# CONSISTENCIA, VALIDEZ Y COMPLETITUD DE UN SISTEMA PROPOSICIONAL DE LOGICA TEMPORAL

JOSE M. MUÑOZ QUEVEDO

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia

**Resumen.** Se examinan desde el punto de vista proposicional, los requerimientos de un sistema de lógica temporal adecuado para el desarrollo de una teoría de conjuntos en la cual el universo se expanda con el tiempo. Se propone un sistema tal y se prueban su consistencia, su validez y su completitud. Además se analizan semánticamente las consecuencias de añadir otros axiomas relevantes.

## I. MOTIVACION.

George Cantor usaba en su teoría de conjuntos una definición de conjuntos por comprensión un tanto vaga y general (ver [2],pg. 85), la cual puesta en forma explícita y precisa por Frege (ver [5],§9), sería a grandes rasgos en la terminología actual, el axioma siguiente:

Sea $\varphi(\dots,x)$ cualquier propiedad de objetos; entonces existe el conjunto de los objetos que poseen dicha propiedad, es decir, la fórmula siguiente es un axioma:

$$\exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow \varphi(\dots,x))$$

El permitir esta forma tan amplia y general de formar conjuntos, llevó rápidamente a la aparición de contradicciones en la teoría.

Aún a pesar de precisarse el concepto de propiedad y restringirse el axioma anterior a propiedades descriptibles en el lenguaje de la teoría de conjuntos, surgieron nuevamente contradicciones. Una de ellas, encontrada por Bertrand Russell en 1.902, causó un verdadero desconcierto entre quienes trabajaban en los problemas de fundamentación de la Matemática, debido a que dicha contradicción no surgió en un area especializada o sofisticada de la teoría, sino en sus propios cimientos. Russell se la comunicó en carta a Gottlob Frege en los momentos en que éste daba

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

los toques finales a su trabajo de diez años (1.893-1.903) "Grundgesetze der Arithmetik", basado precisamente en la teoría cantoriana de conjuntos. Recordemos brevemente la paradoja de Russel:

$$\text{Si } A = \{x \backslash \neg(x \in x)\} \text{ y } p \text{ es } A \in A, \text{ se obtiene } p \leftrightarrow \neg p.$$

Es fácil deducir formalmente de esta equivalencia una contradicción:

| | |
|---|---|
| 1. $p \to \neg p$ | (Parte "$\to$" de la paradoja) |
| 2. $\neg p \to \neg p$ | (Teorema lógico) |
| 3. $\neg p$ | (de $\alpha \to \beta$ y $\neg\alpha \to \beta$ se deduce $\beta$) |
| 4. $\neg p \to p$ | (parte "$\leftarrow$" de la paradoja) |
| 5. $p \to p$ | (Teorema lógico) |
| 6. $p$ | (La misma razón de 3.) |

En consecuencia, si se usan por ejemplo los primeros tres axiomas de un sistema deductivo como el propuesto en [1], pg. 45, se obtiene que de $p \leftrightarrow \neg p$ se deduce $p$ y $\neg p$ (En simbología lógica, $(p \leftrightarrow \neg p) \vdash p, \neg p$).

La paradoja de Russell produce una contradicción aún en algunas lógicas más débiles que la clásica, como por ejemplo en la lógica intuicionista. En esta vale la demostración por contradicción débil, es decir,

$$\text{Si } \Gamma, \alpha \vdash \beta, \neg\beta \text{ entonces } \Gamma \vdash \neg\alpha \qquad (CD)$$

Usemos este principio para producir una contradicción a partir de $p \leftrightarrow \neg p$, es decir, de $p \to \neg p$ y $\neg p \to p$ :

Claramente $p \to \neg p, p \vdash p, \neg p$ luego por CD , $p \to \neg p \vdash \neg p$.

Análogamente, $\neg p \to p, \neg p \vdash p, \neg p$ luego por CD, $\neg p \to p \vdash \neg(\neg p)$.

En consecuencia:

$$p \to \neg p, \neg p \to p \vdash \neg p, \neg(\neg p)$$

o sea que se deduce una contradicción.

¿Cómo tratar de cambiar las cosas para que, manteniendo el axioma de comprensión tan general como sea posible, no se presenten las paradojas?

Dentro de la lógica clásica, las formas más conocidas y usadas de conservar el axioma amplio de comprensión, son a) la teoría de tipos de Russell y b) las diversas variantes de la Teoría de Clases, en las cuales se hace distinción entre las clases propias (aquellas que no pueden ser miembros de otras clases) y los conjuntos, o sea aquellas clases que sí pueden pertenecer a otras. El axioma de comprensión toma la forma restringida siguiente:

$$\exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow (\exists y)(x \in y) \wedge \varphi(\ldots, x)).$$

Permite formar clases constituídas solamente por conjuntos. La paradoja de Russell se evita ya que $\{x|(\exists y)(x \in y) \wedge x \notin x\}$ resulta ser una clase propia y en particular no puede pertenecer a si misma.

En la teoría de tipos de Russell, las variables se jerarquizan; existen numerables tipos de variables, pero cada variable es de un único tipo; "$x \in y$" sólo es fórmula bien formada si el tipo de $x$ es estrictamente menor que el tipo de $y$. Con esta restricción sintáctica,"$x \in x$" no es una fórmula admisible y así el conjunto paradójico ni siquiera puede formarse.

Otra alternativa natural consiste en cambiar la lógica clásica por otra más débil, aún cuando en general esto solamente no basta, como se demostró al deducir una contradicción dentro de la lógica intuicionista.

El presente trabajo tiene por objeto mostrar la posibilidad de una nueva opción, en la cual a pesar de admitirse un axioma de comprensión prácticamente tan amplio como el de Cantor, no se presente la paradoja de Russell (y quizás ninguna otra). Dicha alternativa radica en hacer intervenir el tiempo en el proceso de formación de los conjuntos: No todos los conjuntos existen simultáneamente sino que el universo se va expandiendo con el paso del tiempo.

Por ejemplo, intuitivamente, primero existe un conjunto y posteriormente existe su conjunto de partes; de esta forma el universo de los conjuntos viene a ser un universo en expansión, como el postulado por la Física actual; inclusive se puede pretender que sea semejante al modelo del "Bing bang"; en un primer instante podría existir solamente el conjunto vacío o unos cuantos conjuntos primitivos (los "quarks") y los demás conjuntos se irían creando a partir de ellos, a medida que transcurre el tiempo.

Es claro que dicho desarrollo de una teoría temporal de conjuntos sólo será posible si de antemano se crea una lógica temporal dentro de la cual se establezcan los axiomas conjuntistas y se lleven a cabo las deducciones. El presente trabajo es un primer paso en esa dirección: La construcción de un cálculo proposicional temporal que sirva como un marco dentro del cual se pueda posteriormente realizar una teoría temporal de conjuntos. Haremos notar que en particular la paradoja de Russell no será deducible en el sistema propuesto.

