Boletín de Matemáticas
Vol. XVI No. 2 (1982) pags. 103 - 132

EL COMPLETADO DE UN CONJUNTO ORDENADO

Victor MEJIA

El propósito del presente artículo es mostrar, como a partir de un conjunto totalmente ordenado F, con dos puntos por lo menos, podemos llegar a obtener un conjunto X totalmente ordenado y completo, y luego dotarlo de la topología del orden, para que de esta manera satisfaga todas las propiedades, vistas en [4] de los espacios topológicos completos (con la topología del orden).

Al conjunto X lo llamaremos el completado del conjunto F. Estudiaremos algunas de las propiedades más sobresalientes de X y la relación que estas propiedades guardan con los conceptos topológicos ya conocidos.

Sea F un conjunto totalmente ordenado (por $\leq$) con dos elementos por lo menos. Sea F_o la familia de todos los subconjuntos de F que sean acotados superiormente . Tenemos entonces que F puede sumergirse en F_o, en el sentido de que si $a \in F$ entonces $\{a\} \in F_o$.

DEFINICION 1.

Sean C_1 y C_2 elementos arbitrarios de F_o. Si cualquier cota superior de C_1 es también cota superior de C_2, diremos que $C_2 \leq C_1$.

DEFINICION 2.

Sean C_1 y C_2 elementos arbitrarios de F_o. Diremos que C_1 es equivalente a C_2 y notaremos $C_1 \sim C_2$ si y solo si $C_1 \leq C_2$ y $C_2 \leq C_1$.

TEOREMA 3.

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia .

Podemos formar el conjunto $F_o/\sim$, que denotaremos por X, es decir, $X = F_o/\sim$.

De nuevo , aquí podemos decir que F está sumergido en X. En efecto : Si $a \in F$ entonces $\{a\} \in F_o$, luego $[\{a\}] \in X$, (como de costumbre ,

$[\{a\}]$ indica la clase de equivalencia del elemento $\{a\}$), y además si $a, b \in \mathbb{F}$ con $a < b$ entonces $[\{a\}] < [\{b\}]$.

Ahora en X podemos introducir un orden $\leq$, de la siguiente manera: Dados $[C_1]$ y $[C_2]$ en X, definimos

$$[C_1] \leq [C_2] \text{ si y solo si } C_1 \leq C_2 .$$

Es claro que la relación $\leq$, está bien definida y que establece un orden total en X.

TEOREMA 4.

Todo subconjunto no vacío de X acotado superiormente tiene extremo superior.

Demostración:

Sea $S \subseteq X$, S no vacío y acotado superiormente. Tenemos que $S = \{[C_\alpha]\}_{\alpha \in I}$, es decir, cada elemento de S es una clase de equivalencia. Como S es acotado superiormente, existe $[C] \in X$ tal que $[C_\alpha] \leq [C]$, para todo $\alpha \in I$. Sea $C_o = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$. Tenemos que $C_o \in \mathbb{F}_o$, y afirmamos que $[C_o] = \underline{\text{Sup}}\, S$. En efecto: 1)

$[C_\alpha] \leq [C_o]$ ya que $C_\alpha \leq C_o$, para todo α, y

2) Si existe $[C^+] \in X$ tal que $[C^+]$ es una cota superior de $\{[C_\alpha]\}_{\alpha \in I}$, entonces $C_\alpha \leq C^+$, para todo α. Es decir, cualquier cota superior M de C^+ es cota superior de C_α, para todo α pues, M es mayor que todos los elementos de C_α para todo α, y por lo tanto, M es mayor que todos los elementos de C_o. Luego M es una cota superior de C_o, y así tenemos que $C_o \leq C^+$; concluímos que

$$[C_o] \leq [C^+].$$

DEFINICION 5.

El conjunto $X = F_o/\sim$ se llama el <u>completado</u> de F.

Es importante notar que X es consistente (con respecto al orden) con F, es decir, $a \leq b$ si y solo si $[\{a\}] \leq [\{b\}]$.

TEOREMA 6.

Sea B un subconjunto de X, no vacío y acotado inferiormente, entonces B tiene extremo <u>inferior</u>.

Demostración

Sea $A = \{a \in X \mid a$ es una cota inferior de $B\}$. Se tiene que $A \neq \emptyset$ y A es acotado superiormente , luego el Sup A existe . Llamemos Sup $A = \alpha$. Afirmamos que $\alpha = \text{Inf } B$. En efecto : supongamos que α no es cota inferior de B ; entonces existe $b \in B$ tal que $b < \alpha$ y por el Lema 1.1 , existe $a \in A$ tal que $b < a \leq \alpha$. Pero a es cota inferior de B y $b \in B$, por lo tanto $a \leq b$ (absurdo) . Por lo tanto , α es cota inferior de B . Ahora si c es cota inferior de B , entonces $c \in A$, luego $c \leq \alpha$. Por lo tanto α es la mayor de las cotas inferiores . De esta manera , concluímos que $\alpha = \text{Inf } B$.

