Boletín de Matemáticas
Vol. XIII (1979), págs. 51 - 62

NOTAS

ESTRUCTURAS FOLIADAS

por

G., REEB.

> Por qué se les ha estudiado. Cómo se les ha estudiado. Es "rentable" continuar es tas investigaciones ?
>
> G., Reeb.

1. Orígenes. Todo comenzó (hacia 1935) por una pre gunta inedita según entiendo de H. Hopf :

Constatando que sobre la esfera euclidiana S_3 (y más generalmente sobre las variedades orientables de dimensión 3) existen sistemas de p campos de

---

Este artículo fué traducido del Francés por Adriana Camacho.

N. del E.

vectores linealmente independientes en todo punto [abreviadamente: p-campo], para $p = 1, 2, 3$, parece oportuno plantear el siguiente problema:

Q_1: Existe sobre S_3 (o sobre V_3) un 1-campo completamente integrable $\vec{V}$? [es decir tal que $\vec{V}$ rot $V \equiv 0$ (notaciones de Hopf)]

H. Hopf estaba, evidentemente animado por el siguiente problema: encontrar un principio de clasificación razonable, o por lo menos no trivial, más allá de los invariantes de homología o de homotopía conocidos entonces para las variedades compactas de tres dimensiones. (Estas variedades escapaban entonces, y escapan todavía, a tentativas - sin embargo seductoras - de clasificación por criterios tales como: existencia de p-campos, ...).

Notemos aquí la pregunta conocida como "el problema del rango" :

Q_2: Existe sobre S_3 (o V_3) un 2-campo correspondiente a las transformaciones infinitesimales (de base) del grupo de Lie R^2 operando sobre S_3 ?

Esta pregunta cuyas generalizaciones son ahora bien familiares a los geómetras, no ha sido pues formulada hasta donde yo sé, por lo menos, por H. Hopf, ni por los geómetras de su tiempo.

Q_1 llamó inmediatamente la atención de Ch. Ehresmann quien puso este problema "en conserva" en un magnífico registro-repertorio que mi maestro me había autorizado a consultar en 1942, no sin aportar una cierta solemnidad; justificada, a la comunicación del registro. Cómo callar aquí algo muy triste: el rico contenido del repertorio no parece haber sido divulgado al conocimiento de un público amplio. Se sabe cómo Ch. Ehresmann esquivó el juego y aportó desde 1942 poderosas impulsiones a Q_1.

Esta alución, referente al orígen del estudio de las estructuras <u>foliadas</u> [permítaseme aquí reinvindicar la selección del vocablo subrayado, vocablo que conoció una feliz suerte (hasta el honor de ser citado por Etiemble* en compañía de otros términos como fibrado, ... en modelo), a cambio de esta concesión prometo no hablar de G. R. en lo que sigue], esta alusión pues, permite circunscribir bien nuestro tema:

Cada vez que hablemos de estructura foliada aquí, tendremos presente en el espíritu el caso en que la dimensión de las hojas es al menos 2 (es decir el caso en que las condiciones de completa integrabilidad o Teorema de Frobenius si se prefiere, intervienen efectivamente).

---

*"La jerga de las ciencias"

Claramente el caso en el cual la dimensión de las hojas es 1 (es decir el caso de las trayectorias de un 1-campo) tiene brillantes cartas de nobleza, fué ilustrado por nombres célebres y toda una historia que no hay lugar a recordar aquí. Además el lenguaje propio de las foliaciones o estructuras foliadas no ha dejado de aportar alguna nueva luz, aún en este caso. Pero en una palabra, como en mil, la introducción de las condiciones de completa integrabilidad produce fenómenos enteramente nuevos; y ahí estaba la intuición brillante de H. Hopf.

Hablando de intuición, hay que aprovechar aquí la ocasión de oponer de una parte la intuición segura (prospectiva en todo caso) de geómetras como Hopf, Ehresmann, de Rham, Bouligand, ... (para seguir con nuestro tema) y de otra parte la intuición desfalleciente (y en consecuencia paralizante) de otros geómetras, de los cuales algunos sólo han tenido tiempo de echar una ojeada superficial al tema.

No sobra precisar esto con algunas anécdotas:

Re-formulemos Q_2 bajo la forma más adecuada Q_2'.

