Boletín de Matemáticas
Vol. XVIII, Nº 1,2,3, (1984)

APUNTES DE SEMINARIO

SEMINARIO DE ANALISIS NO-ESTANDAR

MICRO-TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^*$ (PARTE I)

Ignacio Mantilla - Yu Takeuchi

Sabemos ya que si se aprovecha el orden del cuerpo $\mathbb{R}^*$, se le puede dotar de una topología de orden $\mathcal{O}$, similar a la topologia usual de $\mathbb{R}$.

El objetivo es ahora definir una nueva topología para $\mathbb{R}^*$, menos fina que la topología de orden.

DEFINICION. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^*$, y $\tau \in A$. Decimos que A es un *micro-abierto*, si para todo $\sigma \approx \tau$ (1), se tiene que $\sigma \in A$.

(1) $\sigma \approx \tau$ significa:
σ es infinitamente próximo a τ.

La colección $\mathcal{B}$ de todos los micro-abiertos es una topología para $\mathbb{R}^*$. En efecto:

(i) Evidentemente, $\emptyset$ y $\mathbb{R}^*$ son micro-abiertos.

(ii) La intersección de dos micro-abiertos es un micro-abierto.

Si A y B son micro-abiertos y $\tau \in A \cap B$, entonces para $\sigma \approx \tau$, se tiene que $\sigma \in A$, pues $\tau \in A$, y $\sigma \in B$, pues $\tau \in B$, luego $\sigma \in A \cap B$.

(iii) La unión cualquiera de micro-abiertos es un micro-abierto.

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de micro-abiertos y $\tau \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, entonces $\tau \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$, por lo tanto, si $\sigma \approx \tau$ entonces $\sigma \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$; en tal caso, $\sigma \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Ejemplo: $E(\alpha) = \{\tau \in \mathbb{R}^*/\tau \approx \alpha\}$ es micro-abierto. En efecto, si $\tau \in E(\alpha)$ entonces $\tau \approx \alpha$, luego para cualquier $\sigma \approx \tau$, se cumple que $\sigma \approx \alpha$, es decir $\sigma \in E(\alpha)$.

En particular, el conjunto $E(0)$ de todos los números infinitesimales es un micro-abierto.

Ejemplo: Ningún intervalo no-estándar es micro-abierto.

Consideremos un intervalo no-estândar abierto (α,β) y veamos que no es micro-abierto. (Para los demás tipos de intervalos se hace de manera similar).

(i) Si $\alpha \not\approx \beta$ y ε es un infinitesimal positivo, entonces $\alpha+\varepsilon \in (\alpha,\beta)$ y $\alpha \approx \alpha+\varepsilon$, pero $\alpha \notin (\alpha,\beta)$.

(ii) Si $\alpha \approx \beta$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \in (\alpha,\beta)$ y $\alpha \approx \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, pero $\alpha \notin (\alpha,\beta)$.

PROPOSICION. $E(\alpha)$ es el *mínimo* micro-abierto que contiene a α, es decir $\{E(\alpha)\}$ es un *sistema fundamental de vecindades* de α.

Si A es un micro-abierto que contiene a α y $\tau \in E(\alpha)$, entonces $\tau \approx \alpha \in A$, luego $\tau \in A$; por lo tanto $E(\alpha) \subseteq A$.

Obsérvese que $E(\alpha) = E(\beta)$ si $\alpha \approx \beta$ y que $E(\alpha) \cap E(\beta) = \emptyset$ si $\alpha \not\approx \beta$.

PROPOSICION. A es micro-abierto si y sólo si $A = \bigcup_{\alpha\in A} E(\alpha)$.

Demostración. Una implicación es evidente, pues $E(\alpha)$ es micro-abierto para todo $\alpha \in A$ y la unión cualquiera de micro-abiertos es un micro-abierto.

Veamos la otra implicación.

Si $A = \emptyset$, A puede expresarse como $\bigcup_{\alpha\in\emptyset} E(\alpha)$. Supongamos que $A \neq \emptyset$ y tomemos $\alpha \in A$. Puesto que $\alpha \in E(\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} E(\alpha)$, se concluye que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} E(\alpha) \qquad (1)$$

Si $\tau \in \bigcup_{\alpha\in A} E(\alpha)$, entonces $\tau \in E(\alpha)$ para algún $\alpha \in A$, luego $\tau \approx \alpha$ para algún $\alpha \in A$. Como A es micro-abierto, $\tau \in A$. Por lo tanto:

$$\bigcup_{\alpha\in A} E(\alpha) \subseteq A. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye lo deseado.

La proposición anterior nos dice que la colección $\mathcal{E} = \{E(\alpha)/\alpha \in \mathbb{R}^*\}$ es una *base* para la micro-topología $\mathcal{B}$.

