Boletín de Matemáticas
Vol. XIII, Nos 2,3,4 (1979), pags, 100 - 110

SOBRE LA NOCION DE DEFINICION

ROBERTO RUIZ

0. Introducción .

El carácter que debe tener la definición en matemáticas permanece parcialmente indecidido. Aun cuando se han dado criterios para distinguir definiciones de otras proposiciones en matemáticas , su carácter básico aún se debate y esos criterios han terminado más por distinguir tipos de definiciones , que por contestar la pregunta central :

" Qué es la definición en Matemáticas ? " .

No pretendo resolver aquí dicho problema . Tampoco pretendo que el procedimiento que uso para basar mi conclusión sea formal en modo alguno . Sin embargo una discusión "intuitiva" lleva a una conclusión no solo clara sino además ya aceptada ; y creo que la simplicidad envuelta en la conclusión en sí puede ser de ayuda desde el punto de vista pedagógico . Por esto último , por el resultado un poco sorprendente y por la necesidad de debatirlo , para o bien descartarlo o aceptarlo y entonces formalizarlo , he decidido presentar este punto de vista.

1 . QUE SE HACE CUANDO "SE DEFINE"

Rudamente hablando lo básico de la definición es la introducción de un nuevo "término" en la teoría que se está desarrollando . Aun cuando esos términos tienen hoy características estudiadas (por ejemplo se hace diferencia entre aquellos que se usan para "bautizar" un ente , resultado de una demostración de existencia , y los que no tienen tal característica) , la introducción de "términos" en la teoría es la variable común en el concepto de definición . Para lograrlo se usa , en última instancia , una proposición que envuelve dicho término , y se introduce la proposición en la teoría . En realidad lo que se introduce es una propiedad (así tenga una única solución) , pero su caracterización dentro de la teoría es dada con base en proposiciones y la simplificación (proposiciones en cambio de propiedad) no es , en consecuencia , grave .

Por ejemplo , para introducir el término "cerrado" en topología se usa , digamos , la propiedad de "ser cerrado en X" forzando un valor cierto (en este caso) o falso a una proposición : "A es cerrado en X" . Es decir , se introduce la propiedad ("$\square$ es cerrado en X") por medio de una caracterización de sus soluciones .

Como lo básico es , pues , proposiciones y como el aspecto "introducir" envuelve al final "pertenecer", clarifico primero este punto .

Diré que una proposición "P" pertenece a la teoría en cuestión (Después veremos que en nuestro caso no tenía sentido usar una frase como "pertenece a la teoría desarrollada hasta el momento") , si es un axioma o si su valor , cierto o falso , es implicado por los axiomas . En cualquier otro caso diré que "P" no pertenece a la teoría .

Ciertamente si P pertenece y Q no pertenece a la teoría , la proposición P<==> Q no pertenece a la teoría . De otro modo P<==> Q y P tienen valores implicados por la teoría y por tanto también Q , contra la hipótesis .

Si se desea introducir Q en la teoría , un procedimiento equivalente es introducir (asignar un valor arbitrario , cierto o falso) a P<==> Q con P una proposición ya en la teoría .

En el caso citado arriba la propiedad "ser cerrado en X" o bien "$\square$ es cerrado en X" se introduce por medio de la equivalencia (de propiedades)

"$\square$ es cerrado en X" <==> "$\square^c$ es abierto en X "

Hago notar (aun cuando al final el resultado es independiente de este punto) que uso el término equivalencia de propiedades en el siguiente sentido : Dos propiedades P(x) y Q(x) son equivalentes en una teoría si para cada objeto "a" del universo de trabajo uno tiene :

i) P(a) tiene sentido si y solo si Q(a) tiene sentido ; y

ii) Para cada "a" para el cual P(a) y Q(a) tienen sentido

P(a)<==> Q(a) .

En forma simplificada P(x)<==> Q(x) (<=> por abuso) si la clase de soluciones de P(x) es igual a la clase de soluciones de Q(x) .

Como en el caso de propiedades colectivizantes (donde la clase de soluciones es un conjunto), uno se reduce a los objetos para los cuales la propiedad tiene sentido y determina la equivalencia de propiedades por medio de la equivalencia de proposiciones (carácter local).

En nuestro caso uno simplemente diría : para cada A subconjunto de X (i.e. determinación de objetos para los cuales las propiedades tienen sentido),

A es cerrado en $X \Longleftrightarrow A^c$ es abierto en X

Naturalmente una forma más elegante, pero quizás más confusa hubiera sido :

Definición

Las propiedades "$\square$ es cerrado en X" y "$\square^c$ es abierto en X" tienen la misma clase de soluciones, o bien

Definición

Las propiedades "$\square$ es cerrado en X" y "$\square^c$ es abierto en X" son equivalentes.

Y más cerca del uso común :

Definición

"$\square$ es cerrado en X" $\Longleftrightarrow$ "$\square^c$ es abierto en X".

Quisiera hacer notar que los axiomas, como los conocemos , no son extraños a esta clase de situaciones :

Ejemplo de axiomas equivalentes :

a) "Por dos puntos distintos en el espacio pasa una y una sola recta".

b) Para cada par de puntos X , Y en el espacio con $X \neq Y$ existe una única recta L tal que $X \in L$ y $Y \in L$.

c) Para cada par de puntos $X \neq Y$ en el espacio, la propiedad "$\square$ es una línea recta que contiene a X y a Y" tiene una y una sola solución .