Ahora si $S \subseteq X$ y no es acotado superiormente escribiremos que Sup $S = \infty$ y si S no es acotado inferiormente escribiremos que Inf $S = -\infty$. Es inmediato el siguiente

Corolario

El completado $\bar{X}$ de F, es un conjunto completo.

Nuestro propósito inmediato , es demostrar que $\bar{X}$

es el conjunto completo más pequeño, que contiene a F. Con este fin, enunciamos dos Lemas, el primero de los cuales es obvio y, por lo tanto, no damos la demostración.

LEMA 7.

Sea $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de conjuntos totalmente ordenados y tal que $F_\lambda \supseteq F$ y cada F_λ es completo, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ es completo.

LEMA 8.

Sea x en X, entonces existe $S \subseteq F$, con S acotado superiormente en X y tal que $x = [S]$. Además, como se puede considerar a S como un conjunto de puntos de X, es decir, $S = \{[\{y\}] \mid y \in S\}$, tenemos que $\operatorname{Sup} S = x = [S]$.

Demostración

i) Notemos que S es acotado superiormente en X por $x = [S]$. En efecto : si M es cota superior de S (en X) entonces $y \leq M$, para todo $y \in S$, luego $\{y\} \leq S$, para todo $y \in S$, esto es $[\{y\}] \leq [S]$ para todo $y \in S$. Así que

$S \leq [S]$.

ii) Supongamos que $[T]$ (con $T \subseteq \mathbb{F}$) es cota superior de S, o sea $S \leq [T]$, esto es $[\{y\}] \leq [T]$ para todo $y \in S$, o sea toda cota superior de T es cota superior de $\{y\}$, para cualquier $y \in S$. Así, toda cota superior de T es cota superior de S y por lo tanto $[S] \leq [T]$. Luego $\operatorname{Sup} S = x = [S]$.

Concluímos por lo tanto que para cualquier a en X, existe $S \subseteq \mathbb{F}$ tal que $a = \operatorname{Sup} S = [S]$. Este hecho lo utilizaremos en la demostración del siguiente teorema :

TEOREMA 9.

El conjunto X obtenido a partir de $\mathbb{F}$ es el conjunto completo más pequeño que contiene a $\mathbb{F}$.

Demostración

Supongamos que $\mathbb{F}_1$ es un conjunto completo tal que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_1 \subseteq X$ (se puede tomar de esta forma por el Lema 7). Vamos a demostrar que $\mathbb{F}_1 = X$. Basta ver que $X \subseteq \mathbb{F}_1$. Sea $a \in X$, entonces existe $S \subseteq \mathbb{F}$ tal que $a = [S] = \operatorname{Sup} S$ (en X). Supongamos que $a \notin \mathbb{F}_1$. Como $S \subseteq \mathbb{F}_1$ y $\mathbb{F}_1$ es completo, entonces Sup S existe y está en $\mathbb{F}_1$. Sea $b = \text{Sup } S$ (en $\mathbb{F}_1$). Entonces $b \in \mathbb{F}_1$ y como $\mathbb{F}_1 \subseteq X$, entonces $b \in X$, luego existe un subconjunto T de $\mathbb{F}$, acotado superiormente y tal que $b = [T] = \text{Sup } S$. Ahora, para todo $y \in S$ se tiene que

$$[\{y\}] \leq [T] = \text{Sup } S, \text{ luego } [S] \leq [T].$$

Por otra parte, sea $M \in \mathbb{F}$ una cota superior de S, entonces si M no es cota superior de T, existe $z \in T$ tal que $M < z$. Entonces tenemos

$$[S] \leq [\{M\}] < [\{Z\}] \leq [T]$$

Pero $[\{M\}] \in \mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}_1$, luego $[\{M\}] \in \mathbb{F}_1$. Como $\text{Sup } S = [T]$ en $\mathbb{F}_1$, entonces $[T]$ es la menor de las cotas superiores de S en $\mathbb{F}_1$ y además tenemos que $[\{M\}]$ es cota superior de S con $[\{M\}] < [T]$, lo cual es absurdo.

Estudiamos ahora la "adherencia" de cualquier <u>sub</u>conjunto S de X. Como no se ha dotado a X de ninguna topología (en particular, de la topología del orden, que es la que nos interesa), debemos dar una definición adecuada de "adherencia", basándonos en los conceptos de que disponemos . La definición de manera natural , debe ser consistente con el concepto de adherencia o clausura en espacios topológicos , en el sentido de que dicha definición debe satisfacer todas las propiedades principales que caracterizan a la adherencia .

DEFINICION 10.

