Boletín de Matemáticas
Vol. XI (1977), págs. 267 - 281

ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

TRES TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA (*)

por

Alberto Campos

Los griegos conocieron la demostración desde los tiempos de Pitágoras y después de tres siglos de investigaciones lograron, gracias a ella, una de las obras maestras de la matemática, los Elementos de la Geometría.

La concepción de una teoría axiomática evolucionó durante más de 20 siglos mediante el estudio de dicha obra. Vamos a distinguir panorámicamente tres grandes corrientes en dicha evolución y ver que de ellas se desprende a su vez tres grandes tendencias en la didáctica de la geometría. Luego

(*) Conferencia presentada por el autor en el V Coloquio Colombiano de Matemáticas; Medellín 1975.
N.del E.

enumeraremos las razones para escoger una de estas tendencias con preferencia a las otras dos.

1. Según Brunschvicg "Euclides, para las numerosas generaciones que se han nutrido de su substancia, ha sido menos quizá un profesor de geometría que un profesor de lógica" (las etapas de la filosofía matemática. 49. Lautaro. Buenos Aires, 1945). El hecho de ser estudiado desde un doble punto de vista, geométrico y lógico, condujo a un examen pormenorizado de cada uno de los detalles de la obra de Euclides. La piedra de toque fué aquí la independencia del postulado de las paralelas. Muchos geómetras estudiaron la cuestión, algunos hasta creyeron haber encontrado una respetuosa negativa. Finalmente fué Gauss el primero (1816) en llegar a la conclusión de que el postulado de las paralelas era independiente, de los otros cuatro postulados enunciados explícitamente para dicha investigación. Y fueron luego Bolyai y Lobachovski, trabajando independientemente, los primeros en desarrollar de manera sistemática, geometrías no euclidianas.

Fuera de esta cuestión capital, la exposición de Euclides era, como la filosofía que la acompañó durante muchos años en los programas de estudio, perenne. El estado acabado que Kant atribuía a la lógica desde Aristóteles, lo atribuía también implícitamente a la geometría de Euclides, pues cuando el filósofo necesitó, en sus indagaciones, de la geometría pura, no tuvo en cuenta desarrollos más cercanos a su época, hubiera podido inclusive compartir las preocupaciones de su corresponsal Lambert, sino que dió por supuesto que geometría era la geometría de Euclides. Una pregunta que se convirtió luego en fundamental, la relación entre la experiencia y el modelo matemático suministrado por la geometría, no podía tener sino una sola respuesta, puesto que no había sino una sola geometría. Es difícil saber si cuando en la escuela de Alejandría se escogían los postulados se quiso simplemente poner por escrito ciertos hechos de bulto de la experiencia o si se pretendía hacer una axiomatización estricta, sin llamados a la intuición; lo cierto es que Kant después de analizar detenidamente los teoremas de la geometría llegó a la conclusión de que sin la intuición no podía haber geometría no tauto-lógica, es decir, verdades necesarias a las cuales se adaptara perfectamente el mundo de los fenómenos. Poincaré dirá más tarde (R. Blanche, L'axiomatique, P.U.F. Paris 1959) que en la vasta construcción de Euclides donde los antiguos no encontraban ningún defecto lógico, todas las piezas se debían a la intuición. Esta y otras lagunas descubiertas por la crítica del siglo XIX posterior al hallazgo de geometrías no euclideanas condujeron a que los matemáticos se preguntaran qué era en realidad un axioma o una construcción axiomática y a que abandonaran la doctrina de los antiguos a este respecto. Las investigaciones culminaron en otra obra maestra de matemática, los Fundamentos de la Geometría, 1899, de David Hilbert, "Carta magna de la axiomática moderna" (Bourbaki). Así, la geometría suministró hace más de 22 siglos un primer modelo de axiomatización y cuando éste envejeció, suministró también el reemplazo. Es pues un hecho que la idea de axiomatización se desarrolló como una parásita sobre la historia de la geometría. Ni folósofos, ni lógicos, ni matemáticos lograron o necesitaron comprender a fondo una teoría axiomática antes de disponer de las geometrías no euclidianas al lado de la de Euclides.

