Boletín de Matemáticas
Vol. XV, No. 2 (1981) pags.85 - 114

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS - SOLUCIONES ORIGINALES DE ESTUDIANTES COLOMBIANOS

Mary FALK de LOSADA.

Como parte de la actividad preparatoria para las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas que se realizaron en Washington en el presente año , se les dieron a los integrantes del equipo Colombiano los enunciados de varios problemas que formaron parte de los temarios de Olimpiadas Internacionales y Norteamericanas en años anteriores .

Los participantes respondieron con soluciones originales , geniales y sorprendentemente sencillas en muchos casos . Transcribimos varios de éllos a continuación para que se pueda apreciar el nivel de desempeño matemático que alcanzaron .

Vale la pena anotar que existen solucionarios a algunos temarios de estas competencias pero que en ninguno de los casos de los problemas cuyas soluciones aparecen a continuación , tuvieron acceso a una solución hecha por otra persona , ni publicada ni discutida en clase .

(1) XIX OLIMPIADA INTERNACIONAL . Problema 2 . (Sometido por Viet Nam) .

Resuelto por NELSON MEDINA , Colegio Santo Tomás de Aquino .

En una sucesión finita de números reales la suma de siete términos consecutivos cualesquiera es negativa y la suma de once términos consecutivos cualesquiera es positiva . Determinar el máximo número de términos de una tal sucesión .

Solución

Es un poco difícil , pero posible , encontrar una sucesión de 16 términos :

a_n :	(16),	(8),	(-28),	(8),	(16),	(8),	(-30),	(16),	(8),
n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n :	(-28),	(8),	(16),	(8),	(-29),	(16),	(8),		
n :	10	11	12	13	14	15	16		

Desde luego cualquier múltiplo (real) de esta sucesión cumplirá con los mismos requisitos . En resumen , es posible encontrar una sucesión de 16 términos con las características requeridas , pero no de diecisiete ;

Veamos por qué.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=4}^{14} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=8}^{14} a_k < 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=4}^{7} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{7} a_k < 0\end{array}\right\} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_k < 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=1}^{11} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=5}^{11} a_k < 0\end{array}\right\} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{4} a_k > 0 \qquad \Rightarrow \quad a_4 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=5}^{15} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=9}^{15} a_k < 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=5}^{8} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{8} a_k < 0\end{array}\right\} \quad \displaystyle\sum_{k=2}^{4} a_k < 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=2}^{12} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=6}^{12} a_k < 0\end{array}\right\} \quad \displaystyle\sum_{k=2}^{5} a_k > 0 \qquad \Rightarrow \quad a_5 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=6}^{16} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=10}^{16} a_k < 0\end{array}\right\} \displaystyle\sum_{k=6}^{9} a_k > 0 \\ \qquad\qquad\qquad \displaystyle\sum_{k=3}^{9} a_k < 0\end{array}\right\} \displaystyle\sum_{k=3}^{5} a_k < 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=3}^{13} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=7}^{13} a_k < 0\end{array}\right\} \displaystyle\sum_{k=3}^{6} a_k > 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=3}^{5} a_k < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=3}^{6} a_k > 0\end{array}\right\} a_6 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=7}^{17} a_k > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=11}^{17} a_k < 0\end{array}\right\} \displaystyle\sum_{k=7}^{10} a_k > 0 \rightarrow a_7+a_8+a_9+a_{10} > 0 ,$$

y además

$$\left.\begin{array}{l}a_4 > 0 \\ a_5 > 0 \\ a_6 > 0\end{array}\right\} a_4+a_5+a_6 > 0$$

$$\downarrow$$

$$a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10} > 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=4}^{10} a_k > 0$$

Lo cual es una contradicción , porque hemos obtenido que la suma de siete términos consecutivos (desde a_4 , hasta a_{10}) es mayor que cero , o sea que es positiva , lo cual contradice la hipótesis .

Nota

i) $\begin{matrix} a \\ \wr\, c \\ b \end{matrix}$, significa que si a,b, y c son proposiciones , $(a \wedge b) \Rightarrow c$

ii) Si una proposición no está precedida de ($\wr$) , significa que es aplicación de la hipótesis .

(2) V OLIMPIADA DE LOS ESTADOS UNIDOS . Problema 1.

Resuelto por JOSE GUTERMAN , Colegio Colombo-Hebreo.

A) Supóngase que cada cuadrado de un tablero de 4 x 7 como el ilustrado arriba se colorea bien sea de negro o bien sea de blanco . Demuestre que , en cualquier caso , debe haber un rectángulo (formado por líneas horizontales y verticales , del tablero) como el delineado en la figura , cuyos cuatro cuadrados esquineros tienen el mismo color .