Sea S un subconjunto de X . Definamos

$$S^c = S \cup \{ \operatorname{Sup} A \mid A \subseteq S \} \cup \{ \operatorname{Inf} B \mid B \subseteq S \}$$

En esta definición , S^c se llamará la adherencia de S . También es claro que en la definición de S^c debemos considerar todos aquellos subconjuntos A y B de S para los cuales $\operatorname{Inf} B$ y $\operatorname{Sup} A$ existen , es decir aquellos subconjuntos no vacíos de S , acotados superiormente o inferiormente . En seguida enunciamos un teorema , en el cual se estudian todas las propiedades de la adherencia S^c , de un conjunto S .

TEOREMA 11.

Sea $S \subseteq X$. Entonces la adherencia S^c de S goza de las siguientes propiedades .

1) $S \subseteq S^c$

2) S es completo si y solo si $S = S^c$.

3) S^c es completo.

4) S^c es el conjunto completo más pequeño que contiene a S, es decir,

$$S^c = \cap \{ F \mid F \text{ es completo y } F \supseteq S \}.$$

5) Si $A \subseteq B$ entonces $A^c \subseteq B^c$, donde A y $B \subseteq X$.

6) $(S^c)^c = S$.

7) Si A y B son subconjuntos de X, entonces $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

8) $\varphi^c = \varphi$.

9) Si $S \subseteq X$ y S es acotado superiormente, entonces S^c tiene máximo.

Demostración

1) Es claro.

2) Supongamos que S es completo; basta ver que $S^c \subseteq S$. Sea $x \in S^c$, entonces $x \in S$ ó existe $A \subseteq S$, no vacío y acotado superiormente tal que $x = \operatorname{Sup} A$, ó, existe $B \subseteq S$, no vacío y acotado inferiormente tal que $x = \operatorname{Inf} B$. Si $x \in S$, queda demostrado. Si

$x = \text{Sup}\, A$, ó , si $x = \text{Inf}\, B$, como S es completo , se tiene que $x \in S$.

Ahora supongamos que $S = S^c$ y sea $A \subseteq S$, A no vacío y acotado superiormente , entonces $A \subseteq X$ y A es acotado superiormente en X , por lo tanto $\text{Sup}\, A = b$ existe con b en X . Pero como $A \subseteq S$, entonces $\text{Sup}\, A \in S^c$ y por tanto $\text{Sup}\, A \in S$. Luego S es completo .

Nótese que , dado 2) , la adherencia de X es X , puesto que X es completo .

3) S^c es completo . En efecto : sea $A \subseteq S^c$, donde A es acotado superiormente en X . Por definición de S^c , una cota superior debe pertenecer a S^c . Entonces $A = B \cup C \cup D$, donde $B \subseteq S$, y C es un conjunto formado por algunos puntos que son extremos superiores de subconjuntos de S , y D es un conjunto formado por algunos puntos que son extremos inferiores de subconjuntos de S . Consideremos el caso general en el cual $B \neq \phi$, $C \neq \phi$ y $D \neq \phi$. Tenemos que B , C y D son acotados superiormente en S^c (y por lo tanto en X), luego $\text{Sup}\, B$, $\text{Sup}\, C$ y $\text{Sup}\, D$ existen , y , además , $\text{Sup}\, A$ es igual a uno de los valores $\text{Sup}\, B$ ó $\text{Sup}\, C$ ó $\text{Sup}\, D$. Estuadiamos cada caso :

i) Si $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Sup} B$ entonces $\operatorname{Sup} A \in S^{c}$

ii) Supongamos que $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Sup} C$; como

$C = \{\operatorname{Sup} E \mid E \subseteq S\}$, sea entonces

$M = \cup\{E \mid \operatorname{Sup} E \in C\}$, entonces $M \subseteq S$, $M \neq \varphi$ y M es acotado superiormente , porque si $z \in M$ entonces $z \in E$ para algún $E \subseteq S$, entonces $z \leq \operatorname{Sup} E \leq \operatorname{Sup} C$, por lo tanto $\operatorname{Sup} C$ es una cota superior de M . Se deduce que $\operatorname{Sup} M$ existe y afirmamos que $\operatorname{Sup} M = \operatorname{Sup} C$. Para demostrar esta última afirmación , solo nos resta mostrar que $\operatorname{Sup} C$ es la menor de las cotas superiores de M ; para esto, sea y tal que $y \geq x$ para todo x en M ; pero $x \in E$ para algún $E \in M$, entonces $y \geq a$ para todo $a \in E$, entonces $y \geq \operatorname{Sup} E$, cualquiera sea $E \in M$, entonces $y \geq c$, para todo $c \in C$, luego $y \geq \operatorname{Sup} C$; por lo tanto $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Sup} C = \operatorname{Sup} M \in S^{c}$.

iii) Supongamos que $\operatorname{Sup} A = \operatorname{Sup} D$. Sea $x \in D$ y $x \notin S$, entonces existe $D_x \subseteq S$ con $x = \operatorname{Inf} D_x$. Entonces ocurren los siguientes casos :

a) Si todo elemento de D_x es una cota superior de D , entonces $x = \operatorname{Sup} D = \operatorname{Inf} D_x$, con $D_x \subseteq S$, entonces

$$\text{Sup } D = \text{Inf } D_x \in S^c$$

b) Si no, existe $y_x \in D_x$ tal que y_x no es cota superior de D.

