Boletín de Matemáticas
Vol. XVII No. 1,2,3 (1983) **APORTES**

ANILLOS SIN ELEMENTOS NILPOTENTES DIFERENTES DE CERO

Luis Rafael Jiménez B.

INTRODUCCION. A un anillo R no necesariamente asociativo o conmutativo, con la propiedad de que todo producto de elementos del anillo que es igual a cero permanece igual a cero sin importar la manera en que sus factores se asocien, lo llamaremos un anillo *asociativo para productos iguales a cero*. En este artículo demostraremos que un anillo asociativo para productos iguales a cero y sin elementos nilpotentes diferentes de cero, es isomorfo a un producto subdirecto de anillos no necesariamente asociativos o conmutativos sin divisores de cero.

También demostraremos que la relación $\leqslant$ definida por $x \leqslant y$ sii $xy = x^2$ es un orden parcial sobre un anillo R asociativo para productos iguales a cero si y sólo si R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero. Además probaremos que este orden es infinitamente distributivo en el sentido de que si $\{x_i\}_{i \in I}$ es un subconjunto de R tal que $\sup_i x_i$ existe, entonces para todo $r \in R$, $\sup_i (rx_i)$ existe y $\sup_i (rx_i) = r \sup_i x_i$.

NOCIONES PRELIMINARES. Un elemento a en un anillo R asociativo para productos iguales a cero, se llama nilpotente si $a^n = 0$ para algún entero positivo n. (La notación tiene sentido en virtud de la definición de anillo asociativo para productos iguales a cero).

El siguiente resultado, cuya demostración es similar a la correspondiente para anillos asociativos, será útil en el resto de este trabajo.

LEMA 1. Si R es un anillo asociativo para productos iguales a cero, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

ii) Si $a \in R$ es tal que $a^2 = 0$, entonces $a = 0$.

LEMA 2. Sea R un anillo asociativo para productos iguales a cero y sin elementos nilpotentes diferentes de cero. Se tiene:

i) Si $xy = 0$ entonces $yx = 0$.

ii) Si $ax = 0$ y $<x>$ representa el ideal principal generado por x, entonces $a<x> = 0$ y $<x>a = 0$.

iii) Si un producto que tiene a x como factor es cero, el producto sigue siendo cero si x se reemplaza por cualquier elemento del ideal principal generado por x.

iv) Si un producto es igual a cero, el producto permanece igual a cero si sus factores se reordenan de cualquier forma.

Demostración.

i) Si $xy = 0$ entonces $0 = y[(xy)x] = (yx)(yx) = (yx)^2$ y por el Lema 1, $yx = 0$.

ii) Si $ax = 0$ y $r \in R$ entonces $0 = (ax)r = a(xr)$. También $0 = ax = xa = r(xa) = (rx)a = a(rx)$. Usando repetidamente este argumento vemos que $a<x> = 0$ y en virtud de (i) $<x>a = 0$.

iii) Sea w un producto que tiene a x como factor tal que $w = 0$. Representemos por $\tilde{w}$ el mismo producto donde x se ha reemplazado por un elemento de $<x>$. Si $w = x$ es claro que $\tilde{w} = 0$. Si $w = ax$ o $w = xa$ entonces $\tilde{w} = 0$ por (ii). En el caso general $w = ab$ y por inducción sobre la longitud del producto a o b que con-

contiene a x se sigue que $\tilde{w} = 0$.

iv) Supongamos que $w = x_1 x_2 \ldots x_m = 0$ y que w' es un reordenamiento de los factores del producto w. Entonces $w' \in \langle x_i \rangle$ para $i = 1,2,\ldots,m$. Luego por (iii) si reemplazamos cada x_i por w' tenemos $(w')^m = 0$ y como R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero, entonces $w' = 0$.

