*Boletín de Matemáticas*
*Vol. XXI, Nº 1, (1987)*

**APUNTES**

# DOS SENCILLAS APLICACIONES DE LAS SUCESIONES DE 0'S Y 1'S

*Wilson Castrellón*

La construcción de los números, a partir de los cortes de Dedekind, hace evidente que hay una familia no enumerable de subconjuntos de $\mathcal{Q}$, totalmente ordenada por inclusión. Si se asume la Hipótesis Generalizada del Continuo, el resultado es un caso particular de la Proposición 1 de este artículo.

Sin asumir GCH es posible dar un número infinito de cardinales para los cuales se cumple la Proposición 1. Estos cardinales son los definidos por:

$$T(\alpha) = \operatorname{Sup}\{\alpha, 2^{\alpha}, 2^{2^{\alpha}}, \ldots\}$$

para cualquier $\alpha$ cardinal; en especial se puede conseguir una sucesión estrictamente creciente de ellos, definida por inducción transfinita:

$$\eta_1 = T(1)$$
$$\eta_\lambda = T(\operatorname{Sup}_{\gamma<\lambda}\{T(\gamma)\})$$

Este hecho hace pensar en la posibilidad de demostrar la proposición general sin hacer uso de GCH. Probar su veracidad o imposibilidad sería motivo de un nuevo artículo.

***PROPOSICION** 1.* (ZFC + GCH)

Para todo cardinal infinito $K$, existe una familia $F$ de subconjuntos de $K$ totalmente ordenada por inclusión y de cardinal $2^K$.

**Demostración.** Primero obsérvese que el teorema es equivalente al hecho de que exista un par de conjuntos $A$ y $B$ tales que $|A| = 2^K$, $A$ tiene un orden total y $B$ es un subconjunto denso en $A$, $|B| = K$. Tomando la familia $F$ como

$$F := \{B_s : s \in A\} \text{ donde } B_s := \{b \in B : b < s\}$$

obtenemos $|A| = 2^K$ subconjuntos anidados de $B$. Usando la biyección que existe entre $B$ y $K$, obtenemos el resultado deseado.

Construyamos ahora $A$ y $B$.

Sea $A$ el conjunto de las sucesiones de ceros y unos de longitud $K$ que no terminan en unos, es decir

$$A := \{s : K \to \{0,1\} : \forall\delta < K\ \exists\alpha, \delta < \alpha < K, s(\alpha) = 0\}$$

con el orden lexicográfico. Entonces $|A| = 2^K$.

Sea $B$ el conjunto de las sucesiones de longitud $K$ tales que a partir de un punto, son constantemente iguales a cero, es decir

$$B := \{s \in A : \exists\delta < K, \forall\alpha > \delta, s(\alpha) = 0\}.$$

Asumiendo la Hipótesis Generalizada del Continuo $2^K = K^+$ o más exactamente una de sus equivalencias, que dice que:

$$\text{Sup}\{2^\delta : \delta < K\} = K,$$

es fácil ver que

$$|B| = \sum_{\delta<K} 2^\delta = \underset{\delta<K}{\text{Sup}}\{2^\delta\} = K$$

***PROPOSICION.*** $B$ es denso en $A$.

Para probar esto, sean $t, r \in A$ dos sucesiones diferentes, con $t < r$. Entonces existe un $\delta < K$ mínimo tal que $t(\delta) = 0$ y $r(\delta) = 1$.

Por lo tanto, si $\alpha < \delta$, $t(\alpha) = r(\alpha)$.

Como $t \in A$, existe un $\eta$ con $\delta < \eta < K$ y $t(\eta) = 0$, ya que $t$ no termina en unos.

Sea $b: K \to [0,1]$ definido por

i) si $\alpha < \eta$, $b(\alpha) = t(\alpha)$

ii) $b(\eta) = 1$

iii) si $\alpha > \eta$, $b(\alpha) = 0$.

Por (iii), $b$ pertenece a $B$ y por (ii), $b > t$. Como $b$ coincide con $t$ en las primeras $\eta$ posiciones, y $\eta > \delta$, $b < r$ por ser $t(\delta) = b(\delta) = 0 < 1 = r(\delta)$. Por lo tanto $t < b < r$, lo que prueba que $B$ es denso en $A$. ▲

En el estudio de las teorías de orden total, encontramos un hecho curioso acerca de los números racionales: en ellos es posible sumergir cualquier orden total enumerable.

A continuación tenemos una generalización de esta propiedad, utilizando GCH. También es importante anotar que sin utilizar GCH la Proposición 2 es cierta para los cardinales $\eta_\lambda$ definidos en la primera parte de este artículo.

***PROPOSICION*** *2.* (ZFC + GCH)

Para todo cardinal infinito $K$, existe un conjunto $\langle A_K, <_A \rangle$, $|A_K| = K$ totalmente ordenado, tal que en él es posible sumergir cualquier orden total de cardinalidad $K$.

**Demostración.** Después de encontrar la prueba de este resultado, se conoció que en un trabajo de Hausdorff se demuestra un teorema más fuerte. ▲

*