Boletín de Matemáticas
Vol. XV , No. 3 , (1981) pags, 162 - 170

DE COMO SE CALCULA EL RADIO DE UN HUECO NEGRO

Ramón FANDIÑO ARBELAEZ

Con este artículo pretendemos mostrar una aplicación elemental de las ecuaciones diferenciales . Sabemos, por la ley de la gravitación universal de Newton , que los cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia centro a centro que separa dichos cuerpos .

La expresión matemática de dicha fuerza es :

$$F = G.m.M/r^2$$

G es la constante de Cavendish , su valor es $6{,}67 \times 10^{-20} km^3/kg.seg^2$.

Las masas m y M se dan en kilogramos y la distancia r en metros .

De tal manera que una masa m en la vecindad de otra más grande M está sometida a una aceleración gravitacional (gravedad) $g = F/m = G.M/R^2$. R es aquí el radio del cuerpo de masa M .

En primer lugar , estamos interesados en averiguar la velocidad inicial V_o que hay que imprimirle a una masa m para que ésta escape a la acción gravitacional de la masa M , o sea nos interesa la velocidad de escape . Veremos que ésta depende de M y de R más no de m , esto quiere decir que cada cuerpo celeste tiene su propia velocidad de escape .

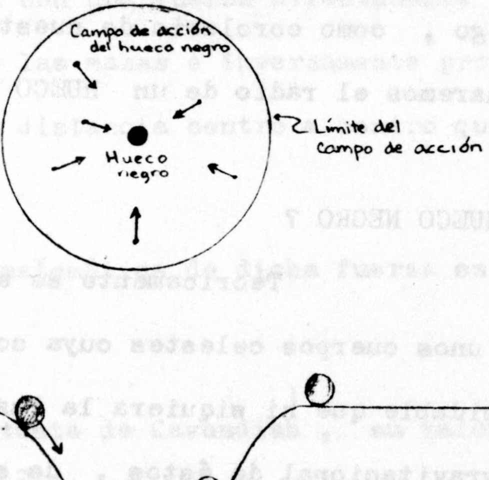
Luego , como corolario de nuestra primera inquietud averiguaremos el radio de un HUECO NEGRO .

QUE ES UN HUECO NEGRO ?

Teoricamente se estableció la posibilidad de unos cuerpos celestes cuya concentración de masa es tan formidable que ni siquiera la luz puede escapar de la acción gravitacional de éstos , de ahí el nombre de huecos negros . (Usando el modelo donde la luz , como paquete de fotones , tiene masa) .

La genesis de estos cuerpos no está comprobada pero parece ser que debido a un colapso gravitacional (algo así como un edificio que por su propio peso se desploma) , en un espacio relativamente pequeño (400 metros de radio) , se concentra una masa equivalente a la de nuestro sol .

Por su misma configuración y definición , en el campo de acción de un hueco negro necesariamemte existe el vacío absoluto igual al vacío que existe dentro de un átomo , entre las partículas constitutivas de éste . En efecto , cualquier cuerpo que se acerque al campo de acción del hueco negro es irremisiblemente aspirado por éste tal como el agua que se escurre por un sumidero . (a los huecos negros también los llaman sumideros) .



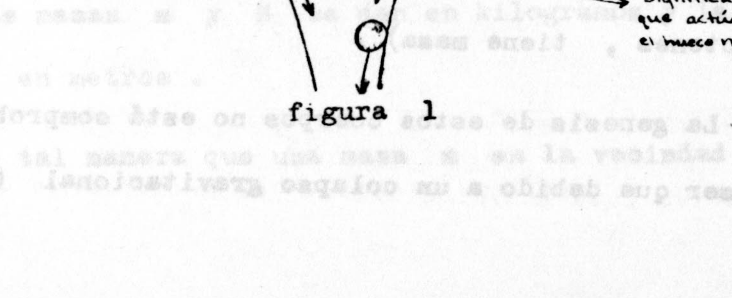


figura 1

VELOCIDAD DE ESCAPE

Ahora **conseguiremos una expresión para la velocidad de escape .**

Consideremos la figura :

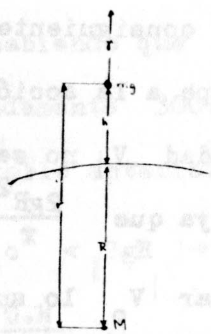


figura 2

La masa m se lanza con una velocidad inicial V_o . Sea δ la aceleración del movimiento ascensional .