TEOREMA. Si A es micro-abierto, A puede escribirse como *unión disyunta* de elementos de $\mathcal{E}$.

Demostración. Según la proposición anterior, $A = \bigcup_{\alpha\in A} E(\alpha)$, veamos que esta unión se puede hacer disyunta.

En A definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$\tau_1 \sim \tau_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \tau_1 \approx \tau_2.$$

Para cada clase $[\tau] \in A/\sim$, elegimos un representante de dicha clase, digamos τ, y llamamos K al conjunto de todos estos representantes. Entonces:

$$A = \bigcup_{\tau\in K} E(\tau).$$

En efecto; para $\sigma \in A$ se tiene que $\sigma \in K$, ó $\sigma \approx \tau \in K$. En cualquier caso, $\sigma \in \bigcup_{\tau\in K} E(\tau)$, por lo tanto,

$$A \subseteq \bigcup_{\tau\in K} E(\tau). \qquad (1)$$

Si $\sigma \in \bigcup_{\tau\in K} E(\tau)$, entonces $\sigma \approx \tau$ para algún $\tau\in K$, Pero $K \subseteq A$, luego $\tau \in A$.

Como A es micro-abierto, $\sigma\in A$. En tal caso

$$\bigcup_{\tau\in K} E(\tau) \subseteq A. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se tiene que $A = \bigcup_{\tau\in K} E(\tau)$. Esta unión es evidentemente disyunta.

PROPOSICION. Si A es micro-abierto, entonces A es abierto (es decir, $A \in \mathcal{O}$ = topología de orden).

Demostración. Puesto que $E(\alpha) = \bigcup_{\substack{\varepsilon\approx 0\\ \varepsilon>0}} (\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ para todo $\alpha \in A$; es decir $E(\alpha)$ se puede expresar como unión de intervalos abiertos, para todo $\alpha \in A$; entonces $E(\alpha)$ es un abierto de $\mathcal{O}$

para todo $\alpha \in A$. Como $A = \bigcup_{\alpha \in A} E(\alpha)$, se concluye que A es un abierto de $\mathcal{O}$.

Hemos probado que la micro-topología $\mathcal{B}$ es *menos fina* que la topología de orden $\mathcal{O}$.

PROPOSICION. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^*$, si $\alpha \in \bar{S}$ (la adherencia de S según la topología de orden) entonces existe $\tau \in S$ tal que $\tau \approx \alpha$.

Demostración. Puesto que $E(\alpha) \in \mathcal{O}$, se tiene que $E(\alpha) \cap S \neq \emptyset$, luego existe $\tau \in S$ tal que $\tau \approx \alpha$.

COROLARIO. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^*$. Si existe $\operatorname{Sup} S$ (ó $\operatorname{Inf} S$) entonces existe $\tau \in S$ tal que $\tau \approx \operatorname{Sup} S$ (ó $\tau \approx \operatorname{Inf} S$ respectivamente.)

Demostración. $\operatorname{Sup} S$, $\operatorname{Inf} S$ pertenecen a $\bar{S}$ (según la topología de orden).

Al igual que en la topología de orden $\mathcal{O}$, en la micro-topología $\mathcal{B}$, el conjunto de números no infinitesimales, $\mathbb{R}^*-E(0)$ es también micro-abierto, ya que si $\sigma \approx \tau \notin E(0)$, entonces $\tau \not\approx 0$, luego $\sigma \not\approx 0$, es decir, $\sigma \notin E(0)$. Esto quiere decir que el conjunto $E(0)$ de números infinitesimales es *micro-abierto* y *micro-cerrado* (*=complemento* de un micro-abierto). Más generalmente:

PROPOSICION. El complemento de todo micro-abierto es micro-abierto.

Demostración. Sea A un micro-abierto y tomemos $\tau \in A^c$. Si $\sigma \approx \tau$ entonces $\sigma \notin A$, pues en caso contrario, $\tau \in A$, ya que A es micro-abierto. Luego A^c es micro-abierto.

La proposición anterior nos dice que *todo micro-abierto es micro-cerrado.*

Ejemplos. **1)** El conjunto I de los números infinitos de $\mathbb{R}^*$ es micro-abierto. El conjunto F de números finitos de $\mathbb{R}^*$ es micro-abierto.

2) $\mathbb{R}$ no es micro-abierto en $\mathbb{R}^*$; por lo tanto tampoco es micro-cerrado.