## II.LOGICA DEL TIEMPO GRAMATICAL NO MENSURABLE.

Debido a que creemos que la forma como se manejan los conceptos de pasado, presente y futuro en el lenguaje usual puede servirnos de guía y de medio de contrastación de nuestros resultados, insistiremos en trabajar dentro de una lógica temporal sencilla y conocida, en la cual no tengamos que usar ni cuantificar variables temporales, utilizando tan solo la sucesión temporal PASADO-PRESENTE-

FUTURO, similar a la de los tiempos gramaticales de muchas lenguas indoerupeas.

Tampoco consideraremos qué tan en el pasado o qué tan en el futuro ha tenido lugar un evento, por lo cual a esta lógica se le llama del ***tiempo gramatical no mensurable*** . (Ver p. ej.[6]). En ella poseemos las siguientes expresiones básicas:

1. $P(\varphi)$ (En el pasado, $\varphi$; en algún instante del pasado, $\varphi$)
2. $H(\varphi)$ (Siempre en el pasado, $\varphi$; en todo instante del pasado, $\varphi$)
3. $F(\varphi)$ (En el futuro, $\varphi$)
4. $G(\varphi)$ (Siempre en el futuro, $\varphi$)

El lenguaje constará de los símbolos que intervienen en un cálculo proposicional clásico, junto con los que podríamos llamar símbolos de operador modal $P$, $H$, $F$ y $G$ acabados de dar; a las reglas de formación de fórmulas del cálculo proposicional, añadimos la siguiente:

*Si $\varphi$es una formula, también lo serán $P(\varphi), H(\varphi), F(\varphi), y\ G(\varphi)$.*

Como axiomas, consideremos todos los de un cálculo proposicional clásico por ejemplo los del sistema dado en [1], pg. 45, junto con los siguientes:

1. $H(p \rightarrow q) \rightarrow (P(p) \rightarrow P(q))$
2. $G(p \rightarrow q) \rightarrow (F(p) \rightarrow F(q))$
3. $F(H(p)) \rightarrow p$
4. $P(G(p)) \rightarrow p$
5. $P(P(p)) \rightarrow P(p)$
6. $F(F(p)) \rightarrow F(p)$

El primero afirma que si siempre en el pasado $p$ implica $q$, entonces si en algún momento del pasado se da $p$, también debe haber un momento del pasado en el cual se da $q$. El segundo expresa la misma relación, pero hacia el futuro.

El tercero y el cuarto constatan que tanto la existencia futura de un momento en el cual habrá sido siempre verdad $p$, como la existencia pasada de un instante en el cual será siempre verdad $p$, implican uno y otro la verdad presente de $p$.

El quinto establece la transitividad de la posición relativa de los diferentes instantes hacia el pasado: "Sucedió un día que sucedió un día $p$" implica "Sucedió un día $p$". El sexto afirma esa transitividad pero hacia el futuro.

Este sistema fué expuesto por Nino Cocchiarella en 1965 (Ver [4]).

Todos estos axiomas son bastante naturales en el sentido de que expresan propiedades innegables de lo que podríamos llamar en términos kantianos ***nuestra intuición pura del tiempo.***

Los operadores $H$ y $G$ pueden definirse en términos de $P$ y $F$, ya que por ejemplo,

$$H(\varphi) \leftrightarrow \neg P(\neg\varphi)$$

equivalencia que tomaremos como axioma.

En consecuencia, $\neg P(\varphi) \leftrightarrow H(\neg\varphi)$ y $\neg H(\varphi) \leftrightarrow P(\neg\varphi)$.

Algo completamente análogo sucede con $F$ y $G$.

Es claro que para tratar de construir una teoría temporal de conjuntos, es necesario ampliar posteriormente este sistema a un cálculo de predicados. Dentro de este lenguaje y teniendo en cuenta la idea inicial de formación de los conjuntos con el paso del tiempo, un *axioma de compresión* tan general como el de Cantor, puede ser el siguiente:

Dada una condición $\varphi(x)$ del lenguaje antes mencionado, podemos colectivizar a todos los objetos que en algún instante del pasado han cumplido la condición $\varphi$, es decir, existe de ahora en adelante el conjunto constituido por todos los elementos que en el pasado han verificado $\varphi$; en nuestra simbología, sería:

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow P(\varphi(x)))$$

o sea que si $A$ es un tal $y$,

$$A = \{x | P(\varphi(x))\}$$

El *axioma de extensionalidad* sería el clásico: Dos conjuntos son iguales si y solamente si poseen los mismos elementos.

Nos preguntamos: *¿ Se dará aquí la paradoja de Russell?*

Tomemos como $\varphi$ a la fórmula $\neg(x \in x)$; por el axioma de comprensión anterior,

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow P(\neg(x \in x)))$$

Si $A$ es un conjunto que cumple este caso particular del axioma,

$$\forall x[x \in A \leftrightarrow P(\neg(x \in x))]$$

En particular, si $x$ es $A$,

$$A \in A \leftrightarrow P(\neg(A \in A)) \tag{1}$$

propiedad un tanto extraña. Negando en los dos lados de la equivalencia anterior,

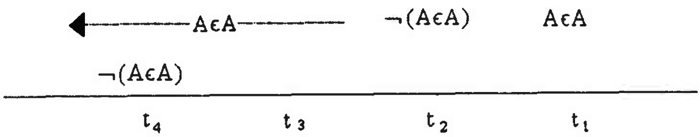
$$\neg(A \in A) \leftrightarrow \neg(P(\neg(A \in A)))$$

o sea

$$\neg(A \in A) \leftrightarrow H(A \in A) \tag{2}$$

propiedad igualmente extraña.

Supongamos que un instante $t_1$ es el presente.




Si $A \in A$ en el instante $t_1$, entonces por (1), $P(\neg(A \in A))$, luego debe existir otro instante $t_2 < t_1$, tal que en el instante $t_2$, $\neg(A \in A)$. Pero por (2) se deberá tener en $t_2, H(A \in A)$; así , si $t_3 < t_2$, en el instante $t_3$ se tendrá $A \in A$, pero por (1), habrá otro instante $t_4 < t_3$, tal que en $t_4$, $\neg(A \in A)$; como suponemos la transitividad del orden del tiempo, $t_4 t_2$, luego en $t_4$ se deberá tener $A \in A$, lo cual es una contradicción.

Si $\neg(A \in A)$ en el instante $t_1$, entonces por (2) siempre en el pasado de $t_1$, $A \in A$; si existe $t_2 < t_1$, $A \in A$ en el instante $t_2$, pero por (1), existirá $t_3 < t_2$ tal que en $t_3$, $\neg(A \in A)$, o sea que en $t_3$, $A \in A$ y $\neg(A \in A)$, llegándose nuevamente a una contradicción.

Si analizamos con más detalle la "demostración" de contradicción anterior, nos damos cuenta de que en la primera parte debemos postular la existencia del instante $t_3$ anterior a $t_2$, ya que si no existen instantes anteriores a $t_2$, aún es cierto en $t_2$ $H(A \in A)$, o sea $\neg(P(\neg(A \in A)))$, por no existir un momento anterior a $t_2$ donde se tenga $\neg(A \in A)$ y no se llegaría nunca a la contradicción establecida. Análogamente, en la segunda parte debemos postular la existencia del instante $t_2$ anterior a $t_1$.