Claramente $\delta = \delta(r) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{k}{r^2}$

Antes del movimiento , la masa se encuentra en reposo y $r = R$ $(h = 0)$

Luego $\delta(R) = -g = -G\dfrac{M}{R^2} = \dfrac{K}{R^2}$, de donde $K = -gR^2$

Luego $\delta(r) = \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{gR^2}{r^2} = \dfrac{d^2r}{dt^2}$, la aceleración δ es negativa pues la velocidad V es decreciente . Este conocido problema de ecuaciones diferenciales tiene la solución siguiente :

$$V^2 = \frac{2gR^2}{r} + V_o^2 - 2gR$$

Para que , después del lanzamiento vertical , la masa m no regrese y por consiguiente continúe su movimiento ascencional o sea escape a la acción gravitacional de M, se requiere que su velocidad V no se anule y para ésto , basta que $V_o^2 - 2gR \geq 0$ ya que $\frac{2gR^2}{r} > 0$ para todo r .

Se puede pues tomar V_o lo suficientemente grande como para que $V_o^2 - 2gR \geq 0$, ya que g y R son constantes propias del cuerpo M .

Por consiguiente la velocidad inicial V_o ó velocidad de escape debe ser del orden $V_o \geq \sqrt{2gR}$.

Como se puede observar , ésta no depende de m .

En el caso de la Tierra y sin tener en cuenta la resistencia que el aire opone al movimiento de los cuerpos, tenemos :

$$V_o \geq \sqrt{2 \times 9,81 \text{ m/seg}^2 \times 6.367.600 \text{ m}} \simeq 11,2 \text{ km/seg}$$

Quiere decir ésto , que si lanzamos verticalmente un cuerpo con una velocidad inicial de por lo menos 11,2 km/seg , éste nunca regresará . (A título de comparación recordemos que la velocidad de una bala de fusil es del orden de 0,8 km/seg.) .

EL RADIO DE UN HUECO NEGRO

Teniendo en cuenta la definición de estos cuerpos y sabiendo que c es la velocidad de la luz (c es aproximadamente 300.000 km/seg) , tenemos , de acuerdo al desarrollo anterior (velocidad de escape):

$$c < \sqrt{2gR} \rightarrow c^2 < 2gR \rightarrow R > \frac{c^2}{2g}$$

y como $g = \frac{G.M}{R^2}$,

tenemos : $$R > \frac{c^2}{2\frac{GM}{R^2}} \rightarrow R > \frac{c^2R^2}{2\,GM} \rightarrow 1 > \frac{c^2R}{2\,GM}$$

De donde : $$R < \frac{2\,GM}{c^2}$$

Explicamos en seguida este resultado :

Si una masa M logra concentrarse en un cuerpo esférico de radio menor que $2G.M/c^2$, se configura un hueco negro .

A título de ejemplo : Si se pudiera comprimir la Tierra (globo terraqueo) al tamaño de una esfera de 9 mm de radio , ésta sería un hueco negro .

En efecto :

$$R < \frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-20}\ km^3/kg\ seg^2 \times 6{,}07 \times 10^{24}\ kg}{(300.000\ km/seg)^2} =$$

$$= 8{,}9970888 \times 10^{-6}\ km$$

$R \leq 9$ mm   Radio Tierra = 6.367,6 km
Masa Tierra = $6{,}07 \times 10^{24}$ kg .

Un hueco negro con una masa equivalente a la de nuestro Sol (40.000 veces la de la Tierra) tendría un radio de 360 metros . (El sol tiene un radio de 695.500 km) .

GENESIS DE UN HUECO NEGRO :

SOL	MASA = 40.000 MASA TIERRA RADIO = 695.500 km

↓ SE COMPRIME (MILES DE AÑOS)

ENANA BLANCA	MASA SOL RADIO = RADIO TIERRA

↓ SE COMPRIME (MILES DE AÑOS)

ESTRELLA NEUTRONICA	MASA SOL RADIO = 15 km

↓ SE COMPRIME

HUECO NEGRO	MASA SOL RADIO = 360 m

BIBLIOGRAFIA

1. T. Aguekian. Estrellas, Galaxias y Metagalaxias Editorial Mir. 1974 . Moscú .
2. Astronomía de Larousse .
3. Lecturas sueltas : Diversas revistas , Cimpec OEA- Science et Vie - Scientific American .

Ramón FANDIÑO ARBELAEZ

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .