Boletín de Matemáticas
Vol. XV , No. 3 , (1981) pags, 146 - 161

LAS GEODESICAS DEL TORO

María Victoria GUTIERREZ .

Consideremos la superficie de revolución T que se obtiene haciendo girar el círculo C de radio 1 alrededor de un eje contenido en el mismo plano que contiene a C, de tal manera que su centro describe un círculo C_1 de radio $R > 1$.

T es llamado el toro.

Tomemos un origen O y una base de $\mathbb{R}^3$ tales que C_1 y C_2 tengan por ecuación

$$(x - R)^2 + z^2 = 1 , \quad y = 0$$

y

$$x^2 + y^2 = R^2 , \quad z = 0$$

respectivamente .

Entonces , las coordenadas de un punto P de T están dadas por :

$$x = (R + \cos\theta)\cos\varphi$$

$$y = (R + \cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$z = \text{sen}\,\theta$

donde θ y φ se muestran en la figura .

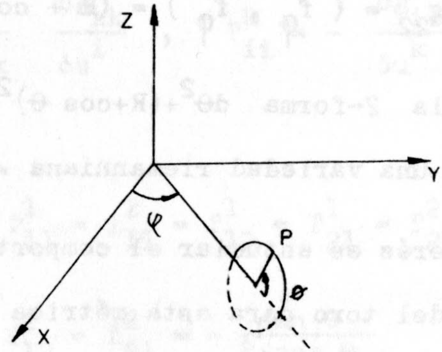

figura 1

T es una subvariedad de dimensión 2 de R^3.
En efecto , la aplicación

$f: (\theta,\varphi) \mapsto ((R+\cos\theta)\cos\varphi,\ (R+\cos\theta)\,\text{sen}\,\varphi,\ \text{sen}\,\theta)$

define un sistema de coordenadas en una vecindad de cualquier punto P de T , si se restringe adecuadamente el dominio de f para que sea un homeomorfismo local .

El plano tangente a T en un punto P de coordenadas (θ,φ) es el plano engendrado por los vectores

$$f_\theta(\theta,\varphi) = (-\text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ -\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ \cos\theta)$$

$$f_\varphi(\theta,\varphi) = (-(R+\cos\theta)\,\text{sen}\,\varphi,\ (R+\cos\theta)\cos\varphi,\ 0)$$

y las componentes g_{ij} de la métrica son :

$$g_{11} = (f_\theta , f_\theta) = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = (f_\theta , f_\varphi) = 0$$

$$g_{22} = (f_\varphi , f_\varphi) = (R + \cos\theta)^2$$

Es decir , g es la 2-forma $d\theta^2+(R+\cos\theta)^2\, d\varphi^2$.

(T,g) es entonces una variedad riemanniana .

Nuestro interés es estudiar el comportamiento de las geodésicas del toro para esta métrica g .

Las geodésicas en una variedad riemanniana se obtienen como las curvas solución del sistema de ecuaciones diferenciales .

$$(1) \quad \frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0 \quad k=1,2,\ldots n$$

donde n es la dimensión de la variedad .

(u^j) es un sistema de coordenadas y las constantes Γ^l_{ik} están dadas en términos de las derivadas de los coeficientes g_{ij} de la métrica g .

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} \sum_j g^{lj} \left(\frac{\delta g_{ij}}{\delta u^k} + \frac{\delta g_{jk}}{\delta u^i} - \frac{\delta g_{ki}}{\delta u^j} \right) .$$

g^{lj} denotan los coeficientes de la inversa de g .

$$\sum_k g^{lk} \; g_{kj} = \delta_{ij}$$

En el caso del toro , $g_{ij} = 0 \quad i \neq j$, luego

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} , \quad g^{ij} = 0 \quad i \neq j \quad \text{y}$$

$$\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2g_{kk}} \frac{\delta g_{kk}}{\delta u^i} , \quad \Gamma^k_{ii} = - \frac{\delta g_{ii}}{\delta u^k} \frac{1}{2g_{kk}}$$

Entonces ,

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \Gamma^2_{22} = 0 .$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = - \frac{\operatorname{sen}\theta}{R+\cos\theta}$$

$$\Gamma^1_{22} = (R+\cos\theta) \operatorname{sen}\theta .$$

y el sistema (1) queda entonces reducido al sistema :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + (R+\cos\theta) \operatorname{sen}\theta \left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} - 2 \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{R+\cos\theta} \dfrac{d\theta}{dt} \dfrac{d\varphi}{dt} = 0 . \end{cases}$$

El problema de hallar las geodésicas del toro para la métrica g se reduce a buscar las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (2) .