Si queremos que este hecho se refleje en nuestro sistema sintáctico y tengamos así la posibilidad de establecer formalmente una contradicción como lo hicimos en el numeral anterior, debemos introducir algún axioma adicional que fuerce la existencia de al menos dos instantes en sucesión anteriores a $t_2$.

Una manera de hacerlo es agregar como axioma

$$H(\varphi) \rightarrow P(\varphi)$$

el cual es equivalente a $\neg P(\neg\varphi)) \rightarrow P(\varphi)$, equivalente a su vez a $P(\neg\varphi) \vee P(\varphi)$. Este último implica en particular que no existe un primer instante, ya que si $t$ lo fuese, en $t$ no valdría $P(\neg\varphi)$ por no existir un instante pasado donde se verificase $\neg\varphi$ y por la misma razón tampoco valdría $P(\varphi)$ en $t$.

Un análisis más sutil de la prueba de contradicción anterior, pone de presente el hecho de que estamos suponiendo que tanto (1):

$$A \in A \leftrightarrow P(\neg(A \in A))$$

como su equivalente (2), valen no solamente en el instante $t_1$ sino también en $t_2$ y en $t_3$ y en $t_4$, es decir, en todos los instantes que han intervenido en nuestro razonamiento, o sea que realmente además de (1), estamos considerando como válido

$$H[A \in A \leftrightarrow P(\neg(A \in A))]$$

o lo que es lo mismo, que (1) vale ahora (en el presente) y siempre en el pasado.

De otra parte, una verdad en nuestro sistema deberá ser válida en todo instante, lo cual nos lleva a incluir una regla deductiva como

$$\text{si } \vdash \varphi, \text{ entonces } \vdash H(\varphi).$$

Otro aspecto que debe destacarse es que todas las consideraciones y los razonamientos anteriores son independientes de la fórmula "$A \in A$", o sea que la situación es la misma para una expresión de la forma

$$\alpha \leftrightarrow P(\neg(\alpha))$$

sin importar qué sea la fórmula $\alpha$, por lo cual podemos para efectos del análisis de esta paradoja, trabajar dentro de un sistema que solamente incluya un cálculo proposicional. También se nota que no hemos empleado para nada el futuro, ni los axiomas que tienen que ver con él, por lo cual creemos que es suficiente considerar tan solo el pasado.

Trataremos de precisar y formalizar todas las ideas anteriores construyendo un sistema que llamaremos $\mathcal{P}$ (pasado).

## III. EL SISTEMA $\mathcal{P}$.

Comencemos con un cálculo proposicional básico, cuyos axiomas son:

S1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

S2: $[\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)]$.

S3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$.

y cuya *única regla deductiva primitiva es modus ponens.*

Siendo para dicho cálculo $\{\neg, \to\}$ un conjunto completo de conectivas, podemos suponer que las demás, $\wedge, \vee, \leftrightarrow$, se han definido en términos de "$\neg$" y de "$\to$".

Es conocido (ver [1], pgs 49-50, o [7], pgs 43-44) que los axiomas $S1$ y $S2$ junto con MP, permiten probar para el cálculo proposicional, el teorema de la deducción (TD) sin restricciones de ninguna naturaleza, cuando no existan otras reglas deductivas.

También se sabe que los tres axiomas anteriores y MP, son suficientes para demostrar todos los teoremas y resultados del cálculo proposicional cuando como se dijo, "$\wedge$" ,"$\vee$" , y "$\leftrightarrow$" se consideran como abreviaciones de sus correspondientes expresiones equivalentes en términos de tan solo "$\neg$" y de " $\rightarrow$ ". Mencionemos algunos de ellos:

| | |
|---|---|
| S4: | $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ |
| S5: | $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$ |
| S6: | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma)]$ |
| S7: | $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ |
| S8: | $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ |
| S9: | $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow [(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)]$ |
| SH: | $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ |
| RA: | Si $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta, \neg\beta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$. |
| (@): | $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$ y $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha, \beta$ |

Si definimos la conectiva " $\leftrightarrow$ " mediante

$$\alpha \leftrightarrow \beta \text{ si y sólo si } (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha),$$

es así mismo conocido que para el calculo proposicional clásico se tiene el REEMPLAZO DE EQUIVALENCIAS FUERTE:

REF: Si $\alpha$ es una sub-fórmula de una fórmula $A$, entonces

$$\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow \left(A \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} A\right)$$

Aquí $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} A$ es una formula obtenida al reemplazar en $A$, todas, algunas, o ninguna de las ocurrencias de $\alpha$ por $\beta$.

Nótese que aplicando MP a REF se obtiene RE (Reemplazo de equivalencias), es decir,

*si $\alpha$ es una sub-formula de una formula $A$, entonces*

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \left(A \leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} A\right)$$

Determinemos ahora el sistema que llamaremos $\mathcal{P}$:

Adicionemos a los símbolos del cálculo proposicional anterior el operador temporal $H$, y consideremos además como regla de formación de fórmulas, la siguiente:

*Si $\varphi$ es una fórmula, también lo es $H\varphi$.*

Además consideremos $P\varphi$ como una abreviación de $\neg H \neg \varphi$ y llamemos "DEF" precisamente a la equivalencia $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$. Como axiomas del sistema $\mathcal{P}$, tomemos los siguientes:

1. Todos los teoremas del cálculo proposicional clásico dado antes como base, con sus letras proposicionales posiblemente reemplazadas por fórmulas de $\mathcal{P}$.

Aún cuando es suficiente tomar como axiomas tan solo a S1, S2, y S3, hemos considerado por comodidad como primer grupo de axiomas a todos sus teoremas.

En adelante usaremos "prop" como justificación de un paso en una demostración, para indicar con ello que se esta usando algún resultado conocido puramente proposicional.

2. $H(\varphi \rightarrow \Psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\Psi)$ AX1
3. $H\varphi \rightarrow HH\varphi$ AX2
4. $GH$: Todos los de la forma $HA$, donde $A$ es cualquiera de los axiomas pertenecientes a los tres grupos anteriores.

Tomemos MP *como regla deductiva primitiva* para este sistema.

Hemos simplificado el sistema inicial de Cocchiarella debido a que en la teoría de conjuntos que propondremos posteriormente, tan sólo se hará mención del pasado, lo cual nos indujo a suponer que no necesitaremos los operadores $F$ y $G$. Además, por sencillez y elegancia, hemos considerado $H$ como único operador temporal modal primitivo, por lo cual hemos variado ligeramente los axiomas en forma tal, que los antiguos axiomas 1 y 5 de Cocchiarella puedan ser obtenidos como teoremas.

