Boletín de Matemáticas
Vol. XVII Nº. 1,2,3 (1983) **BALANCES**

ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE ESPACIOS UNIFORMEMENTE CONVEXOS

Lucímar Nova G.

Las presentes notas, sin ser originales, tienen por objeto presentar algunos resultados usados dentro de la teoría de espacios Uniformemente Convexos.

DEFINICION. Sea X un espacio normado, se dice que X es *uniformemente convexo*, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta(\varepsilon)$, entonces $\|x-y\| < \varepsilon$.

¿Por qué se estudian los espacios Uniformemente Convexos?

Dentro de la Teoría de Puntos Fijos, es muy conocido el Principio de Contracción de Banach (1922): "Cualquier contracción definida de un espacio métrico completo en sí mismo tiene un único punto fijo".

Si en lugar de Contracciones en espacios métricos completos X, consideramos aplicaciones no-expansiones, i,e. aplicaciones T que satisfacen

$$d(Tx, Ty) \leqslant d(x,y)$$

para todo $x,y \in X$. No necesariamente garantizamos la existencia de Puntos Fijos.

Ejemplo. Sea C_o el espacio de las sucesiones $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ que tienden a 0, dotado de la norma $\|x\| = \sup_i |x_i|$. Sean
$X = \{x \in C_o \mid \|x\| \leqslant 1\}$; $Tx = (1, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$
$x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $T: X \to X$

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|.$$

X es un espacio métrico, completo, T es un operador no-expansivo. Pero no admite un punto fijo.

El problema de X es que X es *no* Uniformemente Convexo, puesto que $x = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, $y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ $\|x\| = \|y\| = 1$, $x+y = (2, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \ldots)$, $x-y = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots)$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta$, para todo δ , pero $\|x-y\| \not< \varepsilon = \frac{1}{2}$.

En un mismo espacio se pueden considerar normas con las cuales puede el espacio ser Uniformemente Convexo y con otras no serlo:

En $\mathbb{R}^2$ definimos

$${}^1\|(x,y)\| = |x| + |y|$$

$${}^2\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

$(\mathbb{R}^2, {}^1\| \ \|)$ *no* es uniformemente convexo, puesto que para $\bar{x} = (1,0)$, $\bar{y} = (0,1)$, se tiene

$${}^1\|\bar{x} + \bar{y}\| = 2 > 2-2\delta \quad \text{para todo } \delta > 0 ,$$

pero ${}^1\|\bar{x} - \bar{y}\| = 2 \nless 1$.

Sin embargo $(\mathbb{R}^2, {}^2\| \ \|)$ sí es uniformemente convexo puesto que si ${}^2\|a\| = {}^2\|b\| = 1$, usando la ley del Paralelogramo, tenemos

$${}^2\|a-b\|^2 = 4 - {}^2\|a+b\|^2 < 4 - 4(1-\delta)^2$$

$$= 2\delta-\delta^2 < 2\delta = \varepsilon . \quad (\text{ basta tomar } \delta = \varepsilon/2).$$

PROPOSICION 1. Si X es un espacio Uniformemente Convexo, entonces:

(i) Si $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$, entonces $\|x+y\| < 2$.

(ii) Si $\|x\| = \|y\| = r$ y $x \neq y$, entonces $\|x+y\| < 2r$.

(iii) Si $\|x\|$, $\|y\| \leq r$ y $x \neq y$, entonces $\|x+y\| < 2r$.

(iv) Si $\|x\|$, $\|y\| \leq r$, $x \neq y$, $0 < t < 1$, entonces $\|tx+(1-t)y\| < r$.

(v) Dados $\alpha > 0$, $\beta \in (0,\frac{1}{2})$, existe $\gamma(\alpha,\beta) > 0$, tal que si $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ y $\|x-y\| \geq \alpha$, entonces $\|\lambda x+(1-\lambda) y\| \leq 1-\gamma(\alpha,\beta)$ para todo $\lambda \in (\beta, 1-\beta)$.

Prueba:

(i) Dado $\|x\| = \|y\| = 1$, $\varepsilon = \|x-y\|$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1-\delta(\varepsilon) < 1$. i,e. $\|x+y\| < 2$.