Se presenta el rectángulo pedido cuando en dos columnas diferentes hay dos cuadrados del mismo color ubicados en la misma forma . (Es decir , en las mismas filas) .

Analicemos los casos que se pueden presentar .

<u>1o. Caso</u>

Todas las columnas tienen dos cuadros negros y dos cuadros blancos . Entonces la forma de combinar dos cuadros en 4 espacios es

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{34}{2} = 6 .$$

y en la septima columna se debe repetir una colocación .

<u>2o. caso</u>

En una columna cualquiera hay 3 cuadros blancos (o negros) Entonces la forma de combinar dos cuadros negros en los 3 espacios de las filas correspondientes es

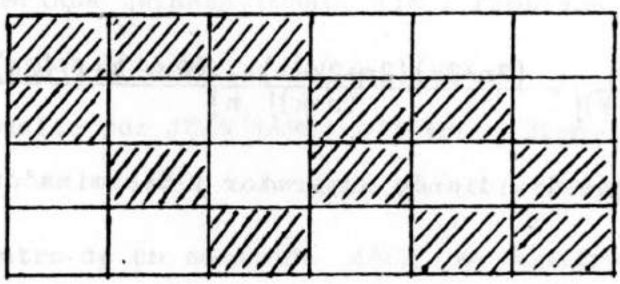
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

y en la quinta columna se debe repetir una colocación de dos cuadros negros o dos cuadros blancos , así forman el cuadrado requerido .

Nota :

Siempre hay dos rectángulos de los pedidos .

B) Hallar una manera de colorear un tablero de 4×6 en el cual no hay ningún rectángulo de los descritos antes , es decir , que tenga los cuatro cuadrados esquineros del mismo color .



(3) El siguiente problema fué resuelto por : MARIO MEJIA , del Colegio San Carlos ; de una manera mucho más senci- lla de la que aparece publicada en un solucionario de problemas de olimpiadas internacionales .

Cualesquiera que sean los naturales m y n se tiene que

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!} \in \mathbb{N} .$$

Caso 1. $m = n$

$$\Rightarrow \frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} = \frac{(2m)!\,(2m)!}{m!\,m!\,(2m)!}$$

tenemos que $\frac{(2m)}{m\ m}$ es un entero pues es igual a C^{2m}_{m}

Caso 2. $m > n$.

En este caso , $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$, y

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} = \frac{(2n+2k)!\,(2n)!}{(n+k)!\,n!\,(2n+k)!}$$

Pero

$$\frac{(2n+2k)!\,(2n)!}{(n+k)!\,n!\,(2n+k)!} = \frac{(2n+2k)(2n+2k-1)\ldots(2n+k+1)(2n)!}{(n+k)!\ n!}$$

que se obtiene dividiendo numerador y denominador por $(2n+k)!$

Ahora bien ,

$2n+2k$ es divisible por $n+k$

$2n+2k-2$ " " " $n+k-1$

$2n+2k-2p$ " " " $n+k-p$

y el último término

$2n+2k - (2k-2)$ es divisible por $n+k-(k-1)$

O , lo que es equivalente , $2n+2$ es divisible por $n+1$.

El producto de los factores restantes del numerador, después de cancelar , es un entero , digamos E

$$E = (2n+2k-1)(2n+2k-3)\ldots(2n-2k-2(k-1))$$

y la expresión queda

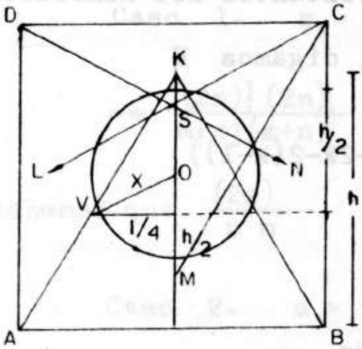
$$\frac{E\ 2n!}{n!\ n!} = E\ C_n^{2n}$$

que también es un entero .

(4) OLIMPIADA INTERNACIONAL XIX . Problema 1. (Sometido por HOLANDA) .

Resuelto por JUAN RAMON ACEVEDO , Gimnasio Moderno.

Dentro de un cuadrado ABCD se construyen los triángulos equiláteros ABK, BCL, CDM, DAN. Demostrar que los puntos medios de los cuatro segmentos KL, LM, MN y NK y los puntos medios de los ocho segmentos AK, BK, BL, CL, CM , DM, DN y AN son los doce vértices de un dodecágono regular .



$$h^2=1-1/4 \; ; \; h=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s=h-1/2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$e=(h/2)-s=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$x^2=e^2+(1/2)^2=\frac{4-4\sqrt{3}+3+1}{16}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=e$$

$$x=\sqrt{e} \quad \left(= \text{sen } 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

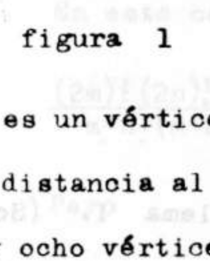
figura 1

V es un vértice del dodecágono (punto medio de AK) .