Sea $N = \{ y_x \in D_x \mid x \in D \}$.

Tenemos $N \subseteq S$, $N \neq \varphi$ y N es acotado superiormente por $\text{Sup } D$, por lo tanto $\text{Sup } N$ existe y afirmamos que $\text{Sup } N = \text{Sup } D$. En efecto: sea $y_x \in N$, arbitrario, entonces $y_x \in D_x$ y y_x no es cota superior de D entonces $y_x \leq \text{Sup } D$.

Ahora supongamos que $z \geq y_x$ para todo $y_x \in N$. Si se cumple que $\text{Sup } D > z$, entonces existe x en D tal que $z < x \leq \text{Sup } D$. Para dicho x, existe $y_x \in D_x$ y y_x no es cota superior de D y $x = \text{Inf } D_x$. Tenemos entonces $y_x \geq x > z$, lo cual contradice la hipótesis $z \geq y_x$ para todo $y_x \in N$. Por lo tanto debemos tener: $\text{Sup } D \leq z$. De esto concluímos que

$$\text{Sup } A = \text{Sup } D = \text{Sup } N \in S^c$$

Así queda demostrado que S^c es completo.

Las demostraciones de los demás apartes del teorema se dejan al lector.

SEPARABILIDAD

Antes de introducir el concepto de separabilidad, hablamos rápidamente del concepto de límite de una sucesión de elementos de X, puesto que en el estudio de la separabilidad, utilizaremos el concepto de sucesión. Empezamos pues, dando la definición de límite de una sucesión creciente.

DEFINICION 12.

Sea $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ una sucesión creciente y acotada de elementos de X. Diremos que la sucesión $\{a_n\}$ <u>converge</u> si existe $a_o \in X$ tal que $a_n < a_o$, para todo n, y si $a_n < b$ para todo n, entonces $a_o \leq b$.

El elemento a_o se llama el <u>límite</u> de la sucesión $\{a_n\}$ y se nota

$$a_o = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Nota

Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existe. En efecto, si tomamos $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$, entonces $S \subseteq X$, y S es acotado superiormente , luego Sup S existe . Es claro que

$$\text{Sup } S = \lim_{n \to \infty} a_n$$

De manera análoga se define $\lim_{n \to \infty} a_n$, para sucesiones $\{a_n\}$ decrecientes y acotadas , las cuales también convergen .

DEFINICION 13.

Se dice que un conjunto totalmente ordenado F es <u>separable</u> si existe un subconjunto D de F, numerable y denso en F .

Hasta ahora hemos visto , que dado F se puede hallar su completado X , en el cual se satisface la completez . Sin necesidad de construir el completado X de F , podemos hacer que en F se satisfaga la completez , si se le agregan a F las condiciones de separabilidad y la convergencia de toda sucesión decreciente (o creciente) y acotada .

Para demostrar esta afirmación necesitamos primero un lema .

LEMA 14.

Sea $S \subseteq F$, contable y acotado superiormente.

Si toda sucesión creciente y acotada de elementos de F converge , entonces existe $\operatorname{Sup} S$.

Demostración

$$\text{Sea } S = \{ S_n \mid k \in \mathbb{N} \}.$$

Supongamos que S no tiene máximo (si no , el máximo de S es igual al $\operatorname{Sup} S$) .

Sea

$$S_1 = \{ x \in S \mid x > s_1 \} \neq \varphi . \text{ Sea } s_{n(1)} \in S_1$$

Ahora

$$S_2 = \{ x \in S_1 \mid x > s_2 \text{ y } x > s_{n(1)} \} \neq \varphi$$

Sea

$$s_{n(2)} \in S_2 \quad \text{y sea}$$

$$S_3 = \{ x \in S_2 \mid x > s_3 \text{ y } x > s_{n(2)} \} \neq \varphi$$

Sea $s_{n(3)} \in S_3$ y continuamos el proceso indefinidamente , entonces obtenemos una sucesión $\{ s_{n(k)} \}_k$, que es creciente y acotada superiormente , entonces por hipótesis existe $\lim_{k \to \infty} s_{n(k)} = s_o$. Evidentemente $s_o > s_n$ para todo n , luego s_o es cota superior de S .

