Boletín de Matemáticas
Vol. XIX, N° 1 (1985) **APUNTES**

LA REGLA DE CRAMER Y EL NUMERO *e*

Ramón Fandiño Arbelaez

RESUMEN. En este artículo se dan estimativos para el número de operaciones aritméticas que hay que efectuar al calcular determinantes por menores, resolver sistemas de ecuaciones lineales por regla de Cramer e invertir matrices por el método de la matriz adjunta.

ABSTRACT. Here we give estimates for the number of arithmetic operations involved in the calculation of determinants by minors, resolution of linear sistems by Cramer's rule and inversion of matrices by the method of the adjoint matrix.

OBJETO. Todos sabemos lo ardua que resulta la tarea bien sea de calcular un determinante, o de resolver un sistema de ecuaciones lineales, o de invertir una matriz, por el gran número de operaciones aritméticas involucradas.

El objeto de este artículo es dar unos estimativos buenos de dicho número y de paso mostrar que el hombre simplemente no puede con estas tareas y muy pronto tiene que pedirle ayuda a la máquina.

DEFINICIONES. Si definimos:

d_n como el número de operaciones aritméticas que hay que efectuar para calcular el valor de un determinante de orden n por medio del *desarrollo por menores*.

c_n como el número de operaciones aritméticas que hay que efectuar para resolver un sistema de ecuaciones lineales de orden n por medio de la *regla de Cramer*.

i_n como el número de operaciones aritméticas que hay que efectuar para invertir una matriz de orden n por medio de la *matriz adjunta*.

Veremos que

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{n!} = e$, y por consiguiente $d_n \sim en!$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{(n+1)!} = e$, y por consiguiente $c_n \sim e(n+1)!$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{i_n}{(n+1)!} = e$, y por consiguiente $i_n \sim e(n+1)!$

RESULTADOS.

1) Al desarrollar un determinante de orden n por menores hay que calcular n determinantes de orden $(n-1)$ además de efectuar n multiplicaciones y $(n-1)$ sumas.

Luego d_n viene dado por la fórmula de recurrencia:

$$d_n = nd_{n-1} + n + n-1 \quad \text{para } n > 1$$

$$\text{para } n = 1, \quad d_1 = 0.$$

Los primeros términos de la sucesión son:

{0, 3, 14, 63, 324, 1955, 13698 109599, 986408, 9864099, 108505101,...}

Como se ve es una sucesión que crece muy rápidamente.

Tomemos ahora la sucesión $\frac{d_n}{n!}$ y calculemos sus primeros términos:

$$\frac{d_1}{1!} = 0 \qquad \frac{d_7}{7!} = 2,7178571$$

$$\frac{d_2}{2!} = 1,5 \qquad \frac{d_8}{8!} = 2,7182291$$

$$\frac{d_3}{3!} = 2,333 \qquad \frac{d_9}{9!} = 2,718276$$

$$\frac{d_4}{4!} = 2,625 \qquad \frac{d_{10}}{10!} = 2,7182812$$

$$\frac{d_5}{5!} = 2,7 \qquad \frac{d_{11}}{11!} = 2,7182815$$

$$\frac{d_6}{6!} = 2,7152777 \qquad \vdots$$

Se ve una clara tendencia hacia e.

Nuestro primer resultado es precisamente este límite.

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_n}{n!}$ (Suponiendo que existe!)

Como $d_n = nd_{n-1} + 2n - 1.$

Entonces: $\frac{d_n}{n!} = \frac{d_{n-1}}{n-1!} + \frac{2}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$

Que podemos escribir

$$0 = \left(\frac{d_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{d_n}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \frac{1}{(n-1)!}$$

Ahora, aplicando el teorema de la serie telescópica y la serie para e, tenemos:

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{d_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{d_n}{n!}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$

Luego

$$0 = (d_1 - L) + (1-0) + (e-1).$$

Pero como d_1 es 0, tenemos $L = e$.

Este límite $\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n!} = e$, es una curiosa relación entre d_n, $n!$ y e.

Como la sucesión $\frac{d_n}{n!}$ es muy rápida (la rapidez de tendencia hacia e) y las sucesiones d_n y $en!$ son asintóticamente iguales, un buen estimativo para el número d_n es

(1) $d_n \sim en!$ (ver tabla)

2) Al resolver un sistema cuadrado de orden n por medio de la regla de Cramer hay que calcular $(n+1)$ determinantes de orden n además de efectuar n divisiones.

Luego c_n está dado por

$$c_n = (n+1)d_n + n, \quad \text{para } n \geqslant 1.$$

Conociendo los valores de d_n para cada n, podemos calcular fácilmente los valores de c_n.
Pero ahora veamos que $\lim \frac{c_n}{(n+1)!} = e$.

