UNA NOCION DE FILTROS

por

Yu Takeuchi

Acercamiento cuando $x \to +\infty$

Sea f una función de valor real definida en $\mathbb{R}$. Para hablar del comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to +\infty$ hay que escoger los valores de la variable x cada vez más grandes, por ejemplo x mayores que 100, x mayores que 1000, x mayores que 1.000.000, etc., esto es, estamos seleccionando los valores de x mediante una familia de intervalos, $(100,\infty)$, $(1000,\infty)$, $(1000000,\infty)$, etc., es general, intervalos de la forma (a,∞).

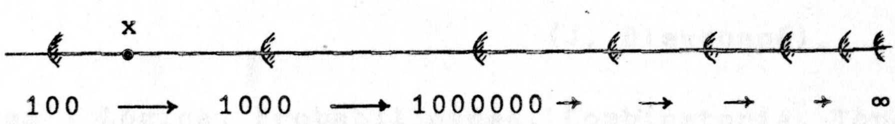


Figura 1

Para que los valores de la variable x sean cada vez más grandes (o se acerquen hacia $+\infty$) estamos utilizando la familia de intervalos de la forma (a,∞) como si fuera un juego de cedazos, donde cada intervalo (a,∞) sería un cedazo (por ejemplo el intervalo $(100,\infty)$ es el cedazo que selecciona los valores de x con la condición "mayor que 100").

Si $a < b$ entonces el intervalo (b,∞) nos ofrece una mejor selección que (a,∞), esto, el cedazo (b,∞) es más fino que el cedazo (a,∞). También se observa que

$$(a,\infty) \cap (b,\infty) = (b,\infty) \qquad \text{si } a < b ,$$

esto se puede interpretar diciendo que el uso de los dos cedazos (a,∞) y (b,∞) simultáneamente resulta igual al uso de un sólo cedazo (b,∞) (naturalmente el cedazo más fino es el que trabaja para la selección !).

Además, tenemos que

$$(a,\infty) \neq \phi \qquad \text{para todo } a ,$$

esto es, ningún cedazo tiene huecos tapados (un cedazo con huecos tapados no sirve para la selección pues no filtra nada!).

Ahora, observemos algún comportamiento específico de la función f cuando $x \to +\infty$ para examinar como actúa la familia de intervalos de la forma (a,∞) (el juego de cedazos) al respecto.

(i) Por ejemplo, " $f(x)$ diverge hacia el infinito cuando $x \to +\infty$ " quiere decir que:

"Dado $M > 0$ cualquiera existe a tal que

$$f(x) > M \quad \text{para todo} \quad x > a \text{ "} \tag{1}$$

Esto no quiere decir que el conjunto $\{x \mid f(x) > M\}$ es un intervalo de la forma (a,∞) (Ver Fig. 2) , sino:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > M\} \supseteq (a,\infty) \tag{2}$$