Muchos años antes de las geometrías no euclideanas propiamente dichas había nacido, prematuramente es cierto, otra geometría. Su creador, Desargues, era contemporáneo de Descartes. Pero si la geometría analítica se desarrolló rápidamente, la primera existencia de la geometría proyectiva no pasó a la historia sino al olvido. Esta geometría, más general que la de Euclides, fué redescubierta por Poncelet a principios del siglo pasado y esta vez llamó poderosamente la atención de los investigadores, quienes, luego de enriquecerla con muchos teoremas, quisieron imponerla sobre la de Descartes y las aplicaciones de ésta a la exposición de la geometría clásica: fué la querella de los geómetras analíticos y asintóticos. No se tuvo una idea clara de cuál era la relación entre las dos geometrías (se llegó inclusive a pensar que la geometría proyectiva y, una tercera, la afín, eran ramas más pobres de la geometría euclidiana por carecer aquellas de la noción de distancia) sino hasta cuando Cayley logró subordinar (1859) las propiedades métricas a las propiedades proyectivas, un hecho que, entusiasmado, él consignó en el aforismo: "la geometría proyectiva es toda la geometría".

Apareció luego F. Klein para hacer la síntesis de casi todo cuanto hasta 1872 se llamaba geometría, lo cual hizo él en el nunca bien celebrado (puesto que su centenario se pasó en silencio) programa de Erlangon. Recordemos algunas ideas fundamentales de este discurso.

Ante todo una observación (tercer parágrafo) que es fundamental para comprender toda la geometría (la elemental y la superior) posterior a dicho programa. Kelin la enuncia así: "La geometría proyectiva no tomó forma sino cuando se tuvo la costumbre de considerar como enteramente idéntica la figura primitiva y a todas aquellas que pueden deducirse de ella proyectivamente".

En seguida una primera idea fundamental. Klein hace notar que la geometría clásica está compuesta por propiedades invariantes respecto a un determinado grupo. De donde él infiere el principio de generalización de la geometría: "Dada una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiar en ella los objetos desde el punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo". Este principio generalizador caracteriza lo que es una geometría respecto a un grupo (más general, un pseudogrupo) de transformaciones; gracias a los trabajos de E. Cartan dicho principio permite llegar hasta los espacios fibrados y las categorías. Así es posible, por ejemplo, considerar la topología como una geometría y substituír el principio de Cayley citado más arriba por el siguiente: "La topología es la más general de todas las geometrías".

Una segunda idea fundamental. Según lo que antecede, para construír una geometría se necesitan ante todo un espacio y un grupo de transformaciones. Ahora bien, dado un grupo y un subgrupo de éste, las invariantes respecto al grupo son también invariantes respecto al subgrupo y por lo tanto la geometría respecto al grupo es más general que la geometría respecto al subgrupo. De aquí nace el principio de subordinación de las geometrías.

Una tercera idea fundamental aparece como una aplicación de las anteriores. Para poner a prueba los principios enunciados, Klein muestra que ciertas teorías antes dispersas se vuelven equivalentes, como realizaciones diferentes de una misma geometría. Es el principio que podemos llamar de isomorfismo.

Hemos destacado tres grandes hitos en la historia de la geometría elemental: Euclides, Hilbert, Klein. En la obra de Hilbert culmina la axiomatización comenzada por los griegos. Tanto la obra de Euclides como la de Hilbert tienen una doble importancia, desde el punto de vista de la geometría y del de la axiomática. Podemos hablar, con un sentido evidente, de axiomatización a la manera de Euclides y axiomatización a la manera de Hilbert. Sin que esto signifique una variación de sentido en la noción de demostración "porque lo que era una demostración para Euclides lo es todavía para nosotros" (Bourbaki, Eléments de Mathématiques, livre 1, Introduction. Hermann, Paris).

Hilbert dedicó gran parte de su vida matemática a la tarea de hacer posible la axiomatización de toda la matemática de manera análoga a como había logrado la axiomatización de la geometría de Euclides. Por otra parte, Klein en la geometría elemental y Lie en la geometría diferencial, introdujeron la noción de grupo, entonces reciente y utilizada solamente en álgebra. Estas dos tendencias precursoras están entre las que confluyeron para formar la matemática moderna. Bourbaki realiza una buena parte del programa de Hilbert y a su vez refina la axiomatización a la manera de Hilbert al proponerse exponer axiomáticamente toda la matemática mediante estructuras.

2. Podemos enunciar ahora tres grandes tendencias en la enseñanza de la geometría, inspiradas en las tres tendencias anteriores, a saber:

1) Euclides y sus deformaciones,
2) Hilbert y sus adaptaciones,
3) Klein y sus generalizaciones.