Es claro, pues

$$\frac{c_n}{(n+1)!} = \frac{d_n}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \quad y \quad \frac{d_n}{n!} \to e \quad y \quad \frac{n}{(n+1)!} \to 0$$

$$(n \to \infty)$$

La sucesión $\frac{c_n}{(n+1)!}$ también es muy rápida, luego un buen estimativo para el número c_n es:

(2) $c_n \sim e(n+1)!$ (ver tabla)

3) Al invertir una matriz utilizando el teorema de la matriz adjunta hay que calcular un determinante de orden n y n^2 determinantes de orden $(n-1)$ además de efectuar n^2 divisiones.

Luego

$$i_n = d_n + n^2 d_{n-1} + n^2 \quad \text{para } n \geq 1$$

con $i_1 = 1$.

Por medio de esta fórmula nos queda muy fácil calcular los valores i_n.

El límite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i_n}{(n+1)!}$, también es e.

En efecto:

$$\frac{i_n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{d_n}{n!} + \frac{n}{n+1} \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^2}{(n+1)!}$$

que claramente tiende a e cuando $n \to \infty$.

Un buen estimativo para i_n es:

(3) $i_n \sim e(n+1)!$ (ver tabla)

Los resultados (1), (2) y (3) nos muestran claramente cuan rápidamente se limitan las posibilidades del hombre y aún del computador en cuanto se refiere al cálculo de terminantes, sistemas de ecuaciones e inversión de matrices, por los métodos de menores, regla de Cramer y matriz adjunta respectivamente. Obviamente estos métodos solo se usan para demostraciones teóricas y para algunos ejercicios de clase. En la práctica se utiliza frecuentemente el método de Gauss o sus modificaciones y los valores de d_n, c_n, i_n son para n grande, aproximadamente del orden: [1].

$$d_n = 2\frac{n^3}{3} + 0(n^2)$$

$$c_n = 2\frac{n^3}{3} + 0(n^2)$$

$$i_n = 2n^3 + 0(n^2)$$

que obviamente son valores mucho menores comparados con $en!$ y $e(n+1)!$

Por ejemplo, si se nos ocurriera acometer la tarea de calcular el valor de un determinante de orden 10, por el método de menores, tendríamos que efectuar alrededor de $e.10!$ operaciones, o sea del orden de 10 millones. No es necesario ir tan lejos, no más para invertir una matriz de orden 5, por el método de la matriz adjunta, hay que efectuar un número de operaciones del orden de: $e.6! \simeq 2.000$.
¿Cuáles son las posibilidades de no equivocarse...?

* *

BIBLIOGRAFIA

[1] Gastinel, N., *Analyse numérique linéaire*. Hermann, París. 1966.