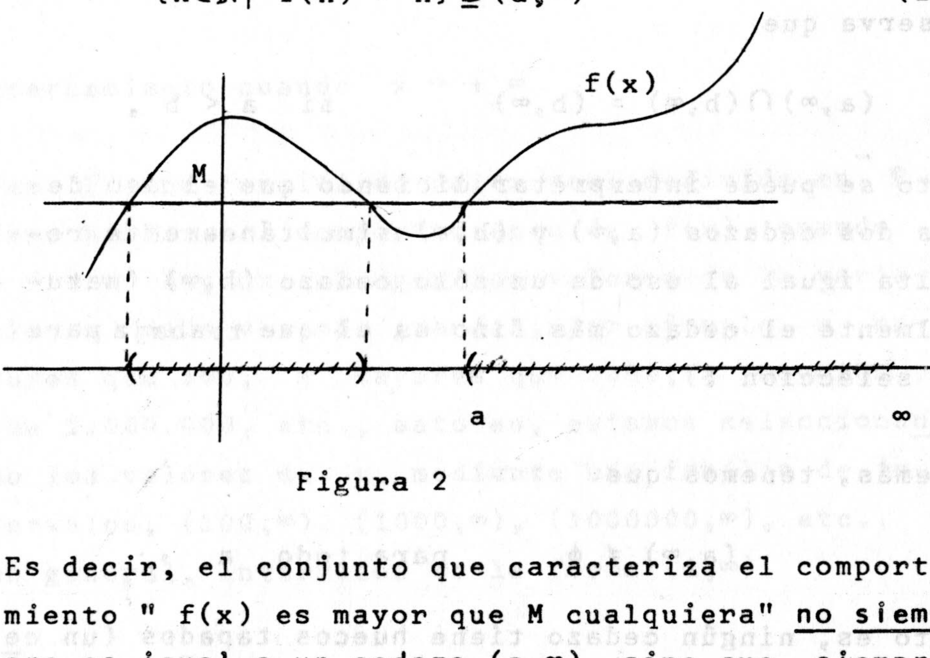


Figura 2

Es decir, el conjunto que caracteriza el comportamiento " $f(x)$ es mayor que M cualquiera" <u>no siempre es igual</u> a un cedazo (a,∞), sino que siempre <u>contiene</u> a algún cedazo (a,∞). Con el fin de simplificar nuestra descripción usaremos la colección $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos que contienen algún intervalo de la forma (a,∞) (naturalmente $\mathcal{F}$ abarca todos los intervalos de la forma (a,∞)), entonces " $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$ " si, y sólo si,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > M\} \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } M. \tag{3}$$

El lector puede observar que este artificio de agregar más conjuntos para formar la colección $\mathcal{F}$ además de todos los intervalos de la forma (a,∞) nos conduce a la misma selección de valores de x para $x \to +\infty$, pues dado un juego de cedazos para cierta selección agregar otros cedazos que tienen más huecos que algún cedazo del juego inicial nos da la misma selección.

Ahora, veremos más ejemplos del uso de la colección $\mathcal{F}$ (nuestro juego de cedazos) para precisar algunos comportamientos de la función cuando $x \to +\infty$.

(ii) $f(x) \to c$ cuando $x \to +\infty$

si, y sólo si, "dado $\varepsilon > 0$ cualquiera existe a tal que

$$|f(x) - c| < \varepsilon \quad \text{para todo } x > a" , \tag{4}$$

Este hecho puede expresar simplemente que

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x) - c| < \varepsilon\} \in \mathcal{F} \quad (\text{para todo } \varepsilon > 0) \tag{5}$$

(iii) $f(x)$ es mayor que $g(x)$ para x suficientemente grande si, y sólo si,

"Existe a tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$" . (6)

Utilizando la colección $\mathcal{F}$, (6) puede expresarse como:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\} \in \mathscr{F}. \qquad (7)$$

Propiedades de la colección $\mathscr{F}$

Es fácil ver las siguientes propiedades de $\mathscr{F}$:

I. Si $S, T \in \mathscr{F}$ entonces $S \cap T \in \mathscr{F}$.

<u>Demostración</u>: Si $S \supseteq (a,\infty)$, $T \supseteq (b,\infty)$ con $a < b$ entonces $S \cap T \in (a,\infty) \cap (b,\infty) = (b,\infty)$, esto es, $S \cap T$ es un conjunto que contiene al intervalo (b,∞), por lo tanto $S \cap T \in \mathscr{F}$.

(En el juego de cedazos se puede usar dos cedazos simultáneamente).

II. $\phi \notin \mathscr{F}$.

(El juego de cedazos no contiene cedazos con huecos totalmente tapados).

III. Si $S \in \mathscr{F}$, todo T con $T \supseteq S$ pertenece a $\mathscr{F}$.

<u>Demostración</u>: Si $S \supseteq (a,\infty)$ entonces

$$T \supseteq S \supseteq (a,\infty),$$

así que $T \in \mathscr{F}$.

En forma abstracta, dado un conjunto X una familia de subconjuntos de X que satisface las tres propiedades anteriores se llama un filtro de X, así $\mathscr{F}$ es un filtro de $\mathbb{R}$. La colección de todos los intervalos de la forma (a,∞) no es un filtro de $\mathbb{R}$ pues sólo satisface las dos propiedades I y II. Si una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X satisface las dos propiedades I y II, agregando a $\mathcal{A}$ todos los subconjuntos de X que contienen algún miembro de $\mathcal{A}$ se obtiene un filtro de X, éste se llama " el filtro generado por $\mathcal{A}$". Así, $\mathcal{F}$ es el filtro generado por todos los intervalos de la forma (a,∞).

