Funções de duas variáveis, representação gráfica e integração

Two-variable functions, graphing and integration

JOÃO MANUEL FORTES CRUZ [1]

http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i1p047-070

RESUMO

O trabalho expõe a introdução do software GeoGebra como revezamento no ensino da Representação Gráfica, Imagens de Domínios e Integração de Funções de Duas Variáveis. A experiência propõe o reconhecimento das potencialidades deste software na resolução de questões matemáticas que integrem representação gráfica em funções de duas variáveis, bem como a do domínio das mesmas e sua integração. A função de duas variáveis é conteúdo da grelha curricular do Plano de Estudos do Ensino Superior em algumas Universidades do País e o software GeoGebra oferece recursos didáticos que facilitam o seu ensino. Concretizou-se em um briefing de três reuniões, com a participação de cinco professores. A metodologia utilizada para alcançar os objetivos baseia-se no estudo de caso do tipo descritivo com análise essencialmente qualitativa.

Palavras-Chave: *Formação Contínua de Professores; Software GeoGebra; Gráficos de Funções.*

ABSTRACT

The paper exposes the introduction of GeoGebra software as a relay in the teaching of Graphical Representation, Domain Images and Integration of Two Variable Functions. The experience proposes the recognition of the potential of this software in the resolution of mathematical questions that integrate graphical representation in functions of two variables, as well as the domain of the same and their integration. The function of two variables is the content of the curriculum grid of the Higher Education Study Plan in some of the country's universities, and GeoGebra software offers didactic resources that facilitate its teaching. It was carried out in a briefing of three meetings, with the participation of five teachers. The methodology used to achieve the objectives is based on a descriptive case study with essentially qualitative analysis.

Key words: *Continuous Teacher Training, GeoGebra Software, Function Graphs.*

[1] Escola Académica do Mindelo – Cabo Verde - joaocruzsv@gmail.com

Introdução

O ponto de partida do estudo está ligado à minha trajetória pessoal e profissional e do meu percurso como orientador em Matemática, Física, Geometria Descritiva e Informática, que já se desdobra há mais de 35 anos. Desde criança, ainda com apenas o 2º ano do Ciclo Preparatório, que tenho mania de "orientar" estudantes. Deixei de estudar, por motivos vários, contando apenas com o Ciclo Preparatório. A casa dos meus pais era cheia de estudantes à procura das tais "orientações". Passados onze anos naquela aventura curiosa, sem fins lucrativos, o pai de uma das alunas que frequentava as sessões, veio ter comigo e pediu-me o favor de orientar a filha que estava apresentando sérias dificuldades, inclusive com perda de ano. A referida aluna já contava o 2º ano dos Liceus, dois anos acima do meu nível, fato que eu adiantei justificando não a minha indisponibilidade, mas sim a minha impossibilidade. O pai, convincentemente desesperado, argumentou: "tu és inteligente, ficas a estudar com ela e vais ajudando como puderes". Aceitei e um ano depois da frutífera orientação fiquei ainda mais limitado. Influenciado pelo pai da aluna resolvi estudar. Na época a escola onde procurei acesso não formou uma turma do 1º ano dos Liceus, mas sim um intensivo 1º, 2º e 3º anos. Desta feita, instigado pelo professor que na época fazia também de secretário da escola, matriculei-me em regime externo para exames finais. Fiz os 3 anos numa sentada e paralelamente à aluna em questão conclui o 3º ano do Curso Geral dos Liceus. Com o mesmo modelo, no ano seguinte fiz o 1º e 2º anos do Curso Complementar (último degrau do ensino secundário), enquanto a aluna, como interna, concluía o 1º ano do Curso complementar. No ano seguinte fui convidado a lecionar Geometria Descritiva, imaginem, do Curso Complementar pós-laboral, na mesma escola onde tinha concluído o secundário. Iniciei, desta forma, as minhas atividades como professor, paralelamente às minhas atividades como Técnico em Radiologia Médica. Comecei no ensino, como tantos outros professores, sem nenhuma preparação específica para tal. Era um jovem com enorme facilidade de comunicação, que tinha compreendido e apreendido, razoavelmente, os conteúdos de Geometria Descritiva, Física, Informática e Matemática do Ensino Secundário, o que me possibilitava resolver a maior parte dos problemas sugeridos nos livros escolares. Essas qualidades eram vistas como satisfatórias para as escolas que me contratavam para ensinar as referidas disciplinas e para os alunos que assistiam às minhas aulas particulares. O perfil dos profissionais que atuavam na área era aproximadamente o mesmo: praticamente nenhuma formação pedagógica e não estavam interessados em examinar, minuciosamente, o porquê das dificuldades relacionadas com o ensino e a aprendizagem da Matemática, pois o objetivo era treinar os alunos para a prova. Como orientador particular tinha muita importância, não precisava corrigir tarefas e provas e tinha, agora, remuneração bastante compensatória. Pela enorme extensão do programa de Matemática a ser cumprido e pelo curto período de que os alunos dispunham, não havia espaço para indisciplina nas aulas, pois os estudantes estavam quase sempre atentos e motivados. Todos os professores atuavam independentemente, cada um possuía as próprias habilidades e estratégias. Na tentativa de encontrar maior credibilidade teórico-prática para analisar, aprofundar e propor alternativas a esse modelo, resolvi voltar aos bancos escolares e, em 2008, não abrindo o Curso de Matemática pós-laboral, ingressei o Curso de Manutenção de Equipamentos e Sistemas Hospitalares e Hoteleiros (**M.E.S.H.H.**). A expansão alcançada no retorno à Universidade trouxe-me mais solidez no que se refere à argumentação das ideias, mas no que tange às atividades de ensino, minhas ansiedades, incertezas e interrogações só aumentaram. Minhas interrogações passaram a ser concernentes a como os alunos, do Básico ao Superior, aprendem Matemática, por que os resultados das avaliações são tão desconsoladores? Porquê tanta desmotivação em relação ao estudo da disciplina e porquê os baixos índices de aprendizagens alcançados pelos alunos? Que posturas deveriam ser conquistadas para estimular a aprendizagem da matemática?