Si t es cota superior de S , se tiene que

$t \geq S_{n(k)}$, para todo k, así que

$$t \geq \lim_{k \to \infty} S_{n(k)} = S_o .$$

Esto comprueba que $s_o = \text{Sup } S$.

TEOREMA 15.

Sea F un conjunto totalmente ordenado y separable y $S \subseteq F$ acotado superiormente. Si toda sucesión creciente y acotada de elementos de F converge, entonces existe Sup S.

Demostración

Supongamos que $D = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en F. Supongamos que S no tiene máximo (si no, el máximo de S es igual al Sup S).

Dado $a \in S$, existe $b \in S$ con $a < b$. Ahora como $b \in S$, existe $c \in S$ tal que $b < c$. Consideramos el intervalo abierto (a,c); se tiene que (a,c) es una vecindad de b, por tanto existe un $d_a \in D$ tal que $d_a \in (a,c)$. El conjunto $S_o = \{d_a \mid a \in S\}$ es contable y acotado superiormente, entonces por Lema 14, existe

$$\text{Sup } S_o = \text{Sup}\{d_a \mid a \in S\} = \lambda .$$

Se tiene que $\lambda \geq d_a > a$ para todo $a \in S$. Luego λ es cota superior de S. Por otra parte, si y es una cota superior de S, entonces $y \geq c$, para todo $c \in S$, y así $y \geq d_a$, para todo $a \in S$, esto es $y \geq \operatorname{Sup} \{ d_a \mid a \in S \} = \operatorname{Sup} S_o = \lambda$. Por lo tanto

$$\operatorname{Sup} S = \lambda .$$

TEOREMA 16

Sea F totalmente ordenado. Entonces toda sucesión $\{ a_n \}$ de elementos de F contiene una subsucesión monótona.

Demostración

Supongamos que $\{ a_n \}$ no contiene ninguna subsucesión creciente. Entonces hay un primer índice k tal que $a_{k+j} < a_k$ para todo $j \geq 1$. Hacemos $a_{n_1} = a_k$ y consideramos todos los términos $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \ldots$. De nuevo, como $\{ a_n \}$ no contiene subsucesiones crecientes hay un primer índice $k > 1$ tal que $a_{n_1 + k + j} \leq a_{n_1 + k}$ para cada $j \geq 1$.

Hacemos $a_{n_2} = a_{n_1+k}$ y consideremos los términos $a_{n_2+1}, a_{n_2+2}, \ldots$, para determinar a_{n_3}, etc.

La subsucesión infinita $\{ a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots \}$ es decreciente .

TEOREMA 17.

Sea S un subconjunto de X, entonces $S^c = \overline{S}$.

Demostración

Veamos primero que $\overline{S} \subseteq S^c$. Sea $p \in \overline{S}$, entonces $p \in S$ ó $p \in S'$, si $p \in S$, está probado . Si $p \in S'$ y $p \notin S$, entonces siempre será verdadero uno de los siguientes casos :

i) $T = (-\infty, p) \cap S \neq \emptyset$ ó

ii) $V = (p, \infty) \cap S \neq \emptyset$

Supongamos que ocurre el caso i) ; para el caso ii) se procede de manera análoga .

Como $T \neq \emptyset$, sea $q \in T$, entonces $q < p$ y $q \in S$. Sea $A = [q, p] \cap S$. Se tiene que $A \subseteq S$ y $A \neq \emptyset$; $(q \in A)$.

El conjunto A es acotado superiormente (por p), luego Sup A existe y Sup $A \leq p$. Si Sup $A = p$, queda probado . Si Sup $A = \alpha < p$ entonces no existe ningún punto x en S tal que $\alpha < x < p$ (+). Porque si existiera x en S con $\alpha < x < p$, entonces $q \leq \alpha < x < p$ luego $x \in (q,p) \cap S \subseteq A$ y así se tendría x en A con $x > \alpha = \operatorname{Sup} A$, lo cual es absurdo. Sea $O = (\alpha, \infty)$. Entonces $p \in O$ (pues $p > \alpha$) y como O es abierto y p es un punto de acumulación, O tiene puntos x de S distintos de p, por tanto estos puntos x tienen que ser mayores que p [ver (+)]. Sea $B = (p, \infty) \cap S$ entonces $B \subseteq S$ y $B \neq \emptyset$. Afirmamos que $p = \operatorname{Inf} B$. En efecto: p es cota inferior de B y si δ es otra cota inferior de B con $\delta > p$, entonces para todo x en B, $x \geq \delta$. Consideremos el abierto $O_1 = (\alpha, \delta)$. Como $\alpha < p < \delta$, se tiene que $p \in O_1$, por tanto O_1 debe contener puntos de S distintos de p. Sea $v \in O_1 \cap S$ con $v \neq p$, entonces $\alpha < v < \delta$ y $v \in S$. Pero $\alpha < v < p$ no ocurre [ver (+)], luego $v > p$, por tanto $v \in (p, \infty)$ y $v \in S$; entonces $v \in B$ con $v < \delta$, lo cual es absurdo, pues δ es cota inferior de B. Concluímos por tanto que $p = \operatorname{Inf} B$. Resumiendo tenemos que o $p \in S$ ó $p = \operatorname{Sup} A$, donde $A \neq \emptyset$, $A \subseteq S$ y A es acotado superiormente ó $p = \operatorname{Inf} B$, donde $B \neq \emptyset$, $B \subseteq S$ y B es acotado inferiormente. En cualquier caso se tiene que $p \in S^c$.