## IV. CONSISTENCIA, VALIDEZ Y COMPLETITUD DEL SISTEMA $\mathcal{P}$.

Definamos inductivamente una traducción $T$ del sistema $\mathcal{P}$ en el cálculo proposicional básico de $\mathcal{P}$, la cual "borra" el símbolo $H$:

$$\begin{aligned} T(\varphi) &= \varphi \qquad \text{si } \varphi \text{ es letra proposicional.} \\ T(\neg\varphi) &= \neg T(\varphi) \\ T(\varphi \rightarrow \Psi) &= T(\varphi) \rightarrow T(\Psi) \\ T(H\varphi) &= T(\varphi) \end{aligned}$$

Se deduce que $T(P\varphi) = \neg\neg T(\varphi)$.

Es rutinario verificar que si $\varphi$ es axioma de $\mathcal{P}$, entonces $T(\varphi)$ es una tautología.

Debido a la forma como se definió la traducción de una implicación, es igualmente sencillo comprobar que *si* $T(\varphi)$ *y* $T(\varphi \to \Psi)$ ***son tautologías, también lo es*** $T(\Psi)$ , o sea que la propiedad no sólo vale para todos los axiomas, sino que se conserva por MP, y siendo ésta la única regla deductiva primitiva, entonces ***para todo teorema*** *A* ***de*** *P*, $T(A)$ ***será una tautología***, lo cual conlleva la consistencia del sistema.

Como $T(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha) = T(\alpha) \leftrightarrow \neg\neg\neg T(\alpha)$ y esta última no es tautología, entonces $\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ es independiente de los axiomas $\mathcal{P}$. Igual sucede con $H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$.

Es posible que para el desarrollo de una teoría temporal de conjuntos necesitemos agregar nuevos axiomas que describan propiedades deseables de la estructura temporal; procuraremos que dichos axiomas también posean la particularidad de que sus traducciones sean tautologías; en esta forma para dichos sistemas ampliados, continuará siendo válida la prueba de consistencia anterior. Por ejemplo, $H\varphi \to P\varphi$ se halla en este caso, lo mismo que

$$P\varphi \wedge P\Psi \to [P(\varphi \wedge \Psi) \vee P(P\varphi \wedge P\Psi) \vee P(\varphi \wedge P\Psi)]$$

el cual trata de describir la linealidad del tiempo hacia el pasado.

Teniendo en cuenta que nuestro sistema solamente incluye al cálculo proposicional, ***una estructura que llamaremos de tipo*** $\mathcal{P}$, adecuada para él, constará de un conjunto $(T, <)$ parcialmente ordenado por una relación de orden estricto "$<$", y una familia $(v_t)_{t \in T}$ de valuaciones definidas en el conjunto de las letras proposicionales y a valores en el conjunto $\{0, 1\}$.

Es rutinario demostrar que estas valuaciones $v_t : L \to \{0, 1\}$ se extienden de manera única al conjunto de todas las formulas de $\mathcal{P}$ de tal manera que:

| | |
|---|---|
| $v_t(\neg\varphi) = 1$ | si si $v_t(\varphi) = 0$ |
| $v_t(\varphi \vee \Psi) = 1$ | si si $v_t(\varphi) = 1$ o $v_t(\Psi) = 1$ |
| $v_t(\varphi \wedge \Psi) = 1$ | si si $v_t(\varphi) = 1$ y $v_t(\Psi) = 1$ |
| $v_t(\varphi \to \Psi) = 1$ | si si $v_t(\varphi) = 0$ o $v_t(\Psi) = 1$ |
| $v_t(P\varphi) = 1$ | si si existe $s < t$ tal que $v_s(\varphi) = 1$ |
| | o sea si si $\exists_s(s < t \wedge v_s(\varphi) = 1)$ |

Se sigue que $v_t(P\neg\varphi) = 1$ si si $\exists s(s < t \wedge v_s(\neg\varphi) = 1)$ si si $\exists s(s < t \wedge v_s(\varphi) = 0)$

y en consecuencia, $v_t(\neg P\neg\varphi) = 1$ si si $v_t(P\neg\varphi) = 0$ y negando la línea anterior, si si $\forall s[\neg(s < t) \vee v_s(\varphi) = 1]$ y por prop., si si $\forall s[s < t \to v_s(\varphi) = 1]$ ,es decir,

$$v_t(H\varphi) = 1 \text{ si si } \forall s[s < t \to v_s(\varphi) = 1]$$

lo cual concuerda con la interpretación intuitiva dada de antemano.

En adelante, si $\mathcal{A} = ((T,<),(v_t)_{t\in T})$ es una estructura de tipo P, muchas veces en lugar de $v_t(\varphi) = 1$, escribiremos

$$\mathcal{A} \underset{t}{\models} \varphi \text{ o simplemente } \underset{t}{\models} \varphi$$

y lo leeremos "La estructura $\mathcal{A}$ verifica $\varphi$ en el nodo $t$", o "En el nodo $t$ se verifica $\varphi$".

También si $\mathcal{A}$ es una estructura de tipo $\mathcal{P}$, $\mathcal{A} \models \varphi$ significa "En todo nodo de $\mathcal{A}$ se verifica $\varphi$", en tal caso diremos simplemente "$\mathcal{A}$ verifica $\varphi$" o "$\varphi$ se verifica en la estructura $\mathcal{A}$".

Análogamente $\models \varphi$ significa "$\varphi$ se verifica en toda estructura de tipo $\mathcal{P}$"; se dice en este caso que $\varphi$ es $\mathcal{P}$-válida.

Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de fórmulas, $\mathcal{F} \models \varphi$ significará que toda estructura de tipo $\mathcal{P}$ que verifique todas las fórmulas de $\mathcal{F}$, también debe verificar $\varphi$.

Diremos que una fórmula $\varphi$ es verificable, si existen una estructura $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{P}$ y al menos una valuación $v_t$ de $\mathcal{A}$ tal que $v_t(\varphi) = 1$, o sea si existen una estructura $\mathcal{A}$ y al menos un nodo $t$ de $T$, tal que $\mathcal{A} \underset{t}{\models} \varphi$.

Diremos que un conjunto $\Gamma$ de fórmulas es verificable, si existen una estructura $\mathcal{A}$ de tipo $\mathcal{P}$ y al menos una valuación $v_t$ de $\mathcal{A}$ tal que $v_t(\varphi) = 1$ para todas las fórmulas $\varphi$ de $\Gamma$.

Por la forma como extendimos las valuaciones, concluímos que en cada nodo razonamos dentro de una lógica clásica bivalente, por lo cual dada una contradicción $(\alpha \wedge \neg\alpha)$, en toda estructura de tipo $\mathcal{P}$ y en todos sus nodos se deberá tener $v_t(\alpha \wedge \neg\alpha) = 0$ o sea NO ES EL CASO QUE $\underset{t}{\models}(\alpha \wedge \alpha)$.