En principio, era de esperarse un movimiento de renovación en la enseñanza de la geometría a partir de la obra de cada uno de los tres grandes geómetras: Euclides, Hilbert y Kelin. En realidad la influencia del primero continuó casi hasta nuestros días y, sobretodo a partir del siglo XIX, dicha influencia no se ha ejercido por el texto original sino mediante extractos que en general deforman la intención de Euclides. La influencia de Hilbert se hizo sentir casi inmediatamente pero solo en contados países. La obra de Klein influyó profundamente en la investigación pero casi nada en la enseñanza elemental, si se exceptúa Alemania. Desde luego la influencia de Hilbert y de Klein se acrecientan últimamente, mientras que la de Euclides disminuye. En efecto, hacia los años cincuenta apareció entre los profesores universitarios de los países desarrollados un movimiento de inconformidad respecto a la poca relación que guardaban los conocimientos que equipaban a los bachilleres al llegar a la universidad con los conocimientos de que se los iba a ser partícipes ahí. Dicho movimiento culminó (1959) en Royau mont (cerca de París) en un coloquio al que concu rrieron profesores de los niveles universitario y secundario así como responsables estatales de la e ducación, de Europa y América. La recomendación final fué la de rehacer por completo el pénsum de estudios secundarios y primarios.

Este coloquio tuvo una influencia decisiva. En algunos países, la renovación es hoy un hecho, lue go de tremendas vicisitudes es cierto. Pero en muchos otros, la situación es aún muy confusa por falta de personal preparado, de coordinación de esfuerzos y de metas claras que puedan ser perseguidas sin vacilación.

Esto es particularmente cierto en geometría. Se pueden encontrar representantes de cada una de las tres tendencias reseñadas más arriba.

Decididamente convencido de que la geometría elemental debe presentarse algebraicamente, voy a resumir a continuación las razones (ampliamente expuestas por grandes maestros en congresos sobre la materia) que justifican tal actitud.

La tendencia que preconiza la enseñanza de la geo metría a la manera de Euclides tiene los siguientes inconvenientes:

En primer lugar, la obra de Euclides es una síntesis admirable de los conocimientos matemáticos de su época, ya no de la actual obviamente.

En segundo lugar hay temas a los cuales presta Euclides una importancia que no pueden tener hoy frente a nociones que nos conciernen mucho más que los triángulos, por ejemplo.

En tercer lugar, debido a la evolución misma de la matemática hay situaciones en las que las técnicas algebráicas son mucho más ventajosas y en veces hasta sería una excentricidad didácticamente inperdonable proceder como tenía que hacerlo Euclides por no disponer de otros medios.

En cuarto lugar, aunque Euclides no se pueda considerar como un modelo de la axiomática moderna, dado sus méritos podría hacerse una excepción en la literatura científica y declararle un libro de texto para todos los tiempos. Pero no es esto lo que se hace. Por una parte, motivos de extensión impiden seguirle paso a paso a lo largo de toda la obra. Por otra parte, debido a la actitud titubeante de los programas no esta bien claro, cuál es la finalidad de la enseñanza. Si, como se dice, la geometría figura en el pénsum para aprender a razonar, entonces basta llegar a comprender el primero de los trece libros. Si más bien se persiguen finalidades que tienen que ver con la práctica, entonces sobra el estudio de Euclides. Para tratar de correr tras de los dos objetivos se hacen unos compendios híbridos que, salvo raras veces, deforman lamentablemente la obra del maestro y que no tienen además en cuenta las investigaciones posteriores a ella: lo cual equivale a saltar alegremente por sobre 22 siglos de historia de la matemática.

La tendencia que procura la enseñanza de la geometría a la manera de Hilbert tiene los siguientes inconvenientes :

En primer lugar, Hilbert, en ediciones sucesivas, llevó su obra a la perfección; por esto mismo no es una obra pensada elementalmente; es la de un especialista, desarrollada en un seminario (Götingon) para especialistas en fundamentación de la geometría elemental y estos fundamentos no tienen por qué preocupar en manera alguna durante las etapas de información general.

En segundo lugar, para explicitar lo anterior, es difícil llegar a dominar 20 axiomas de manera que se obtenga otro resultado que no sea el perseguido por Hilbert: construcción estrictamente axiomática de la geometría de Euclides. Para llegar a las aplicaciones, como parece ser el propósito de los programas, se necesitarían desarrollos cuya extensión no cabe dentro de un plan de iniciación.