Su distancia al centro de la supuesta circunferencia es x...

Hay ocho vértices con características enteramente similares .

$$\text{Area del } \triangle = \frac{S^2}{2} = \frac{\sqrt{2S^2}\,x_1}{2}$$



$$x_1 = \frac{S^2}{S\sqrt{2}}$$

$$x_1^2=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{8}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=e$$

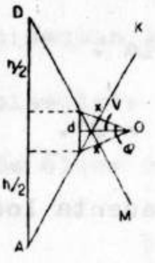
$$x_1 = x = \sqrt{e}$$

figura 2

U es otro vértice del dodecágono (punto medio de LK) .

Hay 4 vértices como U . Su distancia a O es x_1 , que es la misma x , la distancia de V a O .

Entonces , el dodecágono es cíclico . (1)



$$d+h = 1$$

$$d = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

figura 3

Aquí d es la distancia entre dos vértices consecutivos que son puntos medios de los lados de los triángulos equiláteros .

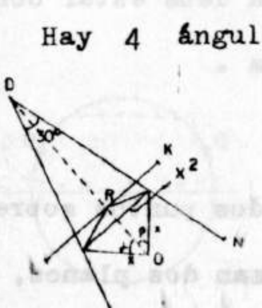
$$\frac{d}{2} = x \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} 15^{o}} = \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

como

$$\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \operatorname{sen}^2 15^{o} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 15^{o} \; ; \; \varphi = 30^{o}$$

Hay 4 ángulos como $\varphi = 30^{o}$.



$$\frac{x_2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 15^{o}$$

$$x_2 = \operatorname{sen} 15^{o} = x$$

figura 4

El triángulo cuyos lados son x, x_1 y x_2 es equilátero y , por lo tanto , $\pi + \rho = 60^{o}$. El ángulo NDM es bisecado por la diagonal del cuadrado y R (punto medio de LK) está sobre élla .

Entonces $\pi = \rho = 30^{o} = \varphi$.

Como π (ó ρ) representa los otros ocho ángulos centrales del dodecágono , entonces <u>el dodecágono tiene todos sus ángulos centrales iguales</u> (miden 30^{o}) . (2)

Las conclusiones (1) y (2) implican la tesis .

(5) III OLIMPIADA DE LOS ESTADOS UNIDOS . Problema 3.

Resuelto por RICARDO VELEZ , Colegio San Carlos .

Dos puntos de la superficie de una esfera de radio 1 se unen por medio de una curva interior de longitud menor que 2 . Desmostrar que la curva debe estar contenida en algún hemisferio de la esfera dada .

Solución :

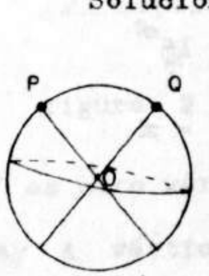


figura 1

Sean P y Q los dos puntos sobre la esfera O . Se trazan dos planos, uno por O y P , el otro por Q y O , de tal manera que sean perpendiculares a los planos tangentes a la esfera en P y en Q .

Así se forman ángulos diedros .

Después se bisectan los dos diedros opuestos , de modo que el plano bisectriz A divida la esfera en 2 hemisferios , uno de éllos conteniendo P y Q :

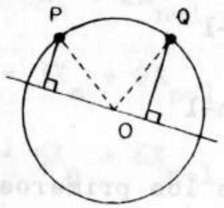


figura 2 .

Por consiguiente la distancia de los dos puntos al plano resultante es la misma . Para demostrar que cualquier curva de longitud menor que 2 que una P y Q , está contenida en ese hemisferio , bastaría con trazar una elipsoide con focos en P y Q , siendo obviamente la suma de las distancias desde un punto cualquiera de élla a P y Q igual a 2 .

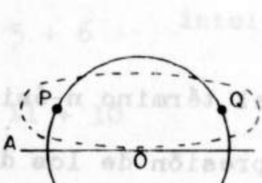


figura 3

Esta elipsoide , tangente al plano A en O , contiene cualquier curva interior que una a P y Q de longitud menor que 2 , en intersección con la esfera , quedando establecido el lugar geométrico que tendría esa curva .

(6) II OLIMPIADA DE ESTADOS UNIDOS . Problema 2 .

Resuelto por NELSON MEDINA , Colegio Santo Tomás de Aquino .

Sean (X_n) y (Y_n) dos sucesiones definidas de la siguiente manera :

$$X_o = 1, \quad X_1 = 1, \quad X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1}$$

$$Y_o = 1, \quad Y_1 = 7, \quad Y_{n+1} = 2Y_n + 3Y_{n-1}$$

para $n = 1,2,3,\ldots,$ de tal manera que los primeros términos de las dos sucesiones son :

$$(X_n) = 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots$$

$$(Y_n) = 1, 7, 17, 55, 161, 487, \ldots$$

Probar que a excepción de "1" las dos sucesiones no tienen términos comunes .