Q_2': Existe sobre S_3 (o S_{2n+1} o V_n) una forma de Pfaff ω que verifique las siguientes condiciones $\omega \wedge d\omega \equiv 0$ y $\omega_x \neq 0$ en todo punto x?

y enunciemos un nuevo problema:

Q_3: Estudiar las integrales (hojas) de la ecuación $\omega = 0$ donde ω responde al problema Q_2'.

Consultados sobre los problemas Q_2' o Q_3 la mayoría de los geómetras tuvieron durante mucho tiempo (digamos hasta 1965) una reacción bastante parecida a esta. "La pregunta Q_2 se debe poder llevar más o menos naturalmente (entiéndase por métodos inspirados en los teoremas de Rham) al siguiente problema:

Q_4: Existe una forma ω cerrada, con $\omega_x \neq 0$ en todo punto x ?

y Q_3 será entonces banal.

Se sabe hasta qué punto una opinión semejante es errónea. Es rentable desmitificar errores como ese, aunque sea únicamente para enseñar a un joven investigador a mantener, contra viento y marea, la dirección que habrá escogido con un "olfato" seguro.

He aquí otro ejemplo, lejano en apariencia solamente, de nuestro tema, donde en razón de prejuicios apresurados pero generalizados, algunos desarrollos han sido largamente interrumpidos o al menos retardados.

Recordemos una definición: siendo ω una forma de Pfaff, se llama clase de ω en el punto x al entero p_x para el cual el primer término de rango p_x en la sucesión:

$$d\omega_x,\ \omega_x \wedge d\omega_x,\ [d\omega_x]^2,\ \omega_x \wedge [d\omega_x]^2, \ldots$$

es nulo. [Se supone siempre $\omega_x \neq 0$].

"Completa integrabilidad" es pues equivalente a $p_x \leqslant 2$; esta noción es entonces un eslabón de una cadena que partiendo de la noción de forma cerrada desemboca en el caso general.

La clase juega para las formas un papel análogo al rango para las aplicaciones. Se sabe que esta analogía ha sido ampliamente explotada (Calabi, Martinet, ...) y que un vasto campo de investigación aún está abierto.

Sinembargo, otra analogía: la que yuxtapone 1-campo y forma de Pfaff ha permitido que la idea, falsa , siguiente se perpetúe:

"Como los 1-campos son, para una dimensión dada, todos isomorfos, debe pasar más o menos lo mismo con las formas" (esto a pesar de E. Cartan y a pesar del conocimiento que tienen de la obra de Cartan los portadores de la falsa noticia !)

2. Motivaciones. H. Hopf tenía según parece motivaciones profundas (quiero decir motivaciones externas al tema propiamente dicho, o también motivaciones que permitían esperar aplicaciones de la teoría por nacer) para proponer el estudio de las estructuras foliadas; pero quién sabría o podría ganar sobre este punto ? Claro está que una de las mejores propagandas para una teoría reside precisamente en la "motivación". Ahora bien, hay que decirlo, hace treinta años no se veía claramente la "motivación" del estudio de las foliaciones. Curiosamente la situación se ha volteado, y sin demasiado esfuerzo, se puede dar una lista de "motivaciones" aunque me parece que los matemáticos no dan el suficiente valor a estos argumentos.

M_1: Estudio de los sistemas diferenciales ordinarios, holomorfos en el campo complejo. Se conoce la importancia de la obra de P. Painlevé; pero pocas personas creen que Painlevé ha sentido verdaderamente que un lenguaje ad-hoc (el de las foliaciones) es prácticamente indispensable para discurrir como geómetra sobre este tema. Esta motivación conlleva en el presente un considerable movimiento de investigación (ver las investigaciones recientes de Moussu, Malgrange, sobre el teorema de Frobenius complejo).

M_2: He aquí algo aún más curioso: numerosos resultados muy precisos (referentes a los minimales excepcionales por ejemplo) son seculares! Raymond al azar de sus lecturas de Poincaré, Riemann y Schottky, se dió cuenta de que la teoría de los grupos fuchsianos permite inmediatamente construcciones de foliaciones ricas: en particular se puede desembocar así, no sin alguna difícil cirugía, a una foliación de co-dimensión uno de S_3 admitiendo un minimal excepcional.

