Boletín de Matemáticas
Vol. XVII, N° 1,2,3 (1983)

APUNTES DE SEMINARIO

TEOREMA DE SEPARACION DE STURM

Orlando Riaño M.

Las presentes notas, sin ser originales, han sido el resultado de lecturas realizadas en un seminario llevado a cabo bajo la dirección de la profesora Lucimar Nova G.

RESUMEN.

El propósito es analizar las oscilaciones de soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$(ry')' + (p+\lambda q)y = 0.$$

DEFINICIONES.

(1) La ecuación

$$(ry')' + (p+\lambda q)y = 0 , \tag{1}$$

donde r, p y q son funciones reales contínuas, definidas en algún intervalo real $[a,b]$, $r(x) > 0$, $q(x) > 0$ en $[a,b]$; junto con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} a_1 y(a) - a_2 y'(a) &= 0 \text{, con algún } a_i \neq 0 \\ b_1 y(b) - b_2 y'(b) &= 0 \text{, con algún } b_i \neq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

se llama un problema de Sturm-Liouville.

(2) Se llaman funciones propias del problema de Sturm-Loiuville, a las soluciones no triviales.

(3) Llámase valor propio del problema de Sturm-Liouville al valor correspondiente de λ asociado a una función propia.

(4) Las funciones f y g se dicen ortogonales respecto a la función de peso q en (a,b) si

$$\int_a^b f(x)g(x)q(x)dx = 0.$$

PROPIEDADES. Un problema de Sturm-Liouville satisface:

i) A cada valor propio le corresponde una única función propia linealmente independiente.

ii) Los valores propios son reales.

iii) Las funciones propias son ortogonales respecto a la función de peso q.

Veamos esta última propiedad:

TEOREMA DE ORTOGONALIDAD. Si y_n y y_m son funciones propias correspondientes a los valores propios $\lambda_n \neq \lambda_m$ del problema de Sturm-Liouville, entonces y_n y y_m son ortogonales respecto a q en (a,b).

<u>Prueba</u>. Como y_n y y_m satisfacen (1) entonces

$$(r y_n')' + (p+\lambda_n q) y_n = 0$$

$$(r y_m')' + (p+\lambda_m q) y_m = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por $-y_m$, la segunda por y_n, sumando y luego integrando obtenemos

$$r\, y_n' y_m \Big|_a^b - \int_a^b r y_m' y_n' \, dx - r y_m y_n' \Big|_a^b = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b y_n y_m \, q dx$$

de donde

$$(\lambda_n-\lambda_m) \int_a^b y_n y_m q \, dx = r(a)\left[y_m(a)\, y_n'(a) - y_n(a) y_m'(a)\right] - r(b)\left[y_m(b) y_n'(b) - y_n(b) y_m'(b)\right].$$

Bajo las consideraciones en (2), se tiene:

$$y_m(a)y_n'(a)-y_n(a)y_m'(a) =$$
$$= \frac{a_2}{a_1}\, y_m'(a)y_n'(a) - \frac{a_2}{a_1}\, y_m'(a)y_n'(a) = 0$$

y

$$y_m(b)y_n'(b)-y_n(b)y_m'(b) =$$
$$= \frac{a_2}{a_1}\, y_m'(b)y_n'(b) - \frac{a_2}{a_1}\, y_m'(b)y_n'(b) = 0.$$

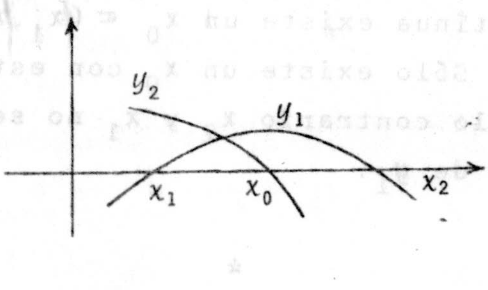
Luego

$$(\lambda_n-\lambda_m) \int_a^b y_n y_m q \, dx = 0,$$

y como $\lambda_n \neq \lambda_m$, se obtiene el resultado.

Ahora probemos que soluciones linealmente independientes de (1), separan ceros.

TEOREMA DE SEPARACION DE STURM. Sean y_1 y y_2 dos soluciones *reales* linealmente independientes de (1) en $[a,b]$. Si x_1 y x_2 son ceros consecutivos de y_1, entonces existe un *único* cero de y_2 en $(x_1,x_2) \subseteq [a,b]$.



<u>Prueba</u>. Supongamos $y_1(x) > 0$ para $x \in (x_1, x_2)$ pues en caso contrario $-y_1$ también sería solución. Además suponemos $y_2(x_1) > 0$ (no podemos tener $y_2(x_1) = 0$ pues y_1 y y_2 son linealmente independientes). Como y_1 y y_2 satisfacen (1), entonces

$$(ry_1')' + (p+\lambda q)y_1 = 0$$

$$(ry_2')' + (p+\lambda q)y_2 = 0 .$$

Multiplicando la primera ecuación por y_2, la segunda por $-y_1$ y sumando, obtenemos:

$$(ry_1')'y_2 - (ry_2')'y_1 = 0$$

Integrando entre x_1 y x_2, se obtiene:

$$r(x_1)y_2(x_1)y_1'(x_1) = r(x_2)y_2(x_2)y_1'(x_2). \tag{3}$$

y bajo las consideraciones hechas, $y_1'(x_1) > 0$, $y_1'(x_2) < 0$. Como el miembro izquierdo de (3) es positivo, entonces $y_2(x_2) < 0$. Por lo tanto como y_2 es contínua existe un $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $y_2(x_0) = 0$. Sólo existe un x_0 con esta propiedad pues de lo contrario x_2 y x_1 no serían ceros consecutivos de y_1.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Boyce, W. y Diprima, R.C., *Elementary Differential Equations and Boundary value problems.* John Wiley, New York, 1965.

[2] Derrick, W., *Elementary Differential Equations with applications,* Addison-Wesley, Cal. 1976.

[3] Hartman, P., *Ordinary Differential Equations,* John Wiley & Sons, New York, 1964.

[4] Hille, E., *Lectures on ordinary differential equations,* Addison Wesley, Cal. 1969.

[5] Ince, E., *Ordinary Differential equations.* Dover, New York, 1956.

[6] Leighton, W., *An Introduction to the Theory of Differential Equations.* Mc Graw-Hill Company, New York, 1952.

*