2 . AXIOMAS Y DEFINICIONES

Como hemos notado , axiomas y definiciones pueden ser tratados , bajo cierto cuidado , como propiedades o, pasando a su carácter local , como simples proposiciones o finalmente como proposiciones que envuelven propiedades .

Para simplificar considero axiomas y definiciones como simples proposiciones .

Consideremos pues una definición P en una teoría la cual consideramos terminada . No tendría sentido decir que "P fué introducida en la teoría" y agregar después que P no pertenece a la teoría (la importancia de este punto se verá luego). Así pues, la definición P pertenece a la teoría.

Por otro lado la condición para introducir P a la teoría, fué que P no perteneciera (hasta ese momento) a la teoría. Así que tenemos las siguientes características:

i) P no es un axioma (original);

ii) El valor de P no depende de los axiomas originales (y por tanto tampoco depende del valor de ninguna proposición de la teoría hasta ese punto).

Pero además:

iii) No se hizo uso de proposición alguna "después de P" al asignar el valor de P.

En consecuencia el valor de P no depende del valor de proposición alguna de la teoría (y fué arbitrariamente asignado). ¿Pertenece P a la teoría? (ver i). Tal parece que no hay muchas posibilidades. De hecho, al menos intuitivamente, tenemos que:

i) P es un axioma;

ii) P no pertenece a la teoría "original" y

iii) La introducción de P implicó la extensión de la teoría original a una nueva a la cual P pertene ce (como axioma). Es decir que desde el punto de vista, digamos, práctico una definición es un "nuevo" axioma agregado a una teoría para (o que da como resultado) ampliarla. Desde el punto de vista formal es simplemente un axioma; y puesto que el carácter de "agregado" se pierde, entonces también se pierden las diferencias que, por este concepto, se hacían de otro "tipo" de axiomas. (Ver nota iv en el parágrafo siguiente).

La parte pedagógica a la cual me refería es gráfica y simple:

Teoría Original		
Axiomas Originales	Consecuencias de los axiomas originales	Extensión
Axioma (adicionado i.e. definición).		

3 . COMENTARIOS

i) El hecho que un axioma no aparezca "al principio" de la teoría puede parecer chocante , pero no debe serlo . Tiene la ventaja de identificar las consecuencias que no dependen de ese axioma ; o dicho de otro modo, establecer el punto en el cual el axioma se usa por primera vez y las consecuencias de introducirlo .

ii) Mas chocante que lo anterior es el hecho de que se usen palabras que (si insistimos en colocar el axioma o definición al principio de la teoría) no alcanzan sentido sino hasta cuando se ha avanzado en el desarrollo de la teoría . Pero ello representa solamente una limitación humana , no teórica o formal . De hecho , la solidez de una teoría matemática no depende del sentido de los axiomas . Más aún , no depende de que se pueda o no asociar a ellos un "concepto" o "modelo" . O para decirlo más cínicamente , gracias a Dios que la validez de las teorías matemáticas no dependen de que nuestros estudiantes los entiendan antes o después de que los estudien .

iii) El uso clásico de la definición tiene una ventaja práctica clara : garantiza en una cierta medida (o como diríamos : salvo error) la independencia que debe tener el nuevo axioma de los otros .

iv) Una característica de la definición como se estudia hoy es la siguiente : si una proposición P es una definición , entonces su introducción "no puede agregar nada nuevo" a (dentro de) la teoría previa a ella . Ciertamente la caracterización dada aquí mantiene ese criterio . Pero añade algo que normalmente (o mejor formalmente) no se menciona y resta saber si esto entraña inconsistencia entre éste y otros (formales) puntos de vista . A saber , la definición (como axioma) no puede agregar nada nuevo , ni siquiera puede agregar algo equivalente a algo en la teoría previa a élla .

v) He usado el término "axioma" libremente lo cual puede hacer creer que su carácter formal ha sido completamente decidido , hasta el punto de ser (formalmente) universalmente aceptado . Ello no es así . No deseo discutir o presentar aquí formalizaciones del concepto de axioma (intuitivamente claro) pero sí hacer notar en qué sentido lo he usado : Una proposición P de una teoría la llamo axioma si su valor (usualmente "cierto") no depende de ninguna otra proposición de la teoría .

vi) Dos puntos de vista se contemplan hoy con respecto de lo que es "una teoría matemática" . El punto de vista que una teoría matemática debe ser considerada , digamos , "terminada" y a partir de ello "estudiada" , el cual llamaríamos el punto de vista "estático" . Por el contrario , el punto de vista "dinámico" considera que una teoría matemática no "es" sino que , dijéramos , "está" y se incrementa (sin que se salga este proceso de "la" teoría) .

Aparentemente la diferencia formal fundamental entre los dos puntos de vista radica en que el segundo parece implicar que una teoría debe tener un numero infinito de "teoremas" (y por tanto no es "completable" por ser humano alguno) , pero no así el primero .

En el presente trabajo , por supuesto , he usado el primer punto de vista .

Roberto Ruiz

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

Cali (Colombia) .