Solución

Trataremos de hallar el término n-ésimo de cada una de las sucesiones , como expresión de los dos primeros términos de la sucesión en "X" :

$$X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1} \qquad = 1X_n + 2X_{n-1}$$

$$X_{n+1} = (X_{n-1} + 2X_{n-2}) + 2X_{n-1} \quad = \quad 3X_{n-1} + 2X_{n-2}$$

$$X_{n+1} = 3(X_{n-2} + 2X_{n-3}) + 2X_{n-2} = 5X_{n-2} + 6X_{n-3}$$

$$X_{n+1} = 5(X_{n-3} + 2X_{n-4}) + 6X_{n-3} = 11X_{n-3} + 10X_{n-4}$$

$$\vdots$$

O sea que

$$X_{n+1} = X_n + 2X_{n-1}$$

$$X_{n+2} = 3X_n + 2X_{n-1}$$

$$X_{n+3} = 5X_n + 6X_{n-1}$$

$$X_{n+4} = 11X_n + 10X_{n-1}$$

$$\vdots$$

Y , tomando $n+1 = 2$ (para que $X_n = X_{n-1} = X_1 = X_o = 1$)

$X_2 = 1 + 2$

$X_3 = 3 + 2$ Lo que puede comprobarse según la lista

$X_4 = 5 + 6$ inicial de " X " .

$X_5 = 11 + 10$

$$\vdots$$

A los términos 1, 3, 5, 11,..., iniciales en cada una de las sumas los llamaremos m_2 (=1), m_3 (=3), m_4 (=5), m_5 (=11); etc. (Obsérvese que $m_1 = 1$ y que

$m_o = 0$; ver explicación enseguida) . Entonces ,

$X_n = m_n + (m_n + (-1)^n)$ y $\boxed{X_n = 2m_n + (-1)^n}$; ¡ OJO !

pero

$2m_n = m_{n+1} + (-1)^{n+1}$ → esto se explica viendo el procedimiento utilizado al principio de la solución (para $X_{n+1} = \ldots$)

→ Ahora se entiende por qué $m_1 = 1$, y $m_o = 0$.

Entonces ,

$m_{n+1} = 2m_n - (-1)^{n+1} = 2m_n + (-1)^n$;

$m_n = 2m_{n-1} + (-1)^{n-1}$

$m_n = 2[2m_{n-2} + (-1)^{n-2}] + (-1)^{n-1}$

$m_n = 4m_{n-2} + 2 \cdot (-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} = 4m_{n-2} + (-1)^{n-2}[2-1]$

$m_n = 4[2m_{n-3} + (-1)^{n-3}] + (-1)^{n-2}[2-1]$

$m_n = 8m_{n-3} + (-1)^{n-3}[4-2+1]$,

por el procedimiento utilizado , podemos generalizar :

$m_n = 2^k m_{n-k} + (-1)^{n-k}[2^{k-1} - 2^{k-2} + 2^{k-3} - \ldots + (-1)^{k-1}]$

y ahora , tomando $k = n-1$, tenemos ,

$m_n = 2^{n-1}m_1 + (-1)[2^{n-2}-2^{n-3}+2^{n-4}- \dots + (-1)^{n-2}]$, pero

$m_1 = 1$ ∴

$m_n = 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3} - 2^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1}$

$m_n = 2^{n-1} + 2^{n-2}(-1) + 2^{n-3}(-1)^2 + 2^{n-4}(-1)^3 + \dots + (-1)^{n-1}$;

Comparando esta expresión con la conocida fórmula :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}) ,$$

es fácil concluir que

$$a = 2 \quad y \quad b = -1,$$

entonces :

$$m_n = 2^{n-1} + 2^{n-2}(-1)+2^{n-3}(-1)^2+ \dots + (-1)^{n-1} =$$

$$\frac{2^n - (-1)^n}{2-(-1)} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

Por último ,

$$X_n = 2\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right) +(-1)^n = \frac{2^{n+1}-2(-1)^n+3(-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

Esta última fórmula (en la que , reemplazando , obtenemos los valores que se nos dan para " X " en el planteamiento del problema) , explica por qué la suma de dos términos consecutivos de (X_n) es una potencia de dos (2):

$$\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} + \frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^{n+1}+2^n}{3} = \frac{2^n(2+1)}{3} = 2^n \; .$$