Hemos definido "estructura de tipo $\mathcal{P}$" de tal forma que en todo nodo de toda estructura, se verifiquen no solo todas las tautologías sino también Def, AX1 y AX2. Por este motivo, es realmente sencillo probar la validez de nuestro sistema $\mathcal{P}$, es decir que si $\varphi$ se deduce en el sistema, entonces $\varphi$ es $\mathcal{P}$-válida:

Observemos que si en un nodo de una estructura se verifican tanto $\varphi$ como $\varphi \to \Psi$, entonces por la forma como extendimos las valuaciones, es claro que también debe verificarse $\Psi$ en este nodo. Esto significa que MP preserva la propiedad de verificabilidad; además si $\models \varphi$, entonces claramente $\models H\varphi$, y debido a que todos los axiomas de $\mathcal{P}$ se verifican en todas las estructuras de tipo $\mathcal{P}$, entonces todos los teoremas de $\mathcal{P}$ se verifican en todas las estructuras de tipo $\mathcal{P}$, obteniéndose así la validez del sistema $\mathcal{P}$.

A continuación resolveremos el problema recíproco: Si $\varphi$ es una fórmula $\mathcal{P}$-válida, probaremos que $\varphi$ es un teorema del sistema $\mathcal{P}$, o sea que demostraremos la completitud del sistema $\mathcal{P}$. Como generalmente es laborioso y difícil producir pruebas directas de completitud de un sistema, trataremos de utilizar algún resultado ya establecido.

Al leer con detenimiento [3], encontramos en su pg.131 un sistema de lógica modal llamado K4, del cual, después de un pequeño trabajo, puede verse que sus axiomas y reglas deductivas son equivalentes a las del sistema $\mathcal{P}$, reemplazando claro esta, $\Box$ y $\Diamond$ (necesario y posible) por $H$ y $P$ respectivamente.

Es conocido que las semánticas para los sistemas modales se definen generalmente siguiendo a Kripke, dando una"colección de modelos estándar". Un modelo estándar es para [3] una tripla $(W, R, P)$ tal que:

$W$ es un conjunto, la colección de los mundos posibles del modelo

$P = (P_0, P_1, P_2, \dots)$ es una sucesión numerable de subconjuntos de $W$ y

$R$ es una relación binaria en $W(R \subseteq Wx`W)$ llamada de accesibilidad

($\alpha R\beta$ significa que el mundo $\beta$ es accesible desde el $\alpha$).

Se supone que las letras proposicinales son $p_0, p_1, p_2, \dots$ y la verdad se define para ellas mediante "$p_n$ es verdadera en el mundo $\alpha$ si y solo si $\alpha \in P_n$", o sea que $P_n$ es simplemente el conjunto de los mundos en los cuales $p_n$ es verdadera.Esta definición de verdad se extiende a todas las fórmulas en la forma usual.

Podemos extender la equivalencia entre $\mathcal{P}$ y K4 también a sus semánticas: Si $W = (\mathcal{U}_t)_{t\in T}$ es una indexacion biyectiva de $W$, definimos en $T$ la relación binaria "$<$" mediante $t < s$ si si $\mathcal{U}_s \; R \; \mathcal{U}_t$. Esto debido a que $\Box\varphi$ se interpreta como verdadero en $\mathcal{U}_s$ cuando $\varphi$ es verdadera en todo $\mathcal{U}_t$ accesible desde $\mathcal{U}_s$ y $H\varphi$ es verdadero en el universo existente en el instante $s$ cuando $\varphi$ es verdadero en $\mathcal{U}_t$, para todo $t < s$. Es evidente que la colección de valuaciones $(v_t)_{t\in T}$ se debe definir mediante $v_t(p_n) = 1$ si si $\mathcal{U}_t \in P_n$ o sea si y sólo si $p_n$ es verdadera en el mundo $\mathcal{U}_t$. Así a cada modelo estándar asociamos una estructura $((T, <), (v_t)_{t\in T})$. La asociación recíproca también es clara. Cuando la relación "$<$" es irreflexiva antisimétrica y transitiva, se establece una equivalencia entre las estructuras de tipo $\mathcal{P}$ y los modelos estándar irreflexivos, antisimétricos y transitivos.

**LEMA.** *Sea $\mathcal{A} = ((T, R), (v_t)_{t\in T})$ una estructura en la cual $R$ es transitiva en $T$. Entonces existe otra estructura $\mathcal{A}' = ((T', R'), (v_{t'})_{t'\in T'})$ con $R'$ irreflexiva, antisimétrica y transitiva, es decir, con $\mathcal{A}'$ de tipo $\mathcal{P}$, tal que para toda fórmula $\varphi$,*

$$\mathcal{A} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{A}' \models \varphi$$

*Demostración.* Sea $T' = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) | n > 0 \wedge \forall i(\alpha_i \in T \wedge \alpha_i R \alpha_{i+1})\}$ Definamos en $T'$ la siguiente relación:

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)R'(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r)$ sii $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r)$ es un segmento final propio de $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ es decir, si

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = (\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r) \text{ con } k > 0.$$

Claramente si $\alpha \in T'$, entonces $\neg(\alpha R'\alpha)$ ya que $\alpha$ no puede ser segmento final propio de sí mismo. Es igualmente sencillo comprobar la antisimetría y la transitividad de $R'$. Definamos la familia de valuaciones en la siguiente forma:

$$v_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} = v_{\alpha_1}$$

Para demostrar el lema, es suficiente probar por inducción en fórmulas que

$$\mathcal{A}' \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{\models} \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{A} \underset{\alpha_1}{\models} \varphi$$

Para $\varphi$ atómica se obtiene de la definición anterior de las valuaciones. Los pasos inductivos para los conectivos son realmente triviales por la forma como se extienden las valuaciones. Basta entonces comprobarlo para $P$:

Supongamos $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ dado. Si $\mathcal{A}' \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{\models} P\varphi$, entonces existen $\delta_1$, $\delta_2, \ldots$ $\delta_k$ tales que $\mathcal{A}' \underset{(\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{\models} \varphi$. Por hipótesis de inducción, esto implica que $\mathcal{A} \underset{\delta_1}{\models} \varphi$.

Por la transitividad de $R$ y la definición de $T'$, $\delta_1 R \alpha_1$, luego $\mathcal{A} \underset{\alpha_1}{\models} P\varphi$. Recíproca mente, supongamos que $\mathcal{A} \underset{\alpha_1}{\models} P\varphi$. Entonces $\mathcal{A} \underset{\alpha}{\models} \varphi$ para algún $\alpha$ con $\alpha R \alpha_1$. Por hipótesis de inducción, $\mathcal{A}' \underset{(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{\models} \varphi$. Pero $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)R'(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, luego $\mathcal{A}' \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}{\models} P\varphi$.

