal{E}_o\} \text{ , \quad entonces tenemos:}$$

$$\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}_o \quad , \quad \mathbb{B}_1 \neq \mathbb{B}_o \; .$$

$\mathbb{R}^* - \mathbb{B}_o$ es el conjunto de todos los infinitos representados por sucesiones divergentes hacia $\pm\,\infty$. Tenemos:

$$\mathcal{E}_o \quad \subset \quad \mathcal{E}_1 \quad \subset \quad \mathbb{R} \quad \subset \quad \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}_o \subset \mathbb{R}$$

(infinitesimales sucesión→0)	(infinitesimales)	(real)	(≠ inf.)	(≠→±)	(no-convencionales)

$$E \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{B} \subset \hat{\mathbb{R}}^*$$

Hay los siguientes isomorfismos:

$$B_0/E_0 \equiv \hat{\mathbb{R}}^* \;, \quad \mathbb{B}_1/E_0 \equiv \mathbb{B}$$

$$B_1/E_1 \equiv \mathbb{R} \;, \quad E_1/E_0 \equiv E \quad \blacksquare$$

Universidad Nacional de Colombia
Bogotá.