En resúmen :

$$X_n = \boxed{\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}}$$

Sigamos con (Y_n) :

$$Y_{n+1} = 2Y_n + 3Y_{n-1} \qquad = 2Y_n + 3Y_{n-1}$$

$$Y_{n+1} = 2(2Y_{n-1}+3Y_{n-2}) + 3Y_{n-1} = 7Y_{n-1} + 6Y_{n-2}$$

$$Y_{n+1} = 7(2Y_{n-2}+3Y_{n-3}) + 6Y_{n-2} = 20Y_{n-2} + 21Y_{n-3}$$

$$Y_{n+1} = 20(2Y_{n-3}+3Y_{n-4})+21Y_{n-3} = 61Y_{n-3} + 60Y_{n-4}$$

$$\vdots$$

O sea que :

$$Y_{n+1} = Y_n + 3Y_{n-1}$$

$$Y_{n+2} = 7Y_n + 6Y_{n-1}$$

$$Y_{n+3} = 20Y_n + 21Y_{n-1}$$

$$Y_{n+4} = 61Y_n + 60Y_{n-1}$$

$$\vdots$$

Y , tomando $n+1=2$ (para que $Y_n = Y_1 = 7$, y $Y_{n-1} = Y_o = 1$)

$Y_2 = 7\ (2) + 3$

$Y_3 = 7\ (7) + 6$ estos resultados , según puede compro-

$Y_4 = 7\ (20) + 21$ barse , son los mismos que aparecen en

$Y_5 = 7\ (61) + 60$ el enunciado .

$\vdots$

A los términos 2, 7, 20, 61, ... , factores del primer sumando en cada " Y ", los denotaremos por " P ": $P_2 = 2$, $P_3 = 7$, $P_4 = 20$, $P_5 = 61$, etc. (puede verse que $P_1 = 1$, y $P_o = 0$, según demostramos en seguida)

Entonces :

$Y_n = 7(P_n) + (P_n + (-1)^n)$

$$\boxed{Y_n = 8P_n + (-1)^n}$$

| OJO |

pero

$3P_n = P_{n+1} + (-1)^{n+1}$ → véase el procedimiento para hallar $Y_{n+1} = \ldots$

→ ésto explica por qué $P_1 = 1$ y $P_o = 0$

Entonces

$$P_{n+1} = 3P_n - (-1)^{n+1} = 3P_n + (-1)^n$$

$$\rightarrow \quad P_n = 3P_{n-1} + (-1)^{n-1}$$

$$P_n = 3\left[3P_{n-2} + (-1)^{n-2}\right] + (-1)^{n-1}$$

$$P_n = 9P_{n-2} + 3\cdot(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}$$

$$\rightarrow \quad P_n = 9P_{n-2} + (-1)^{n-2}\left[3-1\right]$$

$$P_n = 9\left[3P_{n-3} + (-1)^{n-3}\right] + (-1)^{n-2}\left[3-1\right]$$

$$P_n = 27P_{n-3} + 9\cdot(-1)^{n-3} + (-1)^{n-2}\left[3-1\right]$$

$$\rightarrow \quad P_n = 27P_{n-3} + (-1)^{n-3}\left[9-3+1\right]$$

Generalizando

$$P_n = 3^k P_{n-k} + (-1)^{n-k}\left[3^{k-1} - 3^{k-2} + 3^{k-3} - \dots + (-1)^{k-1}\right]$$

Y , tomando $k = n-1$,

$$P_n = 3^{n-1}P_1 + (-1)\left[3^{n-2} - 3^{n-3} + 3^{n-4} - \dots + (-1)^{n-2}\right] ,$$

pero $P_1 = 1$.

Luego

$$P_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}$$

$$P_n = 3^{n-1} + 3^{n-2}(-1) + 3^{n-3}(-1)^2 + \dots + (-1)^{n-1} ,$$

Luego

$$P_n = \frac{3^n - (-1)^n}{3-(-1)} = \frac{3^n - (-1)^n}{4} \text{ ; por último ,}$$

$$Y_n = 8\left(\frac{3^n-(-1)^n}{4}\right) + (-1)^n = 2(3^n-(-1)^n) + (-1)^n = 2\cdot 3^n - (-1)^n$$

$$Y_n = 2\cdot 3^n + (-1)^{n+1} ,$$

en resúmen :

$$\boxed{Y_n = 2\cdot 3^n + (-1)^{n+1}}$$

Ahora supongamos (<u>negando</u> <u>la</u> <u>tesis</u>) que existe un X_θ y un Y_λ que son iguales :

$$\frac{2^{\theta+1}+(-1)^\theta}{3} = 2\cdot 3^\lambda+(-1)^{\lambda+1} \rightarrow 2^{\theta+1}(-1)^\theta = 2\cdot 3^{\lambda+1}+3(-1)^{\lambda+1}$$