**COROLARIO.** *El sistema $\mathcal{P}$ es completo.*

Veamos que si $\varphi$ es verdadero para todas las estructuras de tipo $\mathcal{P}$, entonces $\varphi$ es un teorema del sistema $\mathcal{P}$. Si $\varphi$ no fuese un teorema de $\mathcal{P}$, su equivalente $\varphi^\star$ no sería, un teorema de K4, y como por el teorema 5.14 de la pg. 177 de [2] el sistema K4 es válido y completo para la colección de modelos estándar transitivos, existiría un modelo $\mathcal{A}^\star = (W, R, P)$ con $R$ transitivo tal que $\mathcal{A}^\star \not\models \varphi^\star$, o sea que extistiría al menos un mundo $\alpha$ tal que $\mathcal{A}^\star \not\models_\alpha \varphi^\star$, es decir, tal que $\mathcal{A}^\star \models_\alpha \neg\varphi$, luego para su modelo equivalente $\mathcal{A} = ((T,<),(v_t)_{t\in T})$ y el nodo $t = \alpha$, se tendria $\mathcal{A} \models_\alpha \neg\varphi$, y la demostración por inducción en fórmulas del lema anterior hace ver que entonces existirá una estructura de tipo $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}' = ((T',R'),(v_{t'})_{t'\in T'})$ tal que $\mathcal{A}' \models_{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)} \neg\varphi$ para cualquier nodo que comience por $\alpha$, o sea tal que $\mathcal{A}' \not\models_{(\alpha,\alpha_1,\alpha_2)} \varphi$ y por lo tanto $\mathcal{A}' \not\models \varphi$, y $\varphi$ no sería $\mathcal{P}$-válida.

## V. ASPECTOS SINTACTICOS Y SEMANTICOS ADICIONALES

Establezcamos a continuación algunos resultados del sistema deductivo anterior:

**LEMA 0.** *Si $A$ es un axioma, entonces* $\vdash HA$.

*Demostración.* Si $A$ es cualquier axioma de los primeros tres grupos, entonces por GH, también HA es axioma y en consecuencia $\vdash HA$. Si $A$ es un axioma de la forma $H\varphi$, entonces por AX2, $\vdash (H\varphi \to HH\varphi)$ y por MP, $\vdash HH\varphi$ o sea $\vdash HA$.

**TEOREMA 1.** $(GH^*)$. *Si* $\vdash \varphi$, *entonces* $\vdash H\varphi$, *cualquiera sea la fórmula* $\varphi$ *de* $\mathcal{P}$.

*Demostración.* Sea $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ una deducción de $\varphi$. Probemos por inducción que para todo $k$, $1 \leq k \leq n$, se tiene $\vdash H\varphi_n$.

a) $\varphi_1$ debe ser un axioma (ya que $\varphi$ se dedujo sin premisas), luego por el lema 0, $\vdash H\varphi_1$.

b) Supongamos que la propiedad vale para todo $m$ con $1 \leq m < k$ y probemos que también vale para $k$:

i) Si $\varphi_k$ es axioma, el razonamiento dado en a) permite concluir $\vdash H\varphi_k$.

ii) Si $\varphi_k$ se obtiene por MP de dos fórmulas anteriores de la deducción, digamos $\varphi_i$ y $\varphi_j$, o sea que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_k$, entonces por hipótesis de inducción, $\vdash H\varphi_i$ y $\vdash H(\varphi_i \to \varphi_k)$ , pero por AX1, $\vdash H(\varphi_i \to \varphi_k) \to (H\varphi_i \to H\varphi_k)$ y por MP, $\vdash (H\varphi_i \to H\varphi_k)$ y nuevamente por MP, $\vdash H\varphi_k$, con lo cual se completa la demostración.

**COLORARIO.** *Si* $\vdash \varphi$, *entonces* $\vdash \varphi \to H\varphi$.

*Demostración.*

| | |
|---|---|
| 1. $\vdash \varphi$ | hipót |
| 2. $\vdash H\varphi$ | $GH^*$ |

3. $\vdash H\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow H\varphi)$ prop
4. $\vdash \varphi \rightarrow H\varphi$ MP. 2,3

Es claro que cuando $\varphi$ no es un teorema, en general $\varphi \rightarrow H\varphi$ tampoco lo es.

**TEOREMA 2.** *Si* $\vdash \varphi \rightarrow \Psi$, *entonces* $\vdash H\varphi \rightarrow H\Psi$.

*Demostración.* Supongamos $\vdash \varphi \rightarrow \Psi$; entonces por el teorema 1, $\vdash H(\varphi \rightarrow \Psi)$; como por AX1 $\vdash H(\varphi \rightarrow \Psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\Psi)$, el resultado se sigue inmediatamente por MP.

**TEOREMA 3.** $\vdash H(\varphi \wedge \Psi) \rightarrow H\varphi \wedge H\Psi$.

*Demostración.*
1. $\varphi \wedge \Psi \rightarrow \varphi$ prop
2. $H(\varphi \wedge \Psi) \rightarrow H\varphi$ Teor 2.
3. Análogamente, de $\varphi \wedge \Psi \rightarrow \Psi$ se sigue $H(\varphi \wedge \Psi) \rightarrow H\varphi$ y por prop,
4. $[H(\varphi \wedge \Psi) \rightarrow H\varphi] \rightarrow [(H(\varphi \wedge \Psi) \rightarrow H\Psi) \rightarrow (H(\varphi \wedge \Psi) \rightarrow H\varphi \wedge H\Psi)]$ y aplicando MP dos veces se obtiene el resultado.

**TEOREMA 4..** $H\varphi \wedge H\Psi \vdash H(\varphi \wedge \Psi)$

*Demostración.*

| | |
|---|---|
| 1.$H\varphi \wedge H\Psi$ | premisa |
| 2.$H\varphi$ | prop |
| 3.$H\Psi$ | prop |
| 4.$\varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \varphi \wedge \Psi)$ | prop |
| 5.$H(\varphi) \rightarrow H(\Psi \rightarrow \varphi \wedge \Psi)$ | Teor. 2. |
| 6.$H(\Psi \rightarrow \varphi \wedge \Psi)$ | MP, 2,5. |
| 7.$H(\Psi \rightarrow \varphi \wedge \Psi) \rightarrow [H(\Psi) \rightarrow H(\varphi \wedge \Psi)]$ | AX1 |
| 8.$H(\Psi) \rightarrow H(\varphi \wedge \Psi)$ | MP, 6,7. |
| 9.$H(\varphi \wedge \Psi)$ | MP, 3, 8. |

**COROLARIO.** $H\varphi \wedge H\Psi$ *es interdeducible con* $H(\varphi \wedge \Psi)$.

**TEOREMA 5.** $H(\varphi \leftrightarrow \Psi) \vdash (H\varphi \leftrightarrow H\Psi)$.

*Demostración.* Como $\varphi \leftrightarrow \Psi$ equivale a $(\varphi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \varphi)$, aplicando $H$ y utilizando los teoremas 3 y 2 se obtienen el resultado.

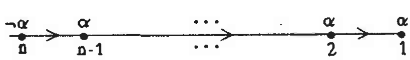
Cuando efectuamos la derivación intuitiva de una contradicción a partir de $\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ y $H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$, hicimos notar la necesidad de que la estructura temporal tuviese al menos cuatro instantes. Para lograr esta particularidad agregamos como premisa $H\varphi \rightarrow P\varphi$; el papel de ésta es realmente fundamental ya que como lo haremos notar a continuación, sin ella no habríamos podido deducir formalmente la contradicción.