SECCION PRINCIPAL. Consideremos un anillo R asociativo para productos iguales a cero y sin elementos nilpotentes diferentes de cero. Un subconjunto M de R se llama un *sistema multiplicativo* si M es cerrado para la multiplicación. Si a es un elemento de R distinto de,cero, entonces $M_a = \{w \mid w$ es un producto finito que tiene todos sus factores iguales a $a\}$ es un sistema multiplicativo que no contiene a 0. Por el lema de Zorn se deduce que todo elemento de R distinto de cero esta contenido en un sistema multiplicativo maximal que no contiene a 0. Un ideal P de R se llama *completamente primo* si $xy \in P$ implica que $x \in P$ o $y \in P$ para todo x,y en R. Es un resultado conocido que P es completamente primo sii R/P es un anillo sin divisores de cero.

LEMA 3. Si M es un sistema multiplicativo maximal que no contiene a 0 entonces $R - M$ es un ideal completamente primo de R.

Demostración. Sean $x, y \in R-M$. Como M es un sistema multiplicativo maximal que no contiene a 0, entonces 0 pertenece al menor sistema multiplicativo que contiene a $M \cup \{x\}$ y al menor sistema multiplicativo que contiene a $M \cup \{y\}$. Por tanto $0 = w$ donde w es un producto cuyos factores son elementos de $M \cup \{x\}$ y al menos uno de ellos es x y también $0 = v$ donde v es un producto cuyos factores son elementos de $M \cup \{y\}$ y al menos uno de ellos es y. Por (iv) del Lema 2 tenemos

$$0 = x^i m_1 \quad \text{con} \quad m_1 \in M, \qquad i \geqslant 1$$

$$0 = y^j m_2 \quad \text{con} \quad m_2 \in M, \qquad j \geqslant 1$$

lo cual implica que $xm_1 = 0$ y $ym_2 = 0$. Por lo tanto $(x-y)m_1m_2 = 0$ y así $x-y \in R-M$, Si $x \in R-M$, razonando en forma similar tenemos que $0 = xm$ con $m \in M$ y por (ii) del Lema 2 concluimos que $0 = \langle x\rangle m = m\langle x\rangle$, lo cual implica que rx, $xr \in R-M$ para todo $r \in R$. Así, hemos demostrado que $R-M$ es un ideal de R que resulta completamente primo puesto que M es un sistema multiplicativo.

TEOREMA 1. Todo anillo R asociativo para productos iguales a cero y sin elementos nilpotentes distintos de cero es isomorfo a un producto subdirecto de anillos, no necesariamente asociativos o conmutativos, sin divisores de cero.

Demostración. Como todo elemento $a \neq 0$ de R esta contenido en un sistema multiplicativo maximal, por el Lema 3 para cada $a \neq 0$ de R existe un ideal completamente primo P_a tal que $a \notin P_a$. Por lo tanto la intersección del conjunto de ideales $\{P_a | a \in R,\ a \neq 0\}$ es $\{0\}$ y por un teorema conocido R es isomorfo al producto subdirecto de los anillos R/P_a. Como los R/P_a son anillos sin divisores de cero, queda demostrado el teorema.

TEOREMA 2. Sea R un anillo asociativo para productos iguales a cero. La relación $\leqslant$ definida por $x \leqslant y$ sii $xy = x^2$ es un orden parcial sobre R si y sólo si R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero.

Demostración. Supongamos que R es un anillo asociativo para productos iguales a cero sin elementos nilpotentes distintos de cero. Claramente la relación $\leqslant$ es reflexiva. Si $x \leqslant y$ y $y \leqslant x$ entonces $xy = x^2$ y $yx = y^2$, luego $0 = x^2 - xy - yx + y^2 = (x-y)^2$ y así $x = y$ y la relación $\leqslant$ es antisimétrica. Supongamos ahora que $x \leqslant y$ y $y \leqslant z$. Entonces $xy = x^2$ y $yz = y^2$. Luego $y(z-y) = 0$ y por lo tanto $0 = xy(z-y) = x^2(z-y)$ $= x(xz-xy) = x(xz-x^2) = x^2(z-x) = x^2(z-x)^2 =$ $[x(z-x)]^2$ y como R no tiene elementos nilpotentes distintos de cero entonces $0 = x(z-x)$ o sea $xz = x^2$ es decir $x \leqslant z$ y por lo tanto la relación $\leq$ es transitiva.