(ii) Como $\|\frac{x}{r}\| = \|\frac{y}{r}\| = 1$ y $\frac{x}{r} \neq \frac{y}{r}$ entonces por (i) $\|\frac{x+y}{r}\| < 2$.

(iii) Si $\|x\|$, $\|y\| < r$, entonces $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| < 2r$. Si $\|x\|$, $\|y\| = r$, $x \neq y$, entonces por (ii), $\|x+y\| < 2r$.

(iv) Si $0 < t < \frac{1}{2}$, $\|tx+(1-t-\frac{1}{2})y\| = \|tx+(\frac{1}{2}-t)y\| \leq t\|x\| + (\frac{1}{2}-t)\ \|y\| \leq tr+(\frac{1}{2}-t)r = \frac{1}{2}r$ y como $\|\frac{y}{2}\| \leq \frac{r}{2}$, $x \neq y$, $t > 0$, $t(x-y) \neq 0$ i,e. $tx+(\frac{1}{2}-t)y \neq \frac{1}{2}y$ entonces por (iii),

$$\|tx+(1-t)y\| = \|tx+(\tfrac{1}{2}-t)y + \tfrac{y}{2}\| < 2\,\tfrac{r}{2} = r.$$

Si $t = \frac{1}{2}$, es el caso (iii).

Si $\frac{1}{2} < t < 1$, entonces

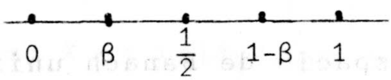
$\|(t-\frac{1}{2})x+(1-t)y\| \leqslant (t-\frac{1}{2})\ \|x\| + (1-t)\ \|y\| \leqslant$
$[(t-\frac{1}{2}) + (1-t)]r = \frac{r}{2}$ y como $\|\frac{x}{2}\| \leqslant \frac{r}{2}$,

$x \neq y$, $(1-t)x \neq (1-t)y$, i.e.

$(t-1)x + (1-t)y \neq 0$ o sea

$(t-\frac{1}{2})x + (1-t)y \neq \frac{1}{2}x$, entonces por (iii)

$$\|tx+(1-t)y\| = \|(t-\tfrac{1}{2})x+(1-t)y + \tfrac{1}{2}x\| < 2\tfrac{r}{2} = r.$$

(v) 

Si $\lambda \in (\beta,\frac{1}{2})$, entonces $2\lambda \in (0,1)$, usando (iv) para $\|y\| \leqslant 1$, $\|x\| \leqslant 1$, se tiene $\|2\lambda x+(1-2\lambda)y\| < 1$ y como

$$\|y-(2\lambda x+(1-2\lambda)y)\| = 2\lambda\|x-y\| \geqslant 2\lambda\alpha > 0$$

y X es uniformemente convexo, existe $\gamma = \delta(2\lambda\alpha) > 0$ tal que

$$\tfrac{1}{2}\|y+2\lambda x+(1-2\lambda)y\| \leqslant 1 - \gamma.$$

Si $\lambda \in (\frac{1}{2},1-\beta)$, entonces $(2\lambda-1) \in (0,1)$, usando (iv) para $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, se tiene $\|(2\lambda-1)x + (1-2\lambda+1)y\| < 1$ y como

$$\|x-[(2\lambda-1)x + (2-2\lambda)y]\| = (2-2\lambda)\|x-y\| \geqslant$$

$(2-2\lambda)\alpha > 0$ y X es uniformemente convexo, existe $\gamma = \delta((2-2\lambda)\alpha) > 0$ tal que

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| = \frac{1}{2}\|x+(2\lambda-1)x + (2-2\lambda)y\| \leqslant 1-\gamma.$$

Si $\lambda = \frac{1}{2}$, es la definición de espacio Uniformemente Convexo.

El siguiente teorema nos garantiza la existencia y unicidad de elementos de norma minimal en subconjuntos convexos y cerrados de espacios uniformemente convexos.

TEOREMA 1. Sean X un espacio de Banach uniformemente convexo y K un subconjunto convexo y cerrado de X; si $\delta = \operatorname{Inf}_{x\in K}\|x\|$ y $\{x_n\}_n$ es una sucesión en K tal que $\|x_n\| \to \delta$ cuando $n \to \infty$, entonces $\{x_n\}_n$ converge a un $z \in K$ tal que $\|z\| = \delta$.