Surge entonces la idea de aligerar las condiciones del trabajo de Hilbert para adaptarla a la enseñanza elemental. Y efectivamente, a diferencia de las deformaciones de la obra de Euclides, la obra de Hilbert tuvo casi desde su aparición, adaptaciones muy afortunadas, hechas por excelentes maestros. En general ellos prefieren esta presentación a la puramente algebráica por considerar que los axiomas geométricos son más fáciles de captar que los del álgebra. Algunos, como Choquet, propungan que una vez que se ha adquirido un buen manejo de los axiomas se puede conducir a los alumnos hacia las nociones del álgebra lineal, las cuales una vez asimiladas permiten olvidar los axiomas geométricos iniciales. Irónicamente, Dieudonné ha apodado esta manera de proceder "el método del andamio previo". Por el contrario, la geometría se puede entroncar después del álgebra: hay así economía de axiomas y ésta refuerza el sentimiento de unidad de la matemática. No se establece la geometría, luego el álgebra, para después reducir la geometría al álgebra con la consiguiente duplicación de axiomas.

Cuáles son ahora las razones para propender hacia la tendencia originada en Klein en la didáctica de la geometría ?

En primer lugar, la presentación de la geometría mediante estructuras algebráicas encaja perfectamente dentro de la visión estructural de la matemática a la manera de Bourbaki. Al hablar aquí de las generalizaciones de la tendencia originada en Klein se hace alusión por una parte a las contribuciones de E. Cartan y por otra al hecho de que la exposición de la geometría tal como aparece en algunos parágrafos de Bourbaki y la que allí no aparece pero se desprende del sentido general de la obra, concuerda con la idea de Kelin en el empleo sistemático de la noción de grupo por ejemplo. La generalización está en el hecho de que también aparecen otras estructuras algebráicas.

En segundo lugar, este enfoque de la geometría es más dinámico que el de Euclides o el de Hilbert. Esta fué por cierta razón aducida en Royaumont por profesores alemanes, como Botsch, para haber adaptado ellos ya desde antes la geometría de los movimientos.

En tercer lugar, muchos docentes creen que deben enseñar geometría por ser ésta un modelo deductivo insustituíble y que si no recorren esas largas cadenas de razones de que hablaba Descartes, sus oyentes estarán condenados para siempre a no saber razonar. Este raciocinio tiene sus siglos y si fuera probatorio no se lo habría hecho respecto a otras disciplinas. Ahora bien, es cierto que la historia del arte de razonar está íntimamente ligado a la historia de la geometría; pero es bueno recordar que, según la psicología evolutiva de Piaget, a la edad en que suele enseñarse la geometría elemental no se ha logrado plenamente la etapa hipotético-deductiva del desarrollo intelectual. Espero no equivocarme, si sugiero que esta es la explicación de que el estudio de la geometría axiomátizada en la enseñanza media sea tan forzada, memorística y desafecto para los alumnos. Pero si no es la recitación de teoremas entonces parece que la geometría en estos grados de la enseñanza pierde su razón de ser. Es verosímil que así la hayan entendido los programadores puesto que con la manera tradicional de ver la geometría, desaparece también esta de sus obras. Por el contrario, según la visión algebraica de la geometría, es posible considerar intuitivamente situaciones geométricas muy variadas de las cuales se pueden extraer gradualmente sus estructuras sin que esto conlleve un tratamiento axiomático. Sería más indicado dedicar los dos últimos años de enseñanza secundaria (el desarrollo mental se habrá completado ya) a una preparación específica para el bachillerato considerado como requisito para la enseñanza superior, comenzada con una revisión de todo el material intuitivo acumulado hasta entonces dándole ahora sí una presentación axiomatizada.

En cuarto lugar, al hacer la presentación algebraica de la geometría se conocen otras realizaciones de las estructuras algebraicas y se tiene una experiencia más de la generalidad y posibilidades de aplicación de estos poderosos instrumentos. Una cosa es calcular áreas y volumenes de paralelipípedos y cuerpos redondos; otras, partir de los hechos más elementales de la simetría,por ejemplo,y de ahí poco a poco llegar hasta la noción de grupo. Lo promero enriquece al aprendiz con ciertos hábi tos de cálculo que por más que se diga no se emplean sino en contadas profesiones para las cuales hay por cierto una formación más adecuada; la segunda es tratar de captar lo que puedan tener en común ciertas situaciones así como el entrelazamiento de los componentes de cada una de ellas: ejercicio de abstracción de análisis y de síntesis posiblemente tanto más enriquecedor cuanto que no debe consistir en recitar un texto sino en construír activamente una experiencia.

Finalmente, al emplear instrumentos algebráicos, aparecen los verdaderos problemas de la geometría y aparece la geometría en su lugar propio dentro de la matemática. La geometría cede de buena gana un primer lugar que ocupó durante mucho tiempo, antes de que los matemáticos supieran servirse eficazmente de las ideas algebráicas.

Esta exposición un tanto esquemática, será detallada en otra publicación.

***

Universidad Nacional de Colombia
Bogotá.