$\rightarrow 2^{\theta+1} = \boxed{2\cdot 3^{\lambda+1}+3(-1)^{\lambda+1}+(-1)^{\theta+1}}$. Si "i" significa <u>impar</u> y "p" significa <u>par</u> , podemos hacer el siguiente cuadro :

λ	θ	$3(-1)^{\lambda+1}+(-1)^{\theta+1}$	$2\cdot 3^{\lambda+1}+3(-1)^{\lambda+1}+(-1)^{\theta+2}$
i	p	$3 - 1 = 2$	$2\cdot 3^{\lambda+1}+2$ (a)
i	i	$3 + 1 = 4$	$2\cdot 3^{\lambda+1}+4$ (b)
p	p	$-3- 1 = -4$	$2\cdot 3^{\lambda+1}-4$ (c)
p	i	$-3+ 1 = -2$	$2\cdot 3^{\lambda+1}-2$ (d)

Demostraremos que todos los casos (a, b, c y d) nos llevan a contradicción , lo que prueba el enunciado .

(a).- $2^{\theta+1} = 2\cdot 3^{\lambda+1} + 2$

$$2^\theta = 3^{\lambda+1} + 1$$

$$2^\theta = (2+1)^{\lambda+1} + 1$$

$$2^{\theta} = (2^{\lambda+1} + (\lambda+1)2^{\lambda} + \ldots + \frac{2^2(\lambda+1)\lambda}{2} + 2(\lambda+1)+1) + 1$$

$$2^{\theta} = 2^{\lambda+1} + (\lambda+1)2^{\lambda} + \ldots + 2(\lambda+1)\lambda + 2(\lambda+1) + 2$$

$$2^{\theta} = 2^{\lambda+1} + (\lambda+1)\, 2^{\lambda} + \ldots + 2[\lambda^2+\lambda+\lambda+1+1] \,,$$

todos los términos representados por los puntos suspensivos tienen factores que son potencias de dos , o sea , son <u>pares</u> .

$$2^{\theta} = 2^{\lambda+1} + (\lambda+1)\, 2^{\lambda} + \ldots + 2[(\lambda+1)^2+1]$$

$$2^{\theta-1} = 2^{\lambda} + (\lambda+1)2^{\lambda-1} + \ldots + (\lambda+1)^2 + 1 \,,$$

pero " $\lambda+1$ " es par , y así llegamos a la <u>contradicción</u> de que un número <u>par</u> $(2^{\theta-1})$ es igual a la suma de otro <u>par</u> $(2^{\lambda} + (\lambda+1)\, 2^{\lambda-1} + \ldots)$ y un <u>impar</u> (" 1 ") .

(b).- $2^{\theta} = 2\cdot 3^{\lambda+1} + 4$

$$2^{\theta} = 3^{\lambda+1} + 2$$

y nuevamente obtenemos una <u>contradicción</u> : un <u>par</u> (2^{θ}) es igual a la suma de otro <u>par</u> (2) , más un impar $(3^{\lambda+1})$.

(c).- $2^{\theta+1} = 2\cdot 3^{\lambda+1} - 4$

$$2^{\theta} = 3^{\lambda+1} - 2$$

lo cual es una <u>contradicción</u> : un <u>par</u> (2^{θ}) = un <u>par</u>

$(-2)+$ un impar $(3^{\lambda+1})$.

(d).- $2^{e+1} = 2\cdot 3^{\lambda+1} - 2 \rightarrow 2^{e} = 3^{\lambda+1} - 1$; pero $3 = 4-1$ $\therefore$

$$2^{e} = (4-1)^{\lambda+1} - 1 \text{ ; la expansión de } "(4-1)^{\lambda+1}"$$

tendrá " $\underline{\lambda+2}$ " ($\lambda+2$ es <u>par</u>) términos que serán alternativamente positivos y negativos . Todos serán pares , menos el último (-1) .

$$2^{e} = [4^{\lambda+1} - (\lambda+1)4^{\lambda} + \ldots + (-1)] + (-1)$$

$$2^{e} = [4^{\lambda+1} - (\lambda+1)4^{\lambda} + \ldots] - 2 \text{ ; la expansión}$$

es un número par , múltiplo de cuatro .

$$2^{e-1} = \frac{(4^{\lambda+1} - (\lambda+1)4^{\lambda} + \ldots)}{2} - 1 \text{ ; el primer suman-}$$

do es otro par múltiplo de 2 .

Y llegamos a otra <u>contradicción</u> porque un <u>par</u> sería igual a otro <u>par</u> más un <u>impar</u> (-1) .

En conclusión , las dos sucesiones NO tienen términos comunes , porque suponerlo nos lleva a <u>contradicción</u> EN CUALQUIER CASO .

(7) VIII OLIMPIADA DE LOS ESTADOS UNIDOS . Problema 5.

Resuelto por MARCOS LEDERMAN, Liceo Francés " Louis Pasteur " .