Ahora vemos que $S^c \subseteq \overline{S}$. Sea $p \in S^c$, entonces $p \in S$, ó $p = \text{Sup } A$, para algún $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente , ó , $p = \text{Inf } B$, para algún $B \subseteq S$, $B \neq \emptyset$ y acotado inferiormente . Si $p \in S$, entonces $p \in \overline{S}$. Si $p = \text{Sup } A$, tomemos cualquier conjunto abierto O que contenga a p ; como O es la unión de intervalos abiertos disyuntos , existe un intervalo abierto contenido en O y tal que $p \in O$; luego basta estudiar el caso cuando O es de la forma (c,d) con p en (c,d) . Sea entonces (c,d) un intervalo arbitrario tal que $p \in (c,d)$. Afirmamos que existe $x \in A$ tal que $x > c$, porque si para todo $x \in A$, se tiene que $x \leq c$, entonces c sería una cota superior de A y $c < p = \text{Sup } A$ (absurdo) . Por lo tanto , existe x en A tal que $x > c$. Como $x \in A$ entonces $x < p < d$, luego $x \in (c,d) \cap A \subseteq (c,d) \cap S$. Por lo tanto cualquier abierto que contenga a p , contiene puntos de S distintos de p .

Además de estas propiedades que satisface el completado X, cumple también todas las propiedades topológicas estudiadas en el artículo "Ciertos tópicos de la topología del orden" , porque como lo habíamos dicho antes , hemos supuesto que X está dado de la topología del orden .

En lo que sigue , que es una especie de apéndice, dotamos a X de una propiedad adicional que es muy parecida a la propiedad de densidad . Utilizando esta propiedad demostramos que X no es numerable y concluímos este artículo , viendo la relación que existe entre X (dotado de esta propiedad) y los números reales .

Supongamos entonces , que X satisface la propiedad adicional :

(P) Si $a, b \in X$ con $a < b$, entonces existe $c \in X$ tal que

$$a < c < b .$$

TEOREMA 18.

La propiedad anterior (P) es equivalente a

(P.1) Para todo $a \in X$, tenemos que

$\operatorname{Sup} \{ x \in X \mid x < a \} = a$.

Demostración

(P) $\Rightarrow$ (P.1) . En efecto : Sea $a \in X$ y consideremos el conjunto $A = \{ x \in X \mid x < a \}$.

Tenemos que A es acotado superiormente, luego $\operatorname{Sup} A$ existe, y afirmamos que $\operatorname{Sup} A = a$. En efecto: i) a es cota superior de A y ii) si b es otra cota superior de A con $b < a$, existe $c \in X$ tal que $b < c < a$; como $c < a$, entonces $c \in A$ y $c > b$, lo cual es absurdo, pues b es cota superior de A. Por lo tanto tenemos que $b \geq a$ y así $a = \operatorname{Sup} A$.

Veamos ahora que $(P.1) \Rightarrow (P)$. Sean $a, b \in X$ con $a < b$.

Consideremos el conjunto $B = \{x \in X \mid x < b\}$; entonces $a \in B$ y $\operatorname{Sup} B = b$. Si para todo $c \in B$ se tuviera que $c \leq a$, entonces a sería cota superior de B, lo cual es absurdo, pues b es la menor cota superior. Por lo tanto, existe un $c \in B$ tal que $a < c$ y como $b = \operatorname{Sup} B$ y $b \notin B$, entonces $c < b$, es decir, existe $c \in X$ tal que $a < c < b$.

TEOREMA 19.

La propiedad (P) es equivalente a:

(P.2) Para todo $a \in X$, tenemos que

$\operatorname{Inf} \{x \in X \mid a < x\} = a$.

Demostración

Análoga a la del Teorema anterior .

TEOREMA 20.

Sean $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2 , b_2]$,... una sucesión de intervalos cerrados tal que

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ....$ (con $a_i , b_i \in X$)

entonces existe un punto común a todo intervalo I_i .

Demostración

Como $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$, entonces $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...,$ y , ... , $b_3 \leq b_2 \leq b_1$.