El recíproco es fácil y similar al caso asociativo.

LEMA 4. Sea R un anillo asociativo para productos iguales a cero y sin elementos nilpotentes distintos de cero. Sean x,y,u,v elementos de R. Si $x \leq y$ y $u \leq v$ entonces $xu \leq yv$.

Demostración. Probaremos primero que para todo $v \in R$, $x \leq y$ implica $xv \leq yv$ y $vx \leq vy$. Puesto que $xy = x^2$ aplicando repetidamente el Lema 2 tenemos $0 = x(y-x) = x(yv-xv) = (xv)(yv-xv)$. Así $xv \leq yv$. El otro caso es similar. Como $xu \leq yu$ y $yu \leq yv$ por transitividad $xu \leq yv$.

TEOREMA 3. Sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un subconjunto de R tal que $\sup_i x_i$ existe. Entonces para todo $r \in R$, $\sup_i(rx_i)$ existe y además $\sup_i(rx_i) = r \sup_i x_i$

Demostración. Denotaremos $\sup_i x_i$ por S. Puesto que $x_i \leq S$ para cada $i \in I$, por el Lema 4 tenemos que $rx_i \leq rS$ para cada $i \in I$. Por lo tanto rS es una cota superior del conjunto $\{rx_i\}_{i\in I}$.

Sea ahora u cualquier cota superior del conjunto $\{rx_i\}_{i\in I}$. Puesto que $rx_i \leq u$ para cada $i \in I$, tenemos

$$(rx_i)u = (rx_i)^2 \quad (i \in I) \tag{1}$$

y en particular

$$(rx_i)(rS) = (rx_i)^2 \qquad (i \in I) \qquad (2)$$

Como $x_i \leqslant S$ para cada $i \in I$, tenemos

$$x_i S = x_i^2 \qquad (i \in I) \qquad (3)$$

De (1) y (2) para cada $i \in I$, obtenemos

$$0 = (rx_i)(u - rS) = x_i(r(u - rS))$$

en virtud del Lema 2, y por (3)

$$x_i^2 = x_i(r(u-rS)) + x_i S = x_i[r(u-rS) + S].$$

Por lo tanto

$$x_i \leqslant r(u-rS) + S \qquad (i \in I) \qquad (4)$$

De (4) concluímos que $S \leqslant r(u-rS) + S$ y por la definición de $\leqslant$ obtenemos $S[r(u-rS) + S] = S^2$, de donde $0 = S[r(u-rS)] = (rS)(u-rS)$ y así $(rS)u = (rS)^2$ o sea $rS \leqslant u$. De esta manera hemos visto que rS es la mínima cota superior del conjunto $\{rx_i\}_{i \in I}$. Es decir

$$\operatorname{Sup}_i rx_i = rS = r \operatorname{Sup}_i x_i.$$

Los Teoremas 2 y 3 y el Lema 4 generalizan a los anillos asociativos para productos iguales a cero, algunos de los resultados probados en [1], [2], [3] y [4]. En [4] se demuestra que un anillo alternativo R equipado con la relación $\leqslant$ es isomorfo a un producto directo de anillos alternativos de división si y solo si la relación $\leqslant$ es un orden parcial sobre R tal que R es hiperatómico y ortogonalmente completo. Surgen las siguientes preguntas:

1º ¿Es posible extender el resultado anterior a anillos asociativos para productos iguales a cero?

2º ¿Se puede dar un ejemplo de un anillo asociativo para productos iguales a cero que no sea un anillo aternativo sin elementos nilpotentes distintos de cero?

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Abian, A., "Direct product de composition of commutative semisimple rings", Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), 502-507.

[2] Chacron, M., "Direct product of division

rings and a paper of Abian", Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 259-262.

[3] Hentzel, I.R., "Alternative rings Without nilpotent elements", proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 373-376.

[4] Myung, H.C. and Jiménez, L.R., "Direct product decomposition of alternative rings", proc. Amer. math. Soc. 47 (1975), 53-60.

* *

Departamento de Matemáticas,
Universidad Pedagógica Nacional
BOGOTA. D.E. COLOMBIA.