Boletín de Matemáticas
Vol. XVIII N° 1,2,3, (1984) **APORTES**

UNA CONDICION QUE IMPLICA LA EXISTENCIA DE PUNTOS FIJOS

Lucimar Nova G.

Dado que una de las condiciones que impuse en mi trabajo de doctorado para la existencia de puntos fijos en la clase $\mathcal{D}(a,b)$ es la de regularidad asintótica, en este artículo presento un teorema que garantiza esta propiedad.

PRELIMINARES.

DEFINICION 1. Se dice que $T:X \to X$, siendo X un espacio métrico con métrica d, pertenece a la clase $\mathcal{D}(a,b)$ si para $x,y \in X$ se tiene

$$d(T_x,T_y) \leqslant ad(x,y) + b\{d(x,Tx) + d(y,Ty)\}.$$

DEFINICION 2. Sea (X,d) un espacio métrico, $T\colon X \to X$; $d_T\colon X\times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_T(x,y) = \inf\{d(T^n x, T^n y): n \geqslant 1\}, \quad x,y\in X$$

es tal que si T es una no-expansión sobre X, i.d. $d(Tx,Ty) \leqslant d(x,y)$, entonces d_T define una pseudo-métrica para X y T es una d_T isometría i.e. $d_T(Tx,Ty) = d_T(x,y)$.

DEFINICION 3. Definimos X_d el conjunto de los $r\in\mathbb{R}$ tales que si $s > r$, existen $x,y\in X$ con la condición de que $d(x,y)\in[r,s]$. Consideramos $\phi\colon X_d \to [0,\infty)$ una función no necesariamente contínua.

DEFINICION 4. Se dice que $T\colon X \to X$ es un operador asintóticamente regular en $x\in X$ si $\lim\limits_{n\to\infty} d(T^n x - T^{n+1}x) = 0$.

TEOREMA. Sea (X,d) un espacio métrico, $T\colon X\to X$ un operador en la clase $\mathcal{D}(a,b)$ con $a+2b < 1$. Supongamos que existe $\phi\colon X_d \to [0,\infty)$ tal que $d_T(x,y) \leqslant \phi(d(x,y))$ para todo $x,y\in X$ y que

$$\sup_{s>r}\ \inf_{t\in[r,s]} (t-\phi(t)) > 0 \text{ para } r\in X_d-\{0\}.$$

entonces T es asintóticamente regular en todo punto.

Demostración. Primero observemos que la sucesión $\{d(T^n x, T^{n+1} x)\}_n$ es una sucesión decreciente.

Puesto que $T \in \mathcal{D}(a,b)$ entonces

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leqslant a d(T^{n-1} x, T^n x) + b\{d(T^{n-1} x, T^n x) + d(T^n x, T^{n+1} x)\};$$

o lo que es lo mismo

$$d(T^n x, T^{n+1} x) \leqslant \frac{a+b}{1-b}\, d(T^{n-1} x, T^n x);$$

y como $\frac{a+b}{1-b} < 1$, entonces la afirmación se tiene.

Probar nuestro teorema es mostrar que $d_T(x, Tx) = 0$ para todo x. Pues en este caso

$$\operatorname{Inf} d(T^n x, T^{n+1} x) = d_T(x, Tx) = 0$$

y como $\{d(T^n x, T^{n+1} x)\}_n$ es decreciente, entonces

$$\operatorname*{Inf}_n d(T^n x, T^{n+1} x) = \lim_{n\to\infty} d(T^n x, T^{n+1} x).$$

Supongamos entonces que $d_T(x, Tx) = r > 0$ para algún $x \in X$. Por definición de d_T, esto implica que $r \in X_d-\{0\}$ y como

$$\sup_{s>r} \inf_{t\in[r,s]} (t - \phi(t)) > 0$$

para $r \in Xd-\{0\}$, existe $s > r$ tal que

$$u = \inf_{t\in[r,s]} [t - \phi(t)] > 0.$$

Sea $t \in (0,s-r)$ arbitrario. Por definición de r y puesto que $t > 0$, existe n_o tal que

$$r \leq d(T^{n_o}x, T^{n_o+1}x) < r+t < s$$

y así $d(T^{n_o}x,T^{n_o+1}x) \in [r,s]$, luego

$$u \leq d(T^{n_o}x,T^{n_o+1}) - \phi(d(T^{n_o}x,T^{n_o+1}x))$$

i.e.

$$\begin{aligned}\phi(d(T^{n_o}x,T^{n_o+1}x)) &\leq d(T^{n_o}x-T^{n_o+1}x) -u\\ &\leq r + t - u\end{aligned}$$

y puesto que

$$d_T(x,Tx) \leq d_T(T^{n_o}x,T^{n_o+1}x)$$

y

$$d_T(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x) \leqslant \phi(d(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x))$$

entonces

$$\begin{aligned} r-u < r = d_T(x,Tx) &\leqslant d_T(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x) \\ &\leqslant \phi(d(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x)) \\ &\leqslant r+t-u. \end{aligned}$$

Como t es arbitrario, tomando límite cuando $t \to 0^+$, se tiene que $d_T(x,Tx) = r-u < r$ absurdo, por tanto $d_T(x,Tx) = 0$ para todo x.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Chi Song Wong, *Fixed point Theorems for Non-expansive Mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 37, 142-150 (1972).

[2] Nova, Lucimar, *Some fixed point theorems.* Tesis de doctorado 1980. Universidad de Montana (para ser publicada).

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTA, D.E. Colombia.

*