Veamos que si a los axiomas de $\mathcal{P}$ añadimos $\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ y $H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$, aún se obtiene un conjunto consistente de fórmulas:

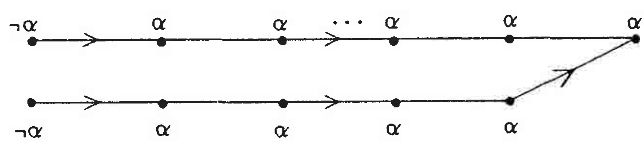
Una estructura $\mathcal{A}$ con $T = \{1,2\}, 2 < 1$ y en la cual la fórmula $\alpha$ satisface $v_1(\alpha) = 1$ y $v_2(\alpha) = 0$,


es tal que $\underset{1}{\models} \alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ de manera evidente y $\underset{2}{\models} \alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ ya que en el nodo 2 no se verifica $\alpha$ y tampoco $P\neg\alpha$ al no existir un nodo anterior en donde se satisfaga $\neg\alpha$. Así , $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ y $\mathcal{A} \models H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$.

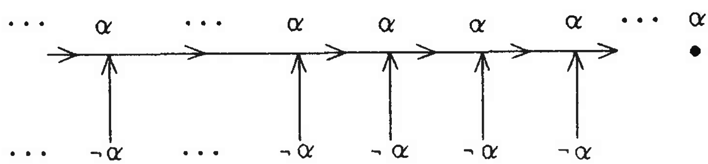
Análogamente, una estructura como la que sigue, con las valuaciones definidas sobre $\alpha$ en la forma en que aparecen, también verifica $\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ y $H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$:




Lo mismo sucede con la estructura siguiente:




Inclusive, estructuras con infinitos nodos como




verifican igualmente $\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha$ y $H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$.

Todo lo anterior hace ver que estas dos fórmulas no producen dentro del sistema $\mathcal{P}$ contradicciones por sí solas, de manera que al no tenerse en el sistema la premisa $H\varphi \rightarrow P\varphi$, no será posible derivar la paradoja de Russell.

Todas las estructuras anteriores se caracterizan porque para cualquier nodo $t$ en el cual se verifica $\alpha$, siempre existe un nodo minimal anterior a $t$ en el cual se verifica $\neg\alpha$.

Para que una estructura de tipo $\mathcal{P}$ verifique $H\varphi \leftrightarrow P\varphi$, se necesita que ella no posea nodos minimales, pero entonces dicha estructura tiene la particularidad de que en ninguno de sus nodos se verifica $H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$, como puede comprobarse mediante un razonamiento similar al que utilizamos para deducir intuitivamente la contradicción inicial. En efecto:

Si existiese un nodo a tal que $\models_a H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$, entonces debido a que no es nodo minimal, existe $b < a$ tal que $\models_b (\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$. *Supongamos que* $\models_b \alpha$ . A causa de la equivalencia entre $\alpha$ y $P\neg\alpha$ en $b$, deberá existir otro nodo $c < b$ tal que $\models_c \neg\alpha$; por transitividad, $c < a$ y como $\models_a H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$, se sigue que $\models_c (\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$; puesto que en $c$ se verifica $\neg\alpha$, también se verifica $\neg P\neg\alpha$, o sea $\models_c H\alpha$, de manera que para todo $s < c$, $\models_s \alpha$; no siendo $c$ minimal, debe existir al menos un tal $s$; por transitividad, $s < a$, de modo que $\models_s (\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha)$, luego $\models_s P\neg\alpha$, pero esto no es posible ya que para todo $t < c$, $\models_t \alpha$. Análogamente se procede si $\models_b \neg\alpha$.

Lo anterior significa que no es posible hallar una estructura de tipo $\mathcal{P}$ que verifique simultáneamente $(H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha))$ y $H\varphi \rightarrow P\varphi$.

Como dentro de la teoría de conjuntos que propondremos, el axioma amplio de comprensión implicará la fórmula $(H(\alpha \leftrightarrow P\neg\alpha))$ y ésta fuerza la existencia de nodos minimales en la estructura temporal subyacente, entonces, si el tiempo es lineal hacia el pasado, necesariamente deberá haber tenido un comienzo.

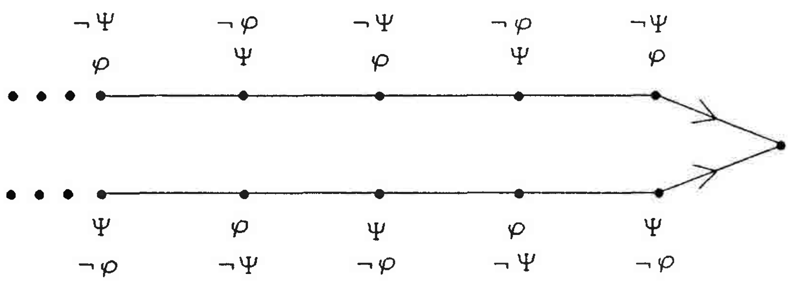
Nos preguntamos: ¿ Dentro de nuestro sistema $\mathcal{P}$ de lógica temporal puramente proposicional, qué propiedades debemos agregar como axiomas para garantizar la linealidad del tiempo hacia el pasado y la existencia de un instante inicial? Es decir, para que las únicas estructuras de tipo $\mathcal{P}$ que las verifiquen sean precisamente aquellas $(T, <)$ con las propiedades

$(\forall s)(\forall t)(\forall u)((s < u \wedge t < u) \rightarrow (s < t \vee s = t \vee t < s))$ y $(\exists s)(\forall t)(t \neq s \rightarrow s < t)$?

En la bibliografía sobre el tema (p. ej. [6] y [8]) se propone el axioma siguiente para caracterizar dicha propiedad:

$$(P\varphi \wedge P\Psi) \rightarrow (P(\varphi \wedge \Psi) \vee P(P\varphi \wedge \Psi) \vee P(\varphi \wedge P\Psi)) \qquad (LP)$$

Sin embargo existen estructuras de tipo $P$, no lineales hacia el pasado que verifican $LP$ para valuaciones adecuadas de $\varphi$ y $\Psi$, como por ejemplo

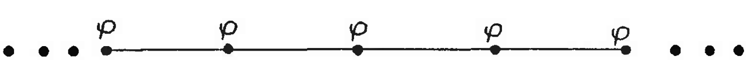



Esta verifica LP en todos sus nodos.

De manera similar, en [8], pg. 92, se propone el axioma

$$H\varphi \vee PH\varphi$$

para caracterizar la existencia de un instante inicial, ya que $H\varphi$ se verifica en dicho instante y $PH\varphi$ se satisface en todos los demás. Sin embargo, una estructura como




verifica la formula anterior sin necesidad de poseer un primer instante. Proponemos en su lugar la fórmula $H(\varphi \wedge \neg\varphi) \vee PH(\varphi \wedge \neg\varphi)$, la cual sí fuerza la existencia de un instante inicial.