Demostración. Si $\delta = 0$ y $\{x_n\}_n \subseteq K$ es tal que $\|x_n\| \to 0$ entonces como K es cerrado esto dice que $\{x_n\}_n$ converge a 0 y $0 \in K$.

Supongamos entonces que $\delta > 0$ y consideremos $\{x_n\}_n \subseteq K$ tal que $\|x_n\| = \delta_n \to \delta$.

Entonces

$$\left\|\frac{x_n}{\delta_n}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Como $\frac{\delta_n}{\delta_n+\delta_m} + \frac{\delta_m}{\delta_n+\delta_m} = 1$ y K es convexo, entonces

$$y_{nm} = \frac{\delta_n \; x_m + \delta_m \; x_n}{\delta_n + \delta_m} \in K$$

y así

$$\|y_{nm}\| \geqslant \delta \qquad \text{para todo } n,\ m.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{x_m}{\delta_m} + \frac{x_n}{\delta_n}\right\| = \|y_{nm}\| \; \frac{\partial n+\partial m}{2\delta_n\delta_m} \geqslant \delta \; \frac{\delta n+\delta m}{2\delta_n\delta_m} \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 1$$

y como X es uniformemente convexo, entonces

$$\left\|\frac{x_n}{\delta_n} - \frac{x_m}{\delta_m}\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n,m \to \infty .$$

Es decir la sucesión $\left(\frac{x_n}{\delta_n}\right)_n \subseteq X$ es de Cauchy, luego existe $x \in X$ tal que $\frac{x_n}{\delta_n} \to x$, de donde

$$x_n = \delta_n \frac{x_n}{\delta_n} \to \delta x$$

y como K es cerrado, entonces $z = \delta x \in K$. Además $\delta_n = \|x_n\| \to \delta\|x\|$ i,e. $\|x\| = 1$ y así $\|z\| = \delta$.

Si $w \in K$ es otro elemento de K de norma minimal tal que $w \neq z$ entonces por la proposición 1 (ii) se tendría $\left\|\frac{z+w}{2}\right\| < \delta$ con $\frac{z+w}{2} \in K$. (absurdo). Por tanto $w = z$.

La prueba de éste teorema nos sugiere la siguiente pregunta: Qué clase de sucesiones en espacios uniformemente convexos, son sucesiones de Cauchy?

LEMA 1. Sea X un espacio uniformemente convexo, $\{a_n\}_n \subseteq X$ tal que $\|a_n\| \to 1$, y $\|a_n+a_m\| \to 2$ cuando $n,m \to \infty$, entonces $\{a_n\}_n$ es de Cauchy en X.

Prueba. Como $\|a_n+a_m\| \to 2$, $n,m \to \infty$; dado $\delta_o > 0$, existe $M > 0$ tal que si $n,m > M$, entonces

$$\left| \|a_n+a_m\| - 2 \right| < \delta.$$

CASO 1. $\|a_n\| \leqslant 1$ para todo n.

Sea $\varepsilon > 0$, como X es uniformemente convexo existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\left\|\frac{a_n+a_m}{2}\right\| > 1 - \delta(\varepsilon)$, entonces $\|a_n-a_m\| < \varepsilon$. Luego para $\delta_o = \delta(\varepsilon)$ se tendrá que $\|a_n-a_m\| < \varepsilon$ si $n,m > M$. Por tanto $\{a_n\}_n$ es de Cauchy.

CASO 2. Como $\|a_n\| \to 1$

podemos suponer $a_n \neq 0$ para todo n,

$$2 \geq \left\| \frac{a_n}{\|a_n\|} + \frac{a_m}{\|a_m\|} \right\| = \left\| \frac{a_n + a_m}{\|a_n\|} + \frac{\|a_n\| - \|a_m\|}{\|a_n\| \, \|a_m\|} \, a_m \right\|$$

$$\geq \frac{\|a_n + a_m\|}{\|a_n\|} - \frac{\big| \|a_n\| - \|a_m\| \big|}{\|a_n\|}$$

y puesto que $\|a_n\| \to 1$, $\|a_n + a_m\| \to 2$ cuando $n, m \to \infty$ entonces

$$\left\| \frac{a_n}{\|a_n\|} + \frac{a_m}{\|a_m\|} \right\| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 2 \, .$$

Luego por el caso 1: $\left(\frac{a_n}{\|a_n\|}\right)$ es de Cauchy.