Afirmamos que $a_m < b_n$ para todo m, n $\in \mathbb{N}$. Porque si $m > n$, entonces $a_m < b_m \leq b_n$ y si $m \leq n$ entonces $a_m \leq a_n < b_n$. Así cada b_n es una cota superior para $A = \{ a_1, a_2, a_3, ..., \}$, luego Sup A existe . Sea $p = \text{Sup } A$, entonces $p \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, puesto que cada b_n es una cota superior para A y p es la menor de las cotas superiores . Además $a_n \leq p$, para todo $n \in \mathbb{N}$, puesto que p es una cota superior para $A = \{ a_1, a_2, a_3, ..., \}$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_n \leq p \leq b_n$, por lo tanto $p \in I_n = [a_n, b_n]$. Se concluye así que p es un pun to común a todo intervalo .

TEOREMA 21.

Supongamos que X goza de la propiedad (P). Entonces X no es numerable .

Demostración

Sea $A = [a,b] \subseteq X$, con $a,b \in X$ y $a < b$.

Supongamos que A es numerable . Enumeramos los elementos de A como $A = \{ x_1, x_2, x_3, \dots , \}$. Construímos una sucesión de intervalos así : como $a < b$, existe c tal que $a < c < b$ y existe d tal que $a < c < d < b$. Consideramos los tres subintervalos cerrados de $[a,b]$

$$[a,c] \quad , \qquad [c,d] \quad , \qquad [d,b] \qquad (1)$$

Se tiene que x_1 no puede pertenecer a los tres subintervalos . (Si x_1 es uno de los puntos extremos entonces pertenece a dos intervalos) .

Sea $I_1 = [a_1, b_1]$ uno de los intervalos de (1) tal que $x_1 \notin I_1$. Como $a_1 < b_1$, existe c_1 y d_1 tal que $a_1 < c_1 < d_1 < b_1$.

Consideramos los tres subintervalos cerrados de $I_1 = [a_1, b_1]$

$$[a_1, c_1] \quad , \quad [c_1, d_1] \quad , \quad [d_1, b_1] \qquad (2)$$

Similarmente sea I_2 uno de los intervalos de (2) con la propiedad de que $x_2 \notin I_2$. Continuamos de esta manera, y así obtenemos una sucesión de intervalos cerrados.

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \qquad (3)$$

tal que $x_n \notin I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pero por el Teorema anterior, existe $y \in [a,b]$ tal que y pertenece a todo intervalo de (3). Como $y \in A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, \}$, entonces $y = x_m$, para algún m. Pero por nuestra construcción $y = x_m \notin I_m$ lo cual contradice el hecho de que y pertenece a todo intervalo de (3). Luego A no es numerable, y por consiguiente X no es numerable.

Para finalizar este artículo veamos qué relación podemos establecer entre X y el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Se puede ver que hay una correspondencia uno a uno entre X y $\mathbb{R}$, si X no es acotado superior ni inferiormente y si lo dotamos de la condición de separabilidad y de la propiedad (P) , vistas anteriormente .

Para probar esta última afirmación , tomamos $a,b \in X$ arbitrarios con $a < b$ y sea $\{x_n\}$ un conjunto contable denso en $[a,b]$.

Sean x_{k_1} entre a y b con subíndice mínimo .

x_{k_2} entre x_{k_1} y b con subíndice mínimo .

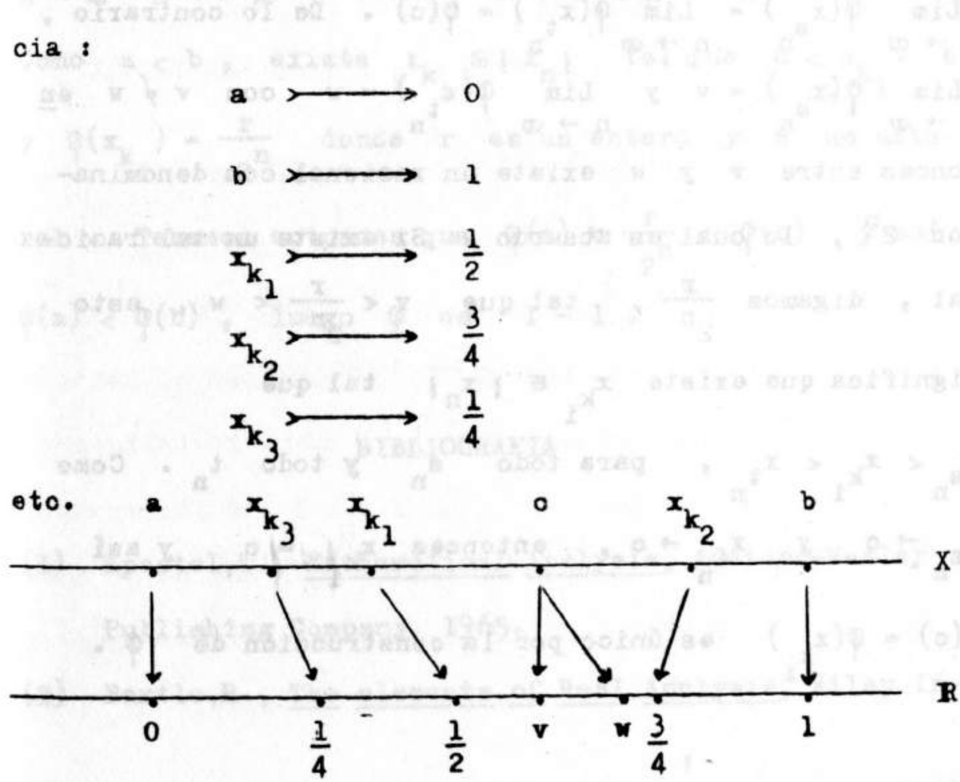
x_{k_3} entre a y x_{k_1} con subíndice mínimo