Todos los puntos de $\mathbb{R}$ son puntos aislados en $\mathbb{R}^*$, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \cap \mathbb{R} = \{x\}$. Obsérvese que el derivado de $\mathbb{R}$, notado $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ está constituído por todos los números no-estándar que no son reales ni infinitos; es decir:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* - (\mathbb{R} \cup I);$$

ya que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ es finito y no es real, entonces $(E(\alpha) - \{\alpha\}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, pues Est$\alpha \neq \alpha$ y Est$\alpha \in E(\alpha) \cap \mathbb{R}$. La adherencia de $\mathbb{R}$, que notamos $\bar{\mathbb{R}}$, será entonces:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* - I.$$

3) Si $\alpha \approx \beta$ entonces $\overline{(\alpha, \beta)} = E(\alpha) = E(\beta)$.

Si $\alpha \not\approx \beta$ entonces $\overline{(\alpha,\beta)} = E(\alpha) \cup (\alpha,\beta) \cup E(\beta) = \overline{[\alpha,\beta]}$.

4) Ningún conjunto unitario es micro-cerrado. Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\overline{\{\alpha\}} = E(\alpha)$, $\mathcal{D}(\{\alpha\}) = E(\alpha) - \{\alpha\}$.

Ningún conjunto finito de $\mathbb{R}^*$ es micro-cerrado.

Veamos ahora qué *axioma de separación* satisface $\mathbb{R}^*$ con la micro-topología $\mathcal{B}$.

a) $\mathbb{R}^*$ no es T_0; es decir, no es cierto que dados dos puntos distintos $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}^*$, exista un micro-abierto A que contenga a uno de los puntos, pero no al otro. En efecto, si $\tau_0 \neq \tau_1$, pero $\tau_0 \approx \tau_1$, cualquier micro-abierto que contenga a uno de los puntos, necesariamente contiene al otro.

b) Al no ser T_0, $\mathbb{R}^*$ no cumple ningún axioma de separación, es decir, $\mathbb{R}^*$ no es T_1 ni T_2 (Hausdorff).

c) $\mathbb{R}^*$ no puede ser obviamente, T_3 ni T_4 pues no es T_0; sin embargo nos proporciona un magnífico ejemplo de un espacio regular que no es T_3 = (regular y T_1): Ser "regular" significa que dados un micro-cerrado F y un punto $p \notin F$, existen micro-abiertos G y H disyuntos, tales que $F \subseteq G$ y $p \in H$.

Si F es un micro-cerrado de $\mathbb{R}^*$ y $p \notin F$, basta tomar $G = F$ y $H = F^c$.

d) $\mathbb{R}^*$ es normal y no es T_4 = (normal y T_1). En efecto, dados dos micro-cerrados disyuntos F_1 y F_2 de $\mathbb{R}^*$, existen micro-abiertos disyuntos G y H tales que $F_1 \subseteq G$ y $F_2 \subseteq H$. Basta tomar $G = F_1$, $H = F_1^c$.

PROPOSICION. $\mathbb{R}^*$ no es conexo.

Demostración. $\mathbb{R}^* = (E(0)) \cup (\mathbb{R}^* - E(0))$.

COROLARIO. Ningún intervalo no-estándar de longitud no infinitesimal es conexo.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ no es conexo.

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \cap E(0)) \cup (\mathbb{R} \cap [\mathbb{R}^* - E(0)]).$$

o también: $\mathbb{R} \subseteq E(0) \cup (\mathbb{R}^* - E(0))$.

DEFINICION. $A \subseteq \mathbb{R}^*$ es micro-compacto, si de todo *micro-recubrimiento*(1) de A, se puede extraer uno finito.

PROPOSICION. A es micro-compacto si y sólo si $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} E(\alpha_k)$.

---

(1) Micro-recubrimiento quiere decir "cubrimiento por micro-abiertos".

Demostración: $\Rightarrow$) Si A es compacto, puesto que $\{E(\alpha)/\alpha \in A\}$ es un micro-recubrimiento de A, podemos extraer un micro-recubrimiento finito $\{E(\alpha_k)/\alpha_k \in A,\ \ k = 1,2,\ldots,m\}$ de A.

$\Leftarrow$) Supongamos que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} E(\alpha_k)$ y sea $\{G_i/i \in I\}$ un micro-recubrimiento de A. Si $J = \{k \mid E(\alpha_k) \cap A \neq \emptyset\}$, entonces $A \subseteq \bigcup_{k\in J} E(\alpha_k)$ y para cada $k \in J$ existe $a \in A$ tal que $a \in E(\alpha_k)$. Como $\{G_i/i \in I\}$ "micro-recubre" a A, existe $i \in I$ tal que $a \in G_i$. Pero $E(\alpha_k)$ $(= E(a))$ es el mínimo micro-abierto que contiene a a, por lo tanto $E(\alpha_k) \subseteq G_i$. Luego, para cada $k \in J$, podemos escoger un G_{ik} tal que $E(\alpha_k) \subseteq G_{ik}$. En tal caso:

$$A \subseteq \bigcup_{k\in J} E(\alpha_k) \subseteq \bigcup_{k\in J} G_{ik}$$

Como J es finito $(\#J \leqslant m)$ se concluye que A es micro-compacto.