Sea $t_n = \|a_n\| \to 1$, $c_n = \frac{a_n}{\|a_n\|}$, $\|c_n\| = 1$.

$$\|a_n - a_m\| = \|t_n c_n - t_m c_m\|$$

$$= \|(t_n - 1)c_n + (c_n - c_m) + (1 - t_m)c_m\|$$

$$\leq |t_n - 1| \, \|c_n\| + \|c_n - c_m\| + |1 - t_m| \, \|c_m\|$$

y como $t_n \to 1$, $(c_n)_n$ es de Cauchy y $\|c_n\| = 1$, entonces $(a_n)_n$ es de Cauchy.

*

De acuerdo con la definición de espacio Uniformemente Convexo, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in (0,2]$ existe $\tilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, y \in S^1$, con $S^1 = \{x \mid \|x\| = 1\}$ y $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$, entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \tilde{\delta}(\varepsilon).$$

Es decir $0 < \tilde{\delta}(\varepsilon) \leqslant 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1.$

Por tanto definimos

$$\delta : (0,2] \longrightarrow (0,1]$$

$$\delta(\varepsilon) = \operatorname{Inf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \;\middle|\; x, y \in S^1, \; \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

δ es llamada "módulo de convexidad" del espacio uniformemente convexo.

LEMA 2. El Módulo de convexidad es creciente.

Prueba: Si $\varepsilon < \varepsilon'$ entonces

$$\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \;\middle|\; x, y \in S^1, \; \|x-y\| > \varepsilon'\right\}$$

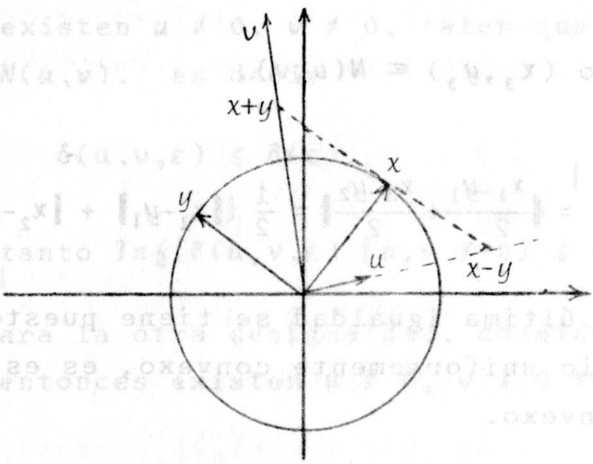
$$\subseteq \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \;\middle|\; x, y \in S^1, \; \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}$$

luego $\delta(\varepsilon) \leqslant \delta(\varepsilon')$.

LEMA 3. El módulo de convexidad, es una función convexa.

Prueba: Sea X un espacio uniformemente convexo, $u, v \in X$ $u \neq 0$, $v \neq 0$, notamos

$$N(u,v) = \{(x,y) \mid x,y \in S^1,\ x-y = \alpha u,\ x+y = \beta v, \text{ algún } \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}.$$



Consideremos ahora:

$$\delta(u,v,\varepsilon) = \mathit{Inf}\ \{1-\|\frac{x+y}{2}\| : x,y \in N(u,v),\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon\}.$$

Veamos que $\delta(u,v,\varepsilon)$ es convexa.

En efecto, sean $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in N(u,v)$, $\|x_1-y_1\| \geqslant \varepsilon_1$, $\|x_2-y_2\| \geqslant \varepsilon_2$

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$x_1 - y_1 = \alpha_1 u, \quad x_1 + y_1 = \beta_1 v$$
$$x_2 - y_2 = \alpha_2 u, \quad x_2 + y_2 = \beta_2 v.$$

Luego,

$$x_3 - y_3 = \frac{x_1 - y_1}{2} + \frac{x_2 - y_2}{2} = (\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2})u$$

$$x_3 + y_3 = \frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_2 + y_2}{2} = (\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2})v$$

Por tanto $(x_3, y_3) \in N(u,v)$.