Una primera solución trivial del sistema es $\theta = C$, $\varphi = k$, C,k constantes , lo cual nos da las

geodésicas constantes , sin mayor interés .

Fácilmente se obtienen otras soluciones no triviales :

Para φ constante , $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = k_1$ y $\theta(t) = k_1 t + k_2$ donde los valores de k_1 y k_2 dependen de las condiciones iniciales ; estas geodésicas son los círculos meridianos del toro .

Para θ constante , el sistema (2) se reduce a :

$$(R+\cos\theta)\ \mathrm{sen}\,\theta\ \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$$

(3)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

Si $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, la solución es la solución trivial θ y φ constantes .

Sea entonces $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$. De la primera ecuación del sistema (3) tenemos que sen θ tiene que ser cero , ya que $R + \cos\theta \neq 0$. Luego , los únicos valores aceptables de θ son $\theta = n\pi$.

De la segunda ecuación del sistema (3) concluimos :

$$\varphi(t) = k_1\, t + k_2 \,.$$

Estas soluciones son los círculos interior y exterior del toro , correspondientes a los valores $\theta = \pi$ y $\theta = 0$ respectivamente .

Además de estas soluciones inmediatas , existen otras geodésicas cuyo compartimiento no es tan evidente como se quisiera . Estudiemos en detalle el sistema (2) .

Si en la segunda ecuación de (2) hacemos $z = \frac{d\varphi}{dt}$, la ecuación se transforma en :

$$z' - \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{R+ \cos \theta} \frac{d\theta}{dt} \; z = 0$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{R+\cos \theta} \; d\theta = - 2 \; d(\log(R+ \cos \theta))$$

Luego ,

(4) $$\frac{d\varphi}{dt} = z = \frac{k}{(R+\cos \theta)^2}$$

de lo cual se deduce que $\frac{d\varphi}{dt}$ tiene signo constante y por tanto φ es monótona .

Sustituyendo el valor de $\frac{d\varphi}{dt}$ en la primera ecuación de (2) se tiene :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (R+\cos \theta) \operatorname{sen} \theta \; \frac{k^2}{(R+\cos \theta)^4} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,\frac{k^2\ \mathrm{sen}\,\theta}{(R+\cos\theta)^3}\,\frac{d\theta}{dt}$$

Integrando la ecuación anterior tenemos :

$$(5)\qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{-\,k^2}{(R+\cos\theta)^2} + C\ .$$

Sean P un punto del toro con coordenadas (θ_o, φ_o) y $(\theta'_o\ ,\ \varphi'_o)$ un vector tangente en P . Entonces existe una y solo una geodésica $C(t)=(\theta(t),\varphi(t))$ tal que

$$\theta(t_o) = \theta_o \qquad \theta'(t_o) = \theta'_o$$

$$\varphi(t_o) = \varphi_o \qquad \varphi'(t_o) = \varphi'_o$$

Es decir , de acuerdo con (4) y (5) :

$$(\theta'_o)^2 = C - \frac{k^2}{(R+\cos\theta_o)^2}$$

(6)

$$\varphi'_o = \frac{k}{(R+\cos\theta_o)^2}$$

Supongamos que $\varphi'_o > 0$ y $\theta'_o > 0$. Entonces $\varphi'(t)$ es siempre positiva y $\theta'(t)$ es positiva en una vecindad del punto P . En esta vecindad se tiene entonces :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{C - \frac{k^2}{(R+\cos\theta)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{C}}{R+\cos\theta}\sqrt{(R+\cos\theta)^2 - \frac{k^2}{C}}$$

la cual es una ecuación diferencial de variables separables .