Ejemplos de filtro

Ejemplo I

La colección de todos los intervalos $(a,a+\delta)$, para $\delta > 0$, no es un filtro de $\mathbb{R}$, pero sí satisface las dos condiciones I y II. El filtro $\mathcal{F}_1$ generado por todos los intervalos de la forma $(a,a+\delta)$ nos sirve para precisar los comportamientos de funciones cuando $x \to a^+$.

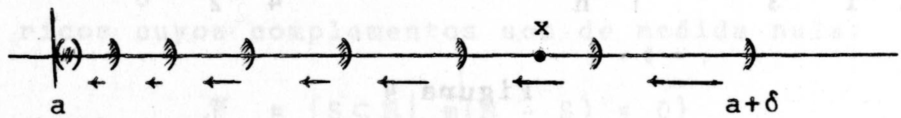


Figura 3

Ejemplo 2

La colección de todos los conjuntos de números naturales de la forma

$$\{n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ldots\} = \{k\in \mathbb{N} \mid k > n\}$$

satisface las condiciones I y II, el filtro generado por esta colección se llama "el filtro de Frechet" y se denota por $\mathcal{F}_r$. El filtro de Frechet juega el papel principal para precisar el concepto de la convergencia de sucesiones.

Una sucesión (a_n) tiende al límite L si, y sólo si, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera existe N_o tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n > N_o, \tag{8}$$

esto es:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n > N_o\}$$

así:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}_r \quad \text{para todo } \varepsilon > 0 \tag{9}$$

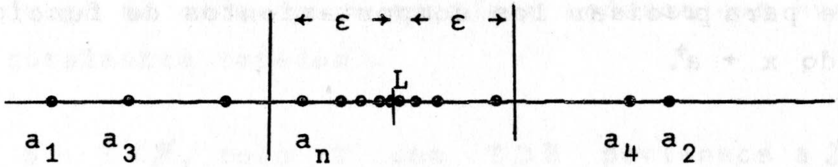


Figura 4

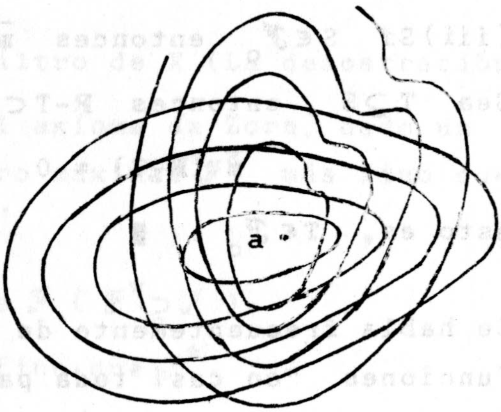
La relación " $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ " puede escribirse en término del filtro de Frechet como sigue:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n < b_n\} \in \mathcal{F}_r \tag{10}$$

Ejemplo 3

En $\mathbb{R}^2$, una vecindad del punto a es un conjunto que contiene una **bola** con centro en a. La colección $\mathcal{F}_a$ de todas las vecindades del punto a es el filtro de $\mathbb{R}^2$.

Figura 5



El filtro $\mathcal{F}_a$

Figura 6

Ejemplo 4

Sea $\mathcal{F}_o$ la colección de todos los conjuntos numéricos cuyos complementos son de medida nula:

$$\mathcal{F}_o = \{S \subseteq \mathbb{R} \mid \overline{m}(\mathbb{R} - S) = 0\}$$

entonces $\mathcal{F}_o$ es un filtro de $\mathbb{R}$.

(i) Si $S, T \in \mathcal{F}_o$ entonces

$$\overline{m}\ (\mathbb{R}-S) = 0, \quad \overline{m}\ (\mathbb{R}-T) = 0$$

luego

$$\overline{m}\ (\mathbb{R}-S \cap T) = \overline{m}\ (\ (\mathbb{R}-S) \cup (\mathbb{R}-T)\ ) = 0$$

por lo tanto:

$$S \cap T \in \mathcal{F}_o .$$

(iii) Si $S \in \mathcal{F}_o$ entonces $\overline{m}\,(\mathbb{R}-S) = 0$.