M_3: La teoría de las acciones de grupos de Lie (teoría mucho más antigua que la de las foliaciones) conduce frecuentemente a considerar foliaciones engendradas. Así mismo la teoría del "marco móvil" (Cartan) ("dual" en un sentido bastante vago de la precedente) sugiere clases de foliaciones de estructura transversal notable.

M_4: La termodinámica acostumbró desde hace mucho tiempo a la física matemática [cf. Duhem P.] a la consideración de formas de Pfaff completamente integrables: el calor elemental dQ [notación de los termodinámicos] que representa el calor elemental cedido en una modificación infinitesimal reversible es una de estas formas completamente integrables. Este punto no parece haber sido casi profundizado desde entonces.

M_5: La teoría de los "flots" de Anozov, conduce de la manera más natural a estructuras foliadas.

M_6: La geometría "integral" desemboca igualmente a algunos problemas de foliaciones.

M_7: Last but not least. Parece que la geometría algebráica moderna, en la investigación de las variedades complejas compactas, pero no algebráicas, se orienta hacia el estudio de las foliaciones sustituyéndo a los clásicos "ciclos". [Ramis y Norguet, han llamado la atención sobre este punto]. Cuestión a seguir?

Viendo esta lista, no exhaustiva por cierto; una prospectiva, que no conlleva casi riesgo, parece deducirse: después del desarrollo algo poco explosivo que ha conocido y que conoce el estudio de las estructuras foliadas por ellas mismas se verá probablemente un desarrollo igualmente importante de las "motivaciones" y de las "aplicaciones".

3. Es "rentable" continuar estas investigaciones?

A juzgar por los desarrollos presentes (es fácil enumerar una centena de autores productivos) la respuesta a la pregunta parece ser "si". En cambio sería vano pretender enumerar, o simplemente clasificar, las tendencias de investigación actual, y, todavía más, tratar de deducir las tentativas que irán afirmando. Pero puede ser posible discer nir algunos tipos de problemas, sin haber conservado casi la atención de los investigadores, de los cuales es razonable esperar un buen rendimiento.

Antes de dar algunos ejemplos, una observación preliminar se impone: es impresionante ver , al lado de desarrollos necesarios pero técnicamente difíciles , numerosos resultados fundamentales proceder de ideas muy simples, inclusive ingenuas. He aquí, algunos ejemplos sugeridos por breves indicaciones: Tischler sobre las formas cerradas, el invariante de Gobdillon-Vey relacionado con la noción antigua de "último multiplicador", los ejemplos de Lutz-Varela y Raymond, que ya hemos tratado arriba, etc..., aquí se trata de ideas simples, con su demostración incluida; ideas que habrían debido saltar a los ojos de los primeros investigadores.

Otras ideas, como la que está a la base de la tesis de Haefliger son simples, pero su puesta en obra puede ser difícil. De estas también la lista sería larga: Bott, obstrucciones a la integrabilidad; Sullivan, Trurston,... Se podría apostar que otros hallazgos igualmente simples se revelarán útiles.

He aquí la pequeña lista prometida más arriba:

P_1: Los trabajos evocados en M_1, M_7 tocan un dominio cuya prosperidad parece garantizada por largo tiempo (pero esto es casi prospectiva a posteriori y empezando demasiado fácil). La siguiente sugestión corregirá un poco esta última impresión; el estudio de las funciones abelianas desde el punto de vista de las bellas foliaciones que le son asociadas podría abrir el acceso a nuevas investigaciones.

P_2: Pensando en los numerosos trabajos sobre los vértices de las hojas, los fenómenos a la Denjoy y Sachstedter, una noción de homología de pequeños ciclos parece surgir. Por qué no recurrir a los métodos propuestos por Robinson?

P_3: La teoría del "control óptimo" sugiere intercambios fructíferos con la teoría de las foliaciones.

P_4: El estudio de la "clase" de las formas; P_5 la codimensión ≥ 2. P_6.. Los aspectos relevantes de la topología general..

De todas maneras, el buen tema de mañana, es aquel que ignoramos ; o aquel que algún investigador joven y astuto guarda en secreto. Si recordamos, para concluír, la ventaja que de un modo u otro está unida a la lectura de los autores clásicos, encontraríamos justificada una desviación (aparente) del tema para anunciar que el año 1977 fué declarado - en Alsacia - "año LAMBERT" en honor de Jean Henri LAMBERT (1728-1777) nacido en Mulhouse, llamado el "Leibnitz" alsaciano.