$$\frac{R+\cos\theta}{\sqrt{(R+\cos\theta)^2 - \frac{k^2}{C}}}\, d\theta = \sqrt{C}\, dt .$$

e integrando tenemos :

$$(7) \qquad \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R+\cos\theta}{\sqrt{(R+\cos\theta)^2 - \frac{k^2}{C}}}\, d\theta = (t - t_o)\sqrt{C}$$

Ahora bien , $(R - 1)^2 \leq (R + \cos\theta)^2$

lo cual nos lleva a considerar tres casos :

a) C y k son tales que

$$\frac{k^2}{C} < (R - 1)^2$$

Entonces

$$\frac{k^2}{C} < (R + \cos\theta)^2 \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt}$$

es siempre positivo . θ es entonces creciente y

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \infty$$

En este caso tanto θ como φ son crecientes y la geodésica se enrolla en el toro . (figura 2) .

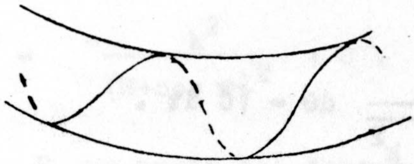

figura 2

b) C y k son tales que

$$\frac{k^2}{C} = (R - 1)^2 \ .$$

La ecuación (7) se convierte en :

$$(8) \qquad t - t_o = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R + \cos\theta}{\sqrt{(R+\cos\theta)^2-(R-1)^2}} \, d\theta \ .$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R + \cos\theta}{\sqrt{(2R+\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R + \cos\theta}{\sqrt{2R+\cos\theta-1}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

El denominador de la expresión bajo la integral se anula en $\theta = \pi$, luego la integral diverge .

$\theta(t)$ crece y $\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \pi$

Entonces la geodésica es asintótica al círculo $\theta = \pi$.

c) C y k son tales que

$$\frac{k^2}{C} > (R - 1)^2 .$$

Podemos suponer que $\theta_o = 0$ y $\theta'_o > 0$. θ crece a partir de θ_o hasta llegar a un valor θ_1 en el cual

$$\frac{k^2}{C} = (R + \cos\theta_1)^2 .$$

es decir ,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\Big|_{\theta = \theta_1} = - \frac{k^2}{(R+\cos\theta_1)^2} + C = 0$$

Al cabo de qué tiempo t_1 ésto va a ocurrir ?

Si reemplazamos en la integral el valor de C por $\frac{k^2}{(R+\cos\theta_1)^2}$ obtenemos :

$$t - t_o = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{R + \cos\theta}{\sqrt{(R+\cos\theta)^2-(R+\cos\theta_1)^2}}\, d\theta$$

$$(9) \qquad t - t_o = \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{(R+\cos\theta) \quad d\theta}{\sqrt{(2R+\cos\theta+\cos\theta_1)(\cos\theta - \cos\theta_1)}}$$

Puesto que $2R + \cos\theta + \cos\theta_1 \neq 0$ para todo θ, el denominador sólo se puede anular si se anula el término $\cos\theta - \cos\theta_1$.

Pero ,

$$\cos\theta - \cos\theta_1 = -2 \operatorname{sen}\frac{\theta - \theta_1}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta + \theta_1}{2}.$$

Entonces la integral que da el valor $t_1 - t_o$, donde t_1 es el tiempo para el cual se obtiene el valor de θ_1, es una integral del mismo tipo de

$$\int_{\theta_o}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \operatorname{sen}\frac{\theta_1 - \theta}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta + \theta_1}{2}}}$$

Si $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\theta + \theta_1}{2} \neq 0$ en el intervalo $[\theta_o, \theta_1]$ y la integral es del mismo tipo de

$$\int_{\theta_o}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta_1 - \theta}{2}}}$$

la cual - dado que el comportamiento de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$ es similar en una vecindad pequeña de cero - es del mismo tipo de

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_1 - \theta}}$$

que es una integral convergente .

Podemos entonces concluir que t_1 es un valor finito a partir del cual $\theta(t)$ decrece hasta un valor θ_2, $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, para un tiempo finito t_2 (por un razonamiento similar al anterior se puede ver que t_2 es efectivamente un valor finito) , a partir del cual $\theta(t)$ crece de nuevo , etc .

