UNA NOTA SOBRE CONVERGENCIA

Por
Gustavo Rubiano O.
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E.

RESUMEN

Se muestra la equivalencia en teoría de convergencia de dos definiciones de subsucesión, utilizando tanto los filtros como las redes.

En la literatura matemática, es frecuente encontrar las siguientes dos definiciones del concepto de subsucesión:

Definición 1. **(Revista Colombiana de Matemáticas, Vol.XVI, No. 3, 1982, pág. 83) Una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se llama propia si el conjunto pre-imagen de cada número natural es finito. Una sucesión S^* se llama una subsucesión de una sucesión S de puntos en X, $S : \mathbb{N} \to X$, X un conjunto, si existe una función propia g, tal que $S^* = S_\circ g$ la composición de funciones.**

Definición ii. **(Apostol, T.M. Análisis Matemático, Adisson Wesley, 1968.) Una subsucesión de $f : \mathbb{N} \to X$ es la compuesta de la función f con una función $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente.**

Para el lector no experto, estas dos definiciones parecerían estar lejos la una de la otra y más aún, en lo que respecta a su convergencia. El objeto de esta nota, resultado de charlas en un curso de topología de pregrado, es mostrar que, mediante la utilización de la teoría de la convergencia de filtros, o, la teoría de convergencia de redes, las propiedades de convergencia de la sucesión, se heredan exactamente igual, sobre cualquiera de estas dos definiciones de subsucesión; es decir, en teoría de convergencia ellas coinciden.

UTILIZACION DE LOS FILTROS

1. DEFINICION. Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{F} \subset 2^X$,de subconjuntos de X, es llamada un filtro sobre X, sii

i) $\emptyset \neq \mathcal{F}$
ii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
iii) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$
iv) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

2. DEFINICION. Sea $\mathcal{B} \subset 2^X$ una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de X. $\mathcal{B}$ se llama una base de filtro para X, si se cumple: Dados $A, B \in \mathcal{B}$ entonces, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \subset A \cap B$.

El nombre de base se justifica, ya que tenemos el siguiente resultado.

Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro para X, entonces la colección

$$\mathcal{F} \quad = \quad \{U \mid U \subset X, \text{ y}, B \subset U \text{ para algún } B \in \mathcal{B}\}$$

es un filtro sobre X. Lo notamos $\mathcal{F} = <\mathcal{B}>$.

3. DEFINICION. Dados dos filtros $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sobre X, decimos que $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{G}$, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. En el caso en que $\mathcal{F} = <\mathcal{B}>$, $\mathcal{G} = <\mathrm{C}>$ esto es equivalente a decir que, para cada elemento $C \in \mathrm{C}$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset C$.

4. DEFINICION. Una familia $\Gamma \subset 2^X$ se llama una topología para X, si se cumple.

i) $\emptyset \in \Gamma$
ii) $X \in \Gamma$
iii) Si $A, B \in \Gamma$ entonces $A \cap B \in \Gamma$
iv) Si $\{A_i\}$ es una colección en Γ, entonces $\bigcup A_i \in \Gamma$.

Los elementos de Γ son llamados abiertos, y dado un $x \in X$ decimos que $V \subset X$ es una vecindad de x, si existe $U \in \Gamma$ tal que $x \in U \subset V$. Note que el conjunto $\mathcal{V}_x$ de todas las vecindades de x forman un filtro para X.

Con las definiciones anteriores podemos definir la convergencia de una sucesión en un espacio topológico, un conjunto con una topología.

Decimos que la sucesión (x_n) de puntos del espacio topológico (X, Γ), converge al punto x, $x_n \to x$, sii. Para cada vecindad V de x, están en V todos los términos de la sucesión, exceptuando quizás un número finito de ellos.

Lo que equivale a decir:

Para cada vecindad V de x, existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$, tal que, si $m > n$ entonces $x_m \in V$,

que a su vez es equivalente a,

Para cada vecindad V de x, existe un entero positivo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \subset V$.

El filtro elemental $\mathcal{F}$ asociado a la sucesión (x_n), es el filtro que tiene como base el conjunto $\mathcal{B}$ de los elementos de la forma

$$B_n = \{f(n), f(n+1), \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

donde f es la función $f : \mathbb{N} \to X$ de nuestra segunda definición de subsucesión.

Por lo anterior nuestra definición de convergencia es equivalente a:

Para cada vecindad V de x, existe un $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $B_n \subset V$,

esto es,

El filtro $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro $\mathcal{V}_x$ de las vecindades de x es decir, $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}$.

Ahora, sea $\mathcal{F}^*$ el filtro elemental asociado a la función $f \circ k : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to X$. La base $\mathcal{B}^*$ de este filtro está dada por los elementos de la forma

$$B_{k(i)} = \{f(k(i)), f(k(i+1)), \ldots\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

En estos términos, para que la "subsucesión" $f_0 k$ herede las propiedades de convergencia de f, lo que necesitamos es:

El filtro $\mathcal{F}^*$ es más fino que el filtro $\mathcal{F}$, esto es, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$, o, Cada elemento de $\mathcal{B}$ contiene un elemento de $\mathcal{B}^*$; lo que equivale a decir que,

Dado un elemento $B_n \in \mathcal{B}$ existe un $B_{k(m)} \in \mathcal{B}^*$, tal que, $B_{k(m0)} \subset B_n$,

lo que equivale a,

Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\{f(k(m)), f(k(m+1)), \ldots\} \subset \{f(n), f(n+1), \ldots\}.$$

Para obtener esto último es suficiente que,

Dado $n \in \mathrm{N}$, existe $m \in \mathrm{N}$ tal que $\{k(m), k(m+1), \ldots\} \subset \{n, n+1, \ldots\}$

y para obtener esta última condición necesitamos que:

(1) No existe $A \subset \mathrm{N}$, A infinito tal que $k(A)$ sea acotado.