Cierta organización tiene n miembros $(n > 5)$ y tiene $n+1$ comités de tres miembros cada uno , sin que dos de estos comités tengan exactamente los mismos miembros . Demostrar que hay por lo menos dos comités que tienen exactamente un miembro en común .

Según el enunciado tenemos n miembros con los cuales se forman $(n+1)$ comités de 3 miembros cada uno .

Primero veamos por qué $n \geq 5$:

Con las n personas podemos formar C_n^3 comités de 3 miembros . Ese valor C_n^3 tiene que ser mayor o igual a $n+1$; ya que si fuese menor sería una contradicción con la hipótesis que los $n+1$ comités no pueden tener exactamente los mismos miembros . Entonces ,

$$C_n^3 \geq n+1 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - (n+1) \geq 0 \Leftrightarrow n^3-3n^2-4n-6 \geq 0$$

Poniendo $n = 4$, obtenemos $-6 \geq 0$ lo que es falso . En cambio si $n \geq 5$, $n^3-3n^2-4n-6 \geq 0$. Por consiguiente

$\boxed{n \geq 5}$.

Ahora veamos cuál es la probabilidad P de que al menos 2 comités tengan exactamente un miembro en común:

Sean P_1 la probabilidad de que cualquier comité no tenga ningún miembro en común con algún otro y P_2 la probabilidad de que tomados de dos en dos, dos comités tengan exactamente 2 miembros en común.

$$P = 1 - [P_1 + P_2]$$

$P_1 = 0$ ya que si tenemos n personas y (n+1) comités, forzosamente una persona pertenecerá a 2 comités diferentes.

$P_2 = 0$ ya que si un comité tiene 2 miembros en común con otro, y éste 2 con un tercero, éste tendrá a su vez 2 en común con el primero. Así que un cuarto comité tendrá que ser igual a uno de los 3 anteriores, lo que contradice la hipótesis que todos los comités son diferentes entre sí. Entonces:

$$P = 1 - 0 = 1$$

P es evento siempre cierto. Hay por lo menos 2 comités con exactamente un miembro en común.

(8) XVIII OLIMPIADA INTERNACIONAL. Problema 6.

Resuelto por HERBERT SUAREZ, Colegio Antonio Nariño.

Una sucesión $\{U_n\}$ está definida por

$U_0 = 2,\ U_1 = \frac{5}{2},\ U_{n-1} = U_n(U_{n-1}^2-2) - U_1$, para $n = 1,2,\ldots$

Demostrar que para todo entero positivo n,

$$\lfloor U_n \rfloor = 2^{(2^n-(-1)^n)/3}$$

Solución : Hallando los valores de la sucesión, tenemos:

$$U_0 = 2$$

$$U_1 = \frac{5}{2} \qquad\qquad = \frac{2^2+1}{2^1}$$

$$U_2 = U_1(U_0^2-2)-U_1 = \frac{5}{2}\,(2^2-2)-\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2^1}$$

$$U_3 = U_2(U_1^2-2)-U_1 = \frac{5}{2}\,((\tfrac{5}{2})^2-2)-\frac{5}{2} = \frac{65}{8} = \frac{2^6+1}{2^3}$$

$$U_4 = U_3(U_2^2-2)-U_1 = \frac{65}{3}\,((\tfrac{5}{2})^2-2)-\frac{5}{2} = \frac{1025}{32} = \frac{2^{10}+1}{2^5}$$

$$U_5 = U_4(U_3^2-2)-U_1 = \frac{1025}{8}\,((\tfrac{65}{8})^2-2)-\frac{5}{2} = \frac{4194305}{2043} = \frac{2^{22}+1}{2^{11}}$$

Las potencias de 2 en el denominador forman una sucesión : 1, 1, 3, 5, 11, ... donde el segundo término (1) es igual al doble del segundo (1) menos 1 ; el tercer término (3) es igual al doble del segundo (1) más uno , y así sucesivamente .

Esta sucesión tiene como término enésimo $\frac{2^n-(-1)^n}{3}$

para $n = 1, 2, \ldots$

La sucesión de las potencias de 2 en el numerador es el doble de las potencias de 2 en el denominador correspondiente , es decir : 2, 2, 6, 10, 22 .

Esta sucesión está definida por $2\left(\frac{2^n-(-1)^n}{3}\right)$ para $n = 1, 2, \ldots$

Entonces , el término enésimo de la sucesión (U_n) es

$$\frac{2^{2(2^n-(-1)^n)/3}+1}{2^{(2^n-(-1)^n)/3}} = \frac{2^{2(2^n-(-1)^n)/3}}{2^{(2^n-(-1)^n)/3}} + \frac{1}{2^{(2^n-(-1)^n)/3}}$$

$\dfrac{1}{2^{(2^n-(-1)^n)/3}}$ es la parte decimal de la sucesión

$\dfrac{2^{2(2^n-(-1)^n)/3}}{2^{(2^n-(-1)^n)/3}}$ es la función parte entera de la sucesión U_n, que simplificando es igual a

$2^{(2^n-(-1)^n)/3}$, entonces

$$[U_n] = 2^{(2^n-(-1)^n)/3}$$

(9) V OLIMPIADA NORTEAMERICANA . Problema 2.