La geodésica en este caso oscila sin alcanzar los valores $\theta = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$

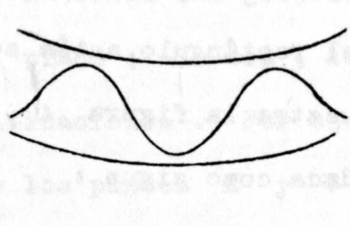

Figura 3

Si $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, la integral (9) se transforma en

$$(10) \quad \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R+\cos\theta}{\sqrt{(2R+\cos\theta)\cos\theta}} \, d\theta$$

y , la situación es análoga a la presentada para $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$. En efecto , (10) es del mismo tipo de

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}} \, d\theta$$

que es una integral convergente . t_1 es finito y la geodésica permanece del mismo lado del toro .

Es también corriente describir el toro como el espacio cociente que se obtiene a partir de un rectángulo de lados de longitud 2π y $2\pi R$ respectivamente , por la relación de equivalencia que identifica los lados opuestos del rectángulo . Es decir , si tomamos un sistema de coordenadas en el plano de tal manera que dos de los lados del rectángulo estén sobre los ejes coordenados como muestra la figura 4 , la relación de equivalencia está dada como sigue :

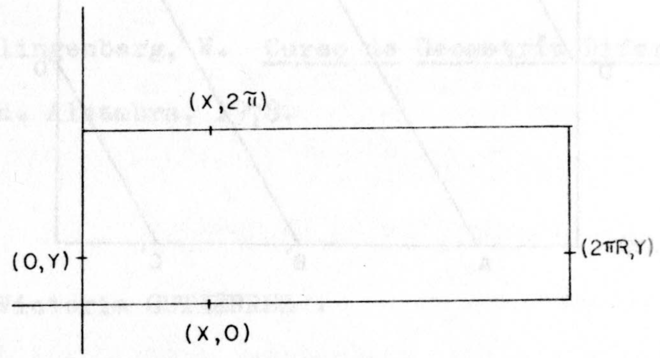

figura 4

Un punto de la forma $(x,0)$ se identifica con $(x,2\pi)$, un punto $(0,y)$ con $(2\pi R,y)$ y en los demás puntos del rectángulo la relación es la identidad .

Las dos descripciones nos dan la misma subvariedad de R^3 : el toro .

Supongamos ahora que la geometría del toro es la misma del plano . Entonces las geodésicas tienen que ser las geodésicas del plano ; - o sea , las rectas - con las respectivas identificaciones . Por ejemplo , tomemos la recta que pasa por los puntos A y B como se muestra en la figura :

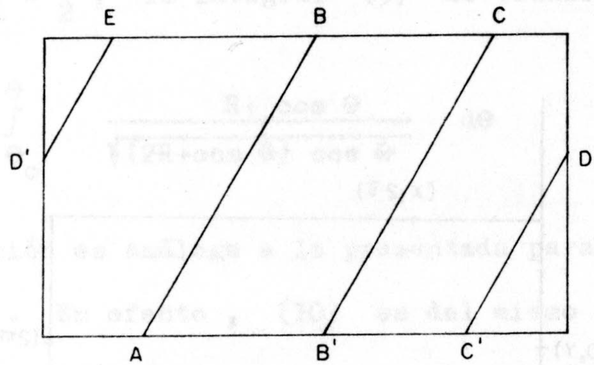

figura 5

El punto B se identifica con B' y la recta continúa en el segmento B'C ; el punto C se identifica con C' y la recta continúa en C'D , etc .

Las únicas posibles geodésicas en este caso son las curvas que se enroscan en el toro a la manera de las hélices circulares en el cilindro , los meridianos y los paralelos .

Es claro , entonces , que las dos superficies son esencialmente diferentes desde el punto de vista geométrico , aún cuando su estructura de subvariedad de $\mathbb{R}^3$ sea la misma . Ha cambiado la manera de medir los objetos sobre la superficie , es decir , la métrica g.

BIBLIOGRAFIA

1. Klingenberg, W. Curso de Geometría Diferencial. Ed. Alhambra, 1978.

María Victoria GUTIERREZ .
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional
Bogotá - Colombia .