etc .

En seguida establecemos la siguiente correspondencia :

$$a \longrightarrow 0$$
$$b \longrightarrow 1$$
$$x_{k_1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$
$$x_{k_2} \longrightarrow \frac{3}{4}$$
$$x_{k_3} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

etc.



Establecemos así una función $\phi : \{x_n\} \to \{$ racionales con denominador $2^n\}$. ϕ es monótona. Ahora sea $c \in [a,b]$, c arbitrario ; como $\{x_n\}$ es denso en $[a,b]$ existe una subsucesión $\{x_{s_n}\}$ creciente y tal que $x_{s_n} \to c$ entonces $\{\phi(x_{s_n})\}$ es una sucesión creciente y acotada, luego converge. Llamemos

$$\phi(c) = \lim_{n \to \infty} \phi(x_{s_n}) .$$

El valor $\phi(c)$ está bien definido, porque si $\{x_{t_n}\}$ es otra sucesión creciente tal que $x_{t_n} \to c$, entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \phi(x_{s_n}) = \lim_{n \to \infty} \phi(x_{t_n}) = \phi(c) .$$ De lo contrario,

$$\lim_{n \to \infty} \phi(x_{s_n}) = v \text{ y } \lim_{n \to \infty} \phi(x_{t_n}) = w \text{ con } v \neq w$$ entonces entre v y w existe un racional con denominador 2^n, lo cual es absurdo. Si existe un tal racional, digamos $\frac{r}{2^n}$, tal que $v < \frac{r}{2^n} < w$, esto significa que existe $x_{k_i} \in \{x_n\}$ tal que

$x_{s_n} < x_{k_i} < x_{t_n}$, para todo s_n y todo t_n. Como $x_{s_n} \to c$ y $x_{t_n} \to c$, entonces $x_{k_i} = c$ y así $\phi(c) = \phi(x_{k_i})$ es único por la construcción de ϕ.

Ahora sea $\{x_n\}$ denso en X. Al elemento x_1 le asociamos 0, al elemento x_2 le asociamos 1, al menor x_k tal que $x_k > x_2$ le asociamos 2, al mayor x_r tal que $x_r < x_1$ le asociamos -1 y así sucesivamente, entonces hemos establecido una correspondencia uno a uno entre X y $\mathbb{R}$. Porque si a y b están en X con $a < b$ entonces existe una sucesión $\{x_{s_n}\}$ creciente tal que $\lim_{n\to\infty} x_{s_n} = a$ y existe una sucesión $\{x_{t_n}\}$ creciente tal que $\lim_{n\to\infty} x_{t_n} = b$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_{s_n}) = \varphi(a) \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{t_n}) = \varphi(b) \in \mathbb{R}.$$

Como $a < b$, existe $x_{k_i} \in \{x_n\}$ tal que $a < x_{k_i} < b$ y $\varphi(x_{k_i}) = \frac{r}{2^n}$ donde r es un entero y n un natural. Tenemos entonces que $\varphi(a) < \frac{r}{2^n} < \varphi(b)$ y así $\varphi(a) < \varphi(b)$, luego φ es $1-1$.

BIBLIOGRAFIA

(1) Apostol, T., Mathematical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 1965.

(2) Bartle, R., The elements of Real Analysis, Wiley In-

ternational Edition, Illinois, 1964.

(3) Dugundji,J., Topology, Allyn and Bacon,Inc, Boston, 1966.

(4) Mejía,V., Ciertos tópicos de la topología del orden, Boletín de Matemáticas, Vol. XVI, No. 1, Bogotá.

(5) Royden,H., Real Analysis, Collier-Mac Millan, London, 1969.

(6) Rudin,W., Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1966.

(7) Takeuchi,Y., Sucesiones y series, Editorial Wiley-Limusa, Mexico.

Victor MEJIA
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional
Bogotá-Colombia