*

N	DN	e N!	CN	e (N+1)!	IN	e (N+1)!
1	0	2.718281828459	1	5.436563656918	1	5.436563656918
2	3	5.436563656918	11	16.309690970754	7	16.309690970754
3	14	16.309690970754	59	65.238763883016	50	65.238763883016
4	63	65.238763883016	319	326.19381941508	303	326.19381941508
5	324	326.19381941508	1949	1957.1629164905	1924	1957.1629164905
6	1955	1957.1629164905	13671	13700.140915433	13655	13700.140915433
7	13698	13700.140915433	109591	109601.12332347	109542	109601.12332347
8	109599	109601.12332347	986399	986410.1099112	986335	986410.1099112
9	986408	986410.1099112	9864089	9864101.099112	9864000	9864101.099112
10	9864099	9864101.099112	108505099	108505112.09023	108504999	108505112.09023
11	108505110	108505112.09023	1302061331	1302061345.0828	1302061210	1302061345.0828
12	1302061343	1302061345.0828	16926797471	16926797486.076	16926797327	16926797486.076
13	16926797484	16926797486.076	236975164789	236975164805.07	236975164620	236975164805.07
14	236975164803	236975164805.07	3554627472059	3554627472076	3554627471863	3554627472076
15	3554627472074	3554627472076	56874039553199	56874039553216	56874039552974	56874039553216
16	56874039553215	56874039553216	966858672404680	966858672404670	966858672404420	966858672404670
17	966858672404690	966858672404670	17403456103284000	17403456103284000	17403456103284000	17403456103284000
18	17403456103284000	17403456103284000	330665665962400000	330665665967370000	330665665962400000	330665665967370000
19	330665665962400000	330665665967390000	6613313319248000000	6613313319247900000	6613313319247900000	6613313319247900000
20	6613313319248000000	6613313319247900000	1.3887957970421E+20	1.3887957970421E+20	1.3887957970421E+20	1.3887957970421E+20
21	1.3887957970421E+20	1.3887957970421E+20	3.0553507534926E+21	3.0553507534925E+21	3.0553507534926E+21	3.0553507534925E+21
22	3.0553507534926E+21	3.0553507534925E+21	7.0273067330333E+22	7.0273067330329E+22	7.0273067330331E+22	7.0273067330329E+22
23	7.0273067330333E+22	7.0273067330329E+22	1.6865536159279E+24	1.6865536159279E+24	1.6865536159279E+24	1.6865536159279E+24
24	1.6865536159279E+24	1.6865536159279E+24	4.2163840398198E+25	4.2163840398197E+25	4.2163840398198E+25	4.2163840398197E+25
25	4.2163840398198E+25	4.2163840398197E+25	1.0962598503531E+27	1.0962598503531E+27	1.0962598503531E+27	1.0962598503531E+27
26	1.0962598503531E+27	1.0962598503531E+27	2.9599015959534E+28	2.9599015959534E+28	2.9599015959535E+28	2.9599015959534E+28
27	2.9599015959534E+28	2.9599015959534E+28	8.2877244686695E+29	8.2877244686693E+29	8.2877244686694E+29	8.2877244686693E+29
28	8.2877244686695E+29	8.2877244686693E+29	2.4034400959142E+31	2.4034400959141E+31	2.4034400959142E+31	2.4034400959141E+31
29	2.4034400959142E+31	2.4034400959141E+31	7.2103202877426E+32	7.2103202877423E+32	7.2103202877424E+32	7.2103202877423E+32
30	7.2103202877426E+32	7.2103202877423E+32	2.2351992892002E+34	2.2351992892001E+34	2.2351992892002E+34	2.2351992892001E+34
31	2.2351992892002E+34	2.2351992892001E+34	7.1526377254406E+35	7.1526377254403E+35	7.1526377254406E+35	7.1526377254403E+35
32	7.1526377254406E+35	7.1526377254403E+35	2.3603704493954E+37	2.3603704493953E+37	2.3603704493954E+37	2.3603704493953E+37
33	2.3603704493954E+37	2.3603704493953E+37	8.0252595279444E+38	8.0252595279441E+38	8.0252595279443E+38	8.0252595279441E+38
34	8.0252595279444E+38	8.0252595279441E+38	2.8088408347805E+40	2.8088408347805E+40	2.8088408347805E+40	2.8088408347805E+40
35	2.8088408347805E+40	2.8088408347805E+40	1.011182700521E+42	1.011182700521E+42	1.011182700521E+42	1.011182700521E+42
36	1.011182700521E+42	1.011182700521E+42	3.7413759919277E+43	3.7413759919276E+43	3.7413759919276E+43	3.7413759919276E+43
37	3.7413759919277E+43	3.7413759919276E+43	1.4217228769325E+45	1.4217228769325E+45	1.4217228769325E+45	1.4217228769325E+45
38	1.4217228769325E+45	1.4217228769325E+45	5.5447192200368E+46	5.5447192200367E+46	5.5447192200369E+46	5.5447192200367E+46
39	5.5447192200368E+46	5.5447192200367E+46	2.2178876880147E+48	2.2178876880147E+48	2.2178876880147E+48	2.2178876880147E+48
40	2.2178876880147E+48	2.2178876880147E+48	9.0933395208603E+49	9.0933395208602E+49	9.0933395208604E+49	9.0933395208602E+49
41	9.0933395208603E+49	9.0933395208602E+49	3.8192025987613E+51	3.8192025987612E+51	3.8192025987613E+51	3.8192025987612E+51
42	3.8192025987613E+51	3.8192025987612E+51	1.6422571174674E+53	1.6422571174673E+53	1.6422571174674E+53	1.6422571174673E+53
43	1.6422571174674E+53	1.6422571174673E+53	7.2259313168566E+54	7.2259313168561E+54	7.2259313168563E+54	7.2259313168561E+54
44	7.2259313168566E+54	7.2259313168561E+54	3.2516690925855E+56	3.2516690925852E+56	3.2516690925855E+56	3.2516690925852E+56
45	3.2516690925855E+56	3.2516690925852E+56	1.4957677825893E+58	1.4957677825892E+58	1.4957677825894E+58	1.4957677825892E+58
46	1.4957677825893E+58	1.4957677825892E+58	7.0301085781697E+59	7.0301085781692E+59	7.0301085781698E+59	7.0301085781692E+59