A supracitada aluna, atualmente doutorada em Multimédia em Educação pela Universidade de Aveiro e desenvolveu a sua tese sob o tema "*O GeoGebra na formação e aprendizagem de transformações geométricas isométricas no plano euclidiano*, convida-me, em Outubro de 2016, a integrar um grupo de professores de matemática para uma **Formação de Formadores em GeoGebra para Cabo Verde**, que culminará na **Instalação do Instituto GeoGebra na Universidade de Cabo Verde**. Vislumbrei, imediatamente, a oportunidade de dar asas às minhas inquietações e, deste modo, continuar a contribuir para o sucesso do ensino em Cabo Verde.

Foi uma experiência embrionária em Cabo Verde. Todos os participantes viram a necessidade da importação deste Software para o Programa Nacional do Ensino da Matemática.

Neste trabalho não faço nenhum levantamento bibliográfico de cunho científico em matemática, se tivesse que ser seria em GeoGebra, na medida em que não estou a defender nenhuma tese de conteúdos matemáticos e sim a chamar a atenção e levar ao conhecimento dos senhores professores e dos senhores responsáveis envolvidos na elaboração dos conteúdos curriculares, das potencialidades deste maravilhoso software que é o GeoGebra e da necessidade, urgente, da sua introdução como ferramenta imprescindível na didática do ensino da matemática em Cabo Verde.

Etimologicamente, GeoGebra deriva da harmoniosa aglutinação, de dois ramos específicos da matemática, **Geo**metria e Ál**gebra**, que interagem entre si. É um aplicativo multiplataforma, desenvolvido por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, no ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino ─ desde o básico ao superior. O projeto foi iniciado em 2001, na Universidade de Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na *Flórida Atlantic University* (Hohenwarter, 2007; Silveira, 2015; Silveira e Cabrita, 2013).

Neste âmbito, o software GeoGebra emerge como uma ferramenta de auxílio na aprendizagem, com o objetivo de fomentar um ensino lúdico e ativo, estimulando a memória gráfica e o intelecto visual, suprindo as dificuldades encontradas pelos alunos, e professores, no estudo dos conteúdos matemáticos. Através desta nova proposta, temos como objetivo despertar nos alunos, e professores, um maior interesse e curiosidade, devido à facilidade e rapidez deste software, além de tirar proveito da vontade de aprender e de conhecer que os adolescentes demonstram pela área da informática – espaço que se revela pouco aproveitado pelos professores.