Ejemplo: Cualquier intervalo no-estándar de longitud infinitesimal es micro-compacto en $\mathbb{R}^*$.

Ningún intervalo cerrado de longitud no infinitesimal es micro-compacto en $\mathbb{R}^*$.

DEFINICION. Sea $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$. Decimos que f es "micro-continua en $\beta \in \mathbb{R}^*$" si $\tau \approx \beta$ implica $f(\tau) \approx f(\beta)$

Ejemplo. Sea

$$\mathfrak{f}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leqslant 0 \\ (1/\varepsilon_o)\tau & \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant \varepsilon_o \\ 1 & \text{si } \tau \geqslant \varepsilon_o \end{cases}$$

donde $\varepsilon_o > 0$ y $\varepsilon_o \approx 0$. (Fig.1)

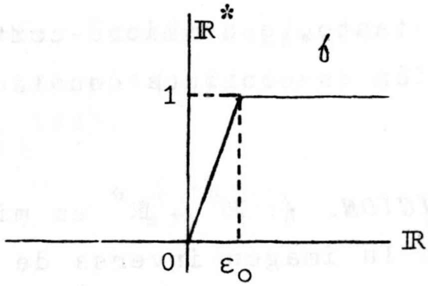

Figura 1

$0 \approx \varepsilon_o$ pero $\mathfrak{f}(0) = 0 \not\approx 1 = \mathfrak{f}(\varepsilon_o)$; por lo tanto $\mathfrak{f}$ no es micro-continua. Obsérvese que $\mathfrak{f}$ es continua con la topología de orden.

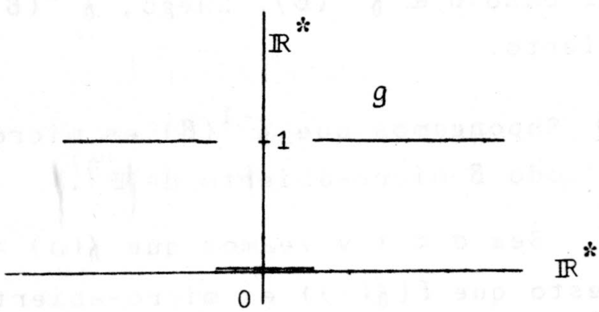

Figura 2

Ejemplo: Sea

$$g(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \not\approx 0 \\ 0 & \text{si } \tau \approx 0 \end{cases} \quad \text{(Fig. 2)}$$

Para $\alpha \approx 0$, si $\tau \approx \alpha$ entonces $\tau \approx 0$, luego $g(\tau) = 0 = g(\alpha)$.
Para $\alpha \not\approx 0$; si $\tau \approx \alpha$ entonces $\tau \not\approx 0$, luego $g(\tau) = 1 = g(\alpha)$.

Por lo tanto, g es micro-continua.
g también es continua con la topología de orden.

PROPOSICION. $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ es micro-continua si y sólo si la imagen inversa de cualquier subconjunto micro-abierto de $\mathbb{R}^*$ es micro-abierto.

Demostración. $\Rightarrow$) Sea B un micro-abierto de $\mathbb{R}^*$ y tomemos $\tau \in f^{-1}(B)$, entonces $f(\tau) \in B$ y como f es micro-continua, para $\sigma \approx \tau$ se tiene que $f(\sigma) \approx f(\tau) \in B$. Por lo tanto, $f(\sigma) \in B$. En tal caso $\sigma \in f^{-1}(B)$. Luego, $f^{-1}(B)$ es un micro abierto.

$\Leftarrow$) Supongamos que $f^{-1}(B)$ es micro-abierto para todo B micro-abierto de $\mathbb{R}^*$.

Sea $\sigma \approx \tau$ y veamos que $f(\sigma) \approx f(\tau)$.
Puesto que $E(f(\tau))$ es micro-abierto, entonces $f^{-1}(E(f(\tau)))$ es micro-abierto. Además, $\tau \in f^{-1}(E(f(\tau)))$ ya que $f(\tau) \in E(f(\tau))$; luego $\sigma \in f^{-1}(E(f(\tau)))$, entonces $f(\sigma) \in E(f(\tau))$. Por lo tanto, $f(\sigma) \approx f(\tau)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Takeuchi, Yu, "Estructuras Topológicas en $\mathbb{R}^*$", Boletín de Matemáticas, Vol. XVIII Nº1, 2, 3 pp. 36-72.

[2] Takeuchi, Yu, *Teoría de funciones no-estándar*, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, 1983.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.