Además

$$\|x_3 - y_3\| = \|\frac{x_1 - y_1}{2} + \frac{x_2 - y_2}{2}\| = \frac{1}{2}\{\|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\|\}.$$

La última igualdad se tiene puesto que todo espacio uniformemente convexo, es estrictamente convexo.

Como $\|x_1 - y_1\| \geq \varepsilon_1$, y $\|x_2 - y_2\| \geq \varepsilon_2$, entonces

$$\|x_3 - y_3\| \geq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}.$$

De nuevo observando que espacios uniformemente convexos son estrictamente convexos, se tiene

$$1 - \|\frac{x_3 + y_3}{2}\| = \frac{1}{2}[2 - \|\frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_2 + y_2}{2}\|]$$

$$= \frac{1}{2}[(1 - \|\frac{x_1 + y_1}{2}\|) + (1 - \|\frac{x_2 + y_2}{2}\|)].$$

entonces tenemos que

$$\delta(u,v,\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}) \leqslant \frac{1}{2}[\delta(u,v,\varepsilon_1) + \delta(u,v,\varepsilon_2)]$$

y con esto tenemos que $\delta(u,v,\varepsilon)$ es convexa.

De otra parte si $x,y \in S^1$ y $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$, entonces existen $u \neq 0$. $v \neq 0$, tales que $(x,y) \in N(u,v)$, es decir

$$\delta(u,v,\varepsilon) \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Por lo tanto $Inf\{\delta(u,v,\varepsilon) \mid u,v \neq 0\} \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Para la otra desigualdad, consideremos $\eta > 0$, entonces existen $u \neq 0$, $v \neq 0$ tales que

$$\delta(u,v,\varepsilon) < Inf\{\delta(u,v,\varepsilon) \mid u \neq 0,\ v \neq 0\} + \eta.$$

Por lo tanto existen $x,y \in S^1$, $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$, $(x,y) \in N(u,v)$ tales que

$$1 - \|\frac{x+y}{2}\| < Inf\{\delta(u,v,\varepsilon) \mid u \neq 0,\ v \neq 0\} + \eta$$

Luego

$$\delta(\varepsilon) \leqslant Inf\{\delta(u,v,\varepsilon) \mid u \neq 0,\ v \neq 0\} + \eta,$$

para todo η.

Y así

$$\delta(\varepsilon) = Inf\{\delta(u,v,\varepsilon) \mid u \neq 0,\ v \neq 0\}.$$

y como cada $\delta(u,v,\varepsilon)$ es convexa, así lo será $\delta(\varepsilon)$.

Notando η: $(0,1] \to (0,2]$ la inversa de δ, tenemos el siguiente lema debido a Goebel [3]:

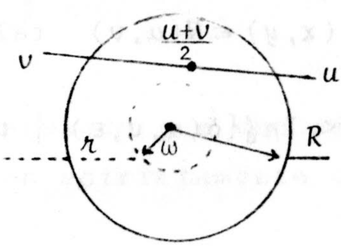
LEMA 3. Sean X un espacio uniformemente convexo, $u,v,\omega \in X$ tales que

$$\|u-\omega\| \leq R, \quad \|v-\omega\| \leq R \quad \text{y} \quad \|\omega-\frac{u+v}{2}\| \geq r > 0 .$$

Entonces

$$\|u-v\| \leq R\ \eta\ \left(\frac{R-r}{R}\right).$$

Prueba:



Puesto que $\|u-\omega\| \leq R$, $\|v-\omega\| \leq R$,

$$\left\| \frac{\omega-u}{2} + \frac{\omega-v}{2} \right\| = \left\|\omega - \frac{u+v}{2}\right\| \geq r = \left(1 - \frac{R-r}{R}\right)R$$

y X es uniformemente convexo, entonces

$$\|u-v\| = \|(\omega-u)-(\omega-v)\| \leqslant R\,\eta\left(\frac{R-r}{R}\right)$$

Para el último y más importante resultado que presentaremos en estas notas necesitamos el siguiente

TEOREMA DE HELLY.