En general, dada una colección $\mathcal{C}$ de estructuras modales, es muy difícil, si no imposible, hallar un conjunto de axiomas-esquemas que la caractericen, es decir, tal que las únicas estructuras que verifiquen dichos axiomas sean precisamente las de $\mathcal{C}$. Por ejemplo, en [3], pg. 94, se muestra que las sentencias que se satisfacen en todas las estructuras $(T, R)$, con $R$ irreflexiva, son las mismas que se verifican en todas las estructuras $(T, S)$ con $S$ antisimétrica, y las mismas que se satisfacen en todas las estructuras $(T, D)$ con $D$ relación binaria sin ninguna condición adicional.

Por todo lo anterior, queremos destacar la importancia de haber encontrado la fórmula $H(A \leftrightarrow P\neg A)$, la cual sí fuerza la existencia de un instante inicial cuando el tiempo es lineal hacia el pasado. Además, es una condición más fuerte que $H\alpha \vee PH\alpha$, pues ésta es implicada por aquella, como lo demostraremos a continuación:

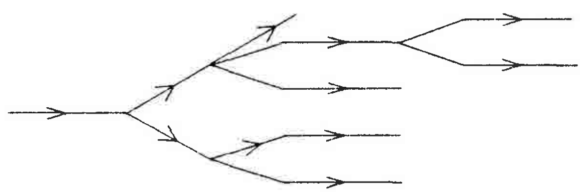
| | |
|---|---|
| 1.$H(A \leftrightarrow P\neg A)$ | Hipótesis |
| 2.$HA \leftrightarrow HP\neg A$ | Teor. 5 |
| 3.$\neg HA \leftrightarrow \neg HP\neg A$ | Prop |
| 4.$\neg HA \leftrightarrow \neg H\neg H\neg\neg A$ | Def. y RE |
| 5.$\neg HA \leftrightarrow \neg H\neg HA$ | RE |
| 6.$\neg HA$ | Hipótesis |
| 7.$\neg H\neg HA$ | MP. 5,6 |
| 8.$PHA$ | Def |

Hemos probado que $H(A \leftrightarrow P\neg A)$ , $\neg HA \vdash PHA$, lo cual es equivalente a que $H(A \leftrightarrow P\neg A) \vdash HA \vee PHA$, claro está, en presencia de los axiomas dados para el sistema $\mathcal{P}$.

Es entonces conveniente modificar la semántica para que la colección de estructuras con respecto a la cual un sistema sea válido y completo, sea la mas pequeña posible, y las estructuras posean de antemano las propiedades relevantes para determinados propósitos. Por esto, en vez de considerar como estructura de tipo $\mathcal{P}$ a cualquier conjunto provisto de una relación de orden estricto, junto con su correspondiente familia de valuaciones, tomaremos en adelante como *estructura de tipo* $\mathcal{P}+$, a una pareja $((t, <), (v_t)_t)$, cuya segunda componente es una familia de valuaciones y cuya primera componente es una pareja constituida por un conjunto $T$ no vacío y por una relación "$<$" que satisface las condiciones siguientes:

$$1)\forall x\neg(x<x)$$
$$2)\forall x\forall y(x\neq y\rightarrow\neg(x<y\wedge y<x))$$
$$3)\forall x\forall y\forall z(x<y\wedge y<z\rightarrow x<z)$$
$$4)\forall x\forall y\forall z((x<z\wedge y<z)\rightarrow(x<y\vee x=y\vee y<x))$$
$$5)\exists x\forall y(x\neq y\rightarrow x<y)$$

Las tres primeras condiciones exigen que "<" sea un orden estricto, la cuarta le fuerza a ser lineal hacia el pasado y la última hace que tenga un momento inicial; estas propiedades que se piden a las estructuras de tipo $\mathcal{P}+$ son intuitivamente plausibles para desarrollar una teoría de conjuntos con un universo inicial que se expande hacia el futuro con diversidad de posibilidades (ya que el tiempo puede ser ramificado) pero en forma tal que uno, situado en cualquier momento, al mirar retrospectivamente "ve una única historia", una única línea hasta el instante inicial.



Como todos los axiomas del sistema $\mathcal{P}$ se verifican en todos los nodos de todas las estructuras de tipo $\mathcal{P}$, a fortiori se verificarán en todos los nodos de todas las estructuras de tipo $\mathcal{P}+$ acabadas de definir: fórmulas como éstas serán llamadas C-válidas; las mismas razones dadas antes para probar que la validez se conservaba a través de la deducibilidad, son aplicables en este caso para concluir que la deducibilidad también conserva la C-validez. Existen fórmulas C-válidas que no se deducen de los axiomas de $\mathcal{P}$; queremos ampliar el sistema $\mathcal{P}$ agregando como nuevos axiomas a dos de ellas, las cuales para esta nueva semántica sí caracterizan las dos últimas propiedades de las estructuras de tipo $\mathcal{P}+$:

$$(P\varphi\wedge P\Psi)\rightarrow(P(\varphi\wedge\Psi)\vee P(P\varphi\wedge\Psi)\vee P(\varphi\wedge P\Psi)) \qquad (LP)$$

$$H\varphi\vee PH\varphi \qquad (MI)$$

Es claro que en cualquier estructura de tipo $\mathcal{P}+$, $H\varphi$ se verifica en el nodo inicial y $PH\varphi$ se verifica en todos los demás, así que MI es C-válida. Es sencillo verificar que LP también es C-válida. De estas propiedades de verificabilidad se concluye así mismo que el nuevo sistema (lo llamaremos P+) obtenido agregando estos dos últimos axiomas, sigue siendo consistente. Además en él no será deducible la fórmula $H\varphi \rightarrow P\varphi$ (ya que no es C-valida), esencial en la obtención de una contradicción a partir de $H[\sigma \leftrightarrow P(\neg\sigma)]$ y $\sigma \leftrightarrow P(\neg\sigma)$.

Las consideraciones y situaciones anteriores ponen de presente que el sistema P+, será un marco proposicional adecuado para construir sobre él un calculo de predicados de primer orden básico para desarrollar en él una teoría temporal de conjuntos con un universo inicial que se va expandiendo con el paso del tiempo y en la cual del axioma de comprensión $\exists A\forall x(x \in A \leftrightarrow P\varphi(x))$, no pueda derivarse la paradoja de Russell ni ninguna otra contradicción.

## BIBLIOGRAFIA


1. Caicedo, Xavier, *Elementos de lógica y Calculabilidad.*, Universidad de los Andes, Bogotá (1978).
2. Cantor, George, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.*, Dover P. C., New York, (1915).
3. Chellas, Brian F., *Modal logic.*, Cambridge University Press, Cambridge, (1980).
4. Cocchiarella, Nino, *Modality within tense logic*, The journal of symbolic logic, vol XXXI, No. 4, Dic. (1966).
5. Frege, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena, vol. I, (1893).
6. Gardies, Jean-louis, *Lógica del tiempo*, Paraninfo, Madrid (1979).
7. Hamilton, A. G., *Lógica para matemáticos*, Paraninfo, Madrid, (1981).
8. Rescher, N. and Urquart, A., *Temporal Logic*, Springer-Verlag, Wien, New York, (1971).