Resuelto por NELSON MEDINA , Colegio Santo Tomás de Aquino .

Si A y B son dos puntos fijos de un círculo y XY es un diámetro variable del mismo círculo , determinar (con demostración) el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas AX y BY . Puede suponerse que AX no es un diámetro .

Solución

Para que el punto de intersección de AX y BY pertenezca al círculo " O " , X debe pertenecer al arco A'B . (Y por tanto , $Y \in \widehat{AB'}$)

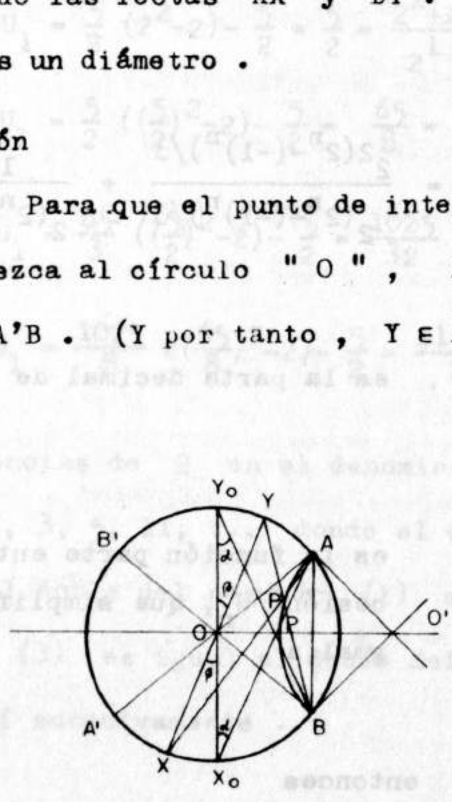


figura 1.

Teniendo en cuenta que $m \measuredangle OAO' = 90^o$ y $m \measuredangle O'BO = 90^o$, construyamos un arco de circunferencia $\widehat{AB}$, con radio $O'A$, y centro O'. Tracemos el diámetro X_oY_o, paralelo a $\overline{AB}$ (y, por tanto, $\widehat{BX_o} = \widehat{A'X_o} = \widehat{B'Y_o} = \widehat{Y_oA}$). El punto P de intersección de AX_o y BY_o, pertenece a la recta OO', demostremos que también pertenece al arco $\widehat{AB}$.

$$AO = OX_o = r \longrightarrow m \measuredangle PAO = \alpha \text{ , donde } \alpha = m \measuredangle AX_oY_o .$$

$$\longrightarrow \boxed{m \measuredangle O'AP = 90^o - \alpha}$$

Por otra parte,

$$m \measuredangle Y_oPX_o = 180^o - 2\alpha \longrightarrow m \measuredangle OPX_o = \frac{1}{2} m \measuredangle Y_oPX_o = 90^o - \alpha$$

$$\longrightarrow m \boxed{O'PA = 90^o - \alpha}$$

Y, como $m \measuredangle O'AP = m \measuredangle O'PA = 90^o - \alpha$ y a ángulos iguales se oponen lados iguales, entonces $O'A = O'P = O'B$, y P pertenece al círculo de centro O'. Ahora tomemos un ángulo δ cualquiera, que subtienda un arco X_oX y sea central. Entonces

$$m \measuredangle PAP' = \frac{1}{2} \widehat{XX_o} = \frac{1}{2} m \measuredangle X_oOX = \frac{\delta}{2} \longrightarrow \boxed{m \measuredangle PAP' = \frac{\delta}{2}} .$$

Además ,

$$m \sphericalangle P'BP = \frac{1}{2}\widehat{YY}_o = \frac{1}{2}\widehat{XX}_o = \frac{1}{2} m \sphericalangle X_oOX = \frac{\delta}{2} \longrightarrow$$

$$\boxed{m \sphericalangle PBP' = \frac{\delta}{2}} \quad .$$

Por lo tanto , en el cuadrilátero AP'PB tenemos que P'P subtiende ángulos iguales (de medida $\frac{\delta}{2}$) con A y B . Se sigue que AP'PB es concíclico , y , como por A , P y B pasa solo una circunferencia , P' pertenece al arco AB en la circunferencia de centro O' .

En resúmen , el lugar geométrico pedido es un arco de una circunferencia ortogonal al círculo dado , en los puntos A y B .