Sea $T \supseteq S$, entonces $\mathbb{R}-T \subset \mathbb{R}-S$, luego :

$$\overline{m}\,(\mathbb{R}-T) = 0$$

esto es, $T \in \mathcal{F}_o$. ∎

Se habla frecuentemente de ciertas propiedades de funciones "en casi toda parte", por ejemplo, " f es contínua en casi toda parte", "f es mayor que g en casi toda parte", " f es nula en casi toda parte", en términos del filtro $\mathcal{F}_o$ estos pueden expresarse respectivamente como sigue:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } x\} \in \mathcal{F}_o ,$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > g(x)\} \in \mathcal{F}_o ,$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \in \mathcal{F}_o .$$

Ultra-filtro

Sea X un conjunto. Sean $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ dos filtros de X, si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ decimos que $\mathcal{F}'$ es más fino que $\mathcal{F}$ (el juego de cedazos $\mathcal{F}'$ tiene más cedazos que el juego $\mathcal{F}$).

El conjunto de todos los filtros de X es inductivo por inclusión, esto es:

dada una sucesión de filtros de X,

$\{\mathcal{F}_n, n = 1,2,3,\ldots,\}$ tal que

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots,$$

la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ es un filtro de X (La demostración es inmediata !). Por el **axioma de Zorn**, dado un filtro $\mathcal{F}$ existe un filtro maximal $\mathcal{F}^*$ más fino que $\mathcal{F}$, esto es:

(i) $\mathcal{F}^*$ es más fino que $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}^* \supseteq \mathcal{F}$)

(ii) No hay filtro más fino que $\mathcal{F}^*$.

Filtro maximal se llama "ultra-filtro" .

Lema. Sea $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro de X, si $A \cup B \in \mathcal{F}^*$ entonces

$$A \in \mathcal{F}^* \quad , \quad ó \quad , \quad B \in \mathcal{F}^*$$

Demostración: Supongamos que $A \notin \mathcal{F}^*$, $B \notin \mathcal{F}^*$.
Sea $\mathcal{F} = \{C \subset X \mid A \cup C \in \mathcal{F}^*\}$ entonces tenemos:

(i) Si $F \in \mathcal{F}^*$, $A \cup F \supseteq F$, luego $A \cup F \in \mathcal{F}^*$, esto es, $F \in \mathcal{F}$, o sea que $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}^*$.

(ii) $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^*$ puesto que $B \notin \mathcal{F}^*$ pero $B \in \mathcal{F}$.

(iii) $\mathcal{F}$ es un filtro de X.

1 Sea $C \in \mathcal{F}$, si $D \supseteq C$ entonces $A \cup D \supseteq A \cup C$, luego $A \cup D \in \mathcal{F}^*$, puesto que $A \cup C \in \mathcal{F}^*$, esto es $D \in \mathcal{F}$.

2 Supongamos que C_1, C_2 $\mathcal{F}$, esto es:

$$A \cup C_1 \in \mathcal{F}^*, \quad A \cup C_2 \in \mathcal{F}^*$$

Entonces

$$A \cup (C_1 \cap C_2) = (A \cup C_1) \cap (A \cup C_2) \in \mathcal{F}^*$$

por lo tanto:

$$C_1 \cap C_2 \in \mathcal{F} .$$

3 Si $\phi \in \mathcal{F}$ se tendría que

$$A \cup \phi = A \in \mathcal{F}^* \quad \text{(absurdo!)},$$

por lo tanto tenemos que $\phi \notin \mathcal{F}$. ∎

(i), (ii) (iii) contradicen al hecho de que $\mathcal{F}^*$ es un ultrafiltro de X. ∎

<u>Corolario</u>: Sea $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro de X, si $A \subseteq X$ entonces

$$A \in \mathcal{F}^*, \quad \text{o}, \quad X - A \in \mathcal{F}^* .$$

<u>Demostración</u>. Basta observar que

$$A \cup (X - A) = X \in \mathcal{F}^* . \ ∎$$

***

El presente artículo es el texto de una conferencia dictada en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Tunja) en Octubre de 1977.