Pues si para $A = \{m_1, m_2, \ldots\}$ el conjunto $\{k(m_1), k(m_2), \ldots\}$ es acotado por algún $p \in \mathrm{N}$, entonces para $\{p, p+1, \ldots\}$ no se puede encontrar $m \in \mathrm{N}$ tal que $\{k(m), k(m+1), \ldots\} \subset \{p, p+1, \ldots\}$ pues siempre existirá un $m_i \in A$ con $m_i > m$ tal que $k(m_i) < p$.

5. PROPOSICION. La condición (1) sobre la función k, se cumple si y sólo si K es propia.

DEMOSTRACION. Si $k^{-1}(n)$ es finita para cada $n \in \mathrm{N}$, entonces dado A un conjunto infinito, $k(A)$ no es acotado, pues de serlo, existiría un $p \in \mathrm{N}$ tal que $A \subset k^{-1}(1) \cup k^{-1}(2) \cup \ldots \cup k^{-1}(p)$, lo que implica que A es finito. Si no existe $A \subset \mathrm{N}$, A infinito tal que $k(A)$ sea acotado entonces $k^{-1}(n)$ es finito para cada $n \in \mathrm{N}$, pues si para algún $p \in \mathrm{N}$, $k^{-1}(p)$ es infinito, entonces el conjunto $A = \{m \in \mathrm{N} | k(m) = p\}$ es infinito y su imagenpor k es acotada.

Para la suficiencia, supongamos que k es una función propia y sea $n \in \mathrm{N}$ un natural dado; consideremos el conjunto $T = k^{-1}(\{1, 2, \ldots, n\})$ el cual es finito y llamemos t al máximo de T. Entonces, para $m = t + 1$ se tiene que $\{k(m), k(m+1), \ldots\} \subset \{n, n+1, \ldots\}$. Pues de lo contrario $k(m+i) \notin \{n, n+1, \ldots\}$ para algún $i \in \mathrm{N}$, $m+i \in T$ y esto contradice la maximalidad de t. Luego para que $(x_n) \to x$ implique $x_{k(n)} \to x$, bastaque k satisfaga cualquiera de las condiciones en las dos definiciones de subsucesión.

UTILIZACION DE LAS REDES.

6. DEFINICION. Sea D un conjunto no vacío y $\geq$ una relacion en D.

Entonces $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido si y sólo si satisface:

i) $\geq$ es transitiva

ii) $\geq$ es reflexiva

iii) Si $a, b \in D$, entonces existe $c \in D$ tal que $c \geq a$, $c \geq b$.

7. DEFINICION. Sea X un conjunto. Una red S en X, es una función $S : (D, \geq) \to X$ donde $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido. A S la notamos como $(x_d)_{d \in D}$.

8. DEFINICION. Sean $(D^*, \geq^*), (D, \geq)$ dos conjuntos dirigidos, y, $S : (D, \geq) \to X$ una red en X. Dada $N : (D^*, \geq^*) \to (D, \geq)$ una red en D, tal que para cada $p \in D$ existe $p' \in D^*$ con la propiedad de que:

$$d' \geq^* p' \text{ implica } N(d') \geq p.$$

Decimos que la red $S_0N : (D^*, \geq^*) \to X$ es una subred de S.

9. DEFINICION. Dado un espacio topológico (X, Γ), decimos que la red $(x_d)_d \in D$ converge al punto $p \in X$, si y sólo si, dado cualquier vecindad V_p de p, existe un $d_0 \in D$, tal que para cada $d \geq d_0$, tenemos que $x_d \in V_p$.

Por supuesto, para cada subred de una red convergente, también es convergente al mismo punto.

Dada una sucesión $f : \mathrm{N} \to X$ ella es una red sobre X. Luego si k es una función $k : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$,k es una red, para que, $f \circ k : \mathrm{N} \to X$ sea subred de f, necesitamos que k satisfaga

Para cada $n \in \mathrm{N}$, existe un $m \in \mathrm{N}$ tal que si $p \geq m$, entonces $k(p) \geq n$.

De esta condición inferimos que:

i) No existe $A \subset \mathrm{N}$, A infinito tal que $k(A)$ sea acotado.

Pues si q es una cota para $k(A)$, entonces para este q se negaría la existencia del m en la condición de subred.

Si i) se satisface, entonces dado $n \in \mathrm{N}$, sea $r = \max k^{-1}(\{1, 2, \ldots, n\})$; si m es tal que $m \geq r + 1$, para $p \geq m$ tenemos $k(p) \geq n$.

Por la proposición 5, podemos concluir que

Dada una sucesión x_n en el espacio X, si k es una función propia de N en N, $f_0k : \mathrm{N} \to X$ es subred de f. Lo que implica que,

$$\text{Si } x_n \to x \text{ entonces } x_{k(n)} \to x.$$

Una "visualización" de la equivalencia de estas dos definiciones de subsucesión se podría plantear en los siguientes términos; dada una sucesión convergente en un espacio toplógico X, podemos repetir finitamente cuantos términos queramos y al mismo tiempo podemos desordenarlos, sin que se altere la convergencia.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI. N., General Topology., Parte 1., Paris, Hermann, 1970.

[2] CHRISTENSON CH., VOXMAN W., Aspects of topology ., Ed. Marcel Dekker., 1977.