Sean X un espacio normado, $\phi \in X^{**}$, S un subespacio de X^* con $dim(S) < \infty$, $\varepsilon > 0$ entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| < \|\phi\| + \varepsilon$, $\phi(f) = f(x)$ para toda $f \in S$. [5].

TEOREMA 2. (D. Milman y B.J. Pettis)

Un espacio de Banach X uniformemente convexo es reflexivo.

Prueba: Sean X un espacio de Banach, uniformemente convexo, $\phi \in X^{**}$, supongamos $\|\phi\| = 1$, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, por la definición de $\|\phi\|$, existen $g_n \in A^*$ tales que

$$|\phi(g_n)| > 1 - \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \|g_n\| = 1.$$

Sea $S_n = Span\langle g_1, g_2, \ldots, g_n\rangle$, S_n es un subespacio de A^* con $dim\ S_n = n < \infty$. Por tanto por el Teorema de Helly existe $\{a_n\}_n \subseteq X$ tal que

$$\|a_n\| < 1 + \frac{1}{n}$$

y $\phi(g_k) = g_k(a_n)$ para todo $k = 1,2,\ldots,n$.

Además como:

$$1+\frac{1}{n} > \|a_n\| = \|a_n\|\|g_k\| \geq \|g_k(a_n)\| = \|\phi(g_k)\| > 1-\frac{1}{n},$$

entonces

$$\|a_n\| \to 1 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

De otra parte si $m > n$

$$\|a_n+a_m\| = \|g_n\|\|a_n+a_m\| \geq \|g_n(a_n+a_m)\|$$

$$= \|\phi(g_n)+\phi(g_n)\| = 2\|\phi(g_n)\| > 2 - \frac{2}{n}$$

y

$$\|a_n+a_m\| \leq \|a_n\| + \|a_m\| < 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Por tanto

$$\|a_n+a_m\| \to 2 \quad \text{cuando} \quad n,m \to \infty$$

y como X es uniformemente convexo, por el Lema 1 $(a_n)_n \subseteq X$ es de Cauchy, y como X es completo, existe $a \in X$ tal que $a_n \to a$ y como $\|a_n\| \to 1$, entonces $\|a\| = 1$.

Como $\phi(g_k) = g_k(a_n)$ para $k \leq n$, entonces

$\phi(g_k) = g_k(a)$ para todo k.

Sean $g_o \in A^*$, $\tilde{S} = Span\langle g_o, g_1, \ldots, g_n\rangle$. Por el Teorema de Helly, existe $(b_n)_n \subseteq X$ tal que $\|b_n\| < 1 + \frac{1}{n}$; $\phi(g_k) = g_k(b_n)$, para todo $k = 0,1,2,\ldots,n$ en particular $\phi(g_k) = g_k(b_n) = g_k(a_n)$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Esto implica que $b_n \to b$, $a_n \to a$, $\phi(g_k) = g_k(b) = g_k(a)$, para $k = 0,1,2,\ldots,n$, Luego $a = b$, $g_o(a) = \phi(g_o)$,

Por tanto dado $\phi \in X^{**}$, existe $a \in X$ tal que $\tau(a)(g_o) = g_o(a) = \phi(g_o)$ cualquiera sea $g_o \in A^*$, i,e. $\tau : X \to X^{**}$ es sobre.

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Clarkson, J.A., "Uniformly Convex Spaces", Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936) pp. 396-414.

[2] Bynum, W.L., "Characterizations of Uniform Convexity", Pac. Journal of Math. 38 # 3 (1971) pp. 577-581.

[3] Goebel, K., "An elementary proof of the fixed point theorem of Browder and Kirk", Michigan Math. J. 16 (1969), pp. 381-383.

[4] Goebel, K., Kirk, W.A. and Shimi, T.N., "A fixed point theorem in Uniformly Convex Spaces", Boll.11 Math. It. (4), 7, (1973), pp. 67-75.

[5] Wilansky, A., *Functional Analysis*, Blaisdell, Publ. Co., New York, 1964.

* *

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E. COLOMBIA.