As normas do ensino e da tarefa do professor não devem continuar paralisadas e podem se favorecer dos progressos tecnológicos, fazendo com que eles sejam seus aliados na arte de ensinar. O software GeoGebra favorece executar atividades, nas quais os alunos desenvolvem o intelecto investigativo de pesquisar, analisar, confrontar, conceituar, reformular, compreender as propriedades matemáticas, enfim, que eles próprios concluam a sua aprendizagem, sendo tarefa do professor orientá-los na construção do conhecimento (Silveira, 2015; Silveira e Cabrita, 2013).

Neste momento o professor deixa de ser o portador do saber, permitindo que o aluno arquitete o seu gnosticismo. Professor e aluno traduzem-se em parceiros no decurso de ensino e aprendizagem, diferenciando da rotina tradicional, onde o educando configura-se apenas como um receptáculo de instruções. Surge a necessidade do professor em esgaravatar informação, didácticas e se modernizar para servir-se desse tão necessário recurso (GeoGebra) como uma ferramenta pedagógica, que o auxilie no ensino da matemática.

O uso sensato deste software está firme à forma como se cria a tarefa na qual ele será utilizado. Se o empregarmos apenas como aplicativo de ensinar, estaremos única e exclusivamente informatizando os processos de ensino tradicionais. Conquanto, se ele for explorado como ferramenta pedagógica, ele não será meramente o aplicativo que ensina o aprendiz, mas a ferramenta com a qual este expande, descreve, busca diferentes estratégias e decifra situações–problema. O aluno aprende de modo significativo quando as situações-problema engrandecem a ligação entre as informações novas e as já apreendidas.

É necessário que o ensino, não só da matemática, seja altamente interativo, no qual o professor elabora conjunturas para que os estudantes identifiquem o problema, como seus, e se empenhem em compreender as ideias e usem o que aprenderam para resolver a questão.

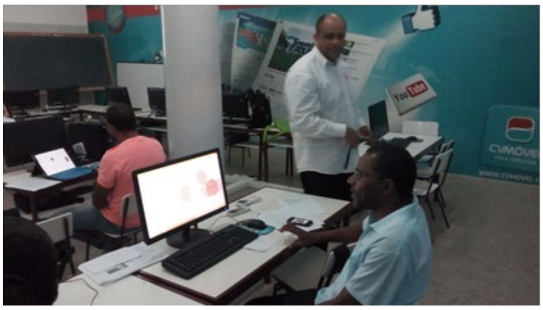
É elementar que ao introduzir novos conteúdos o professor retome o que foi ensinado para que a turma possa utilizar o que já sabe e, assim, construir um novo conhecimento.

Augura-se que o uso do GeoGebra em sala de aula, ultrapasse o “treino” de professores e alunos para a manipulação dessa ferramenta e ambicione atingir metas mais sólidas, com visão crítica o suficiente para inovar, criar conjunturas que entendam o professor como intermediário do conhecimento e, do aluno, como ser ativo, sujeito do seu próprio conhecimento, preferencialmente sustentados por uma boa didática de ensino.

Metodologia

A metodologia utilizada para alcançar os objetivos baseia-se no estudo de caso do tipo descritivo com análise essencialmente qualitativa.

A experiência concretizou-se em um briefing de três reuniões (perfazendo uma carga horária total de 10 horas), para cinco professores (**A.C. A.R.**, **J.C.**, **J.D.** e **S.R.**), incluindo o autor desta comunicação, atuantes com tempo de experiência compreendido entre 3 a 28 anos nos Ensinos Secundário e Superior, de quatro escolas da cidade de Mindelo em Cabo Verde, num dos Laboratórios de Informática de um Estabelecimento de Ensino Secundário desta cidade, ministradas pelo autor desta comunicação, orientador particular, compreendido entre 7 e 9 de julho de 2017, no período vespertino. Verificou-se a efetividade da atmosfera tecnológica armada pelo ativo engajamento entre os participantes e pela vigorosa mediação do orientador. As construções gráficas das funções foram produzidas colaborativamente com a participação total dos envolvidos. É de frisar que três dos professores já estavam familiarizados com o software e que dois deles fazem parte da formação de Formadores que levou a cabo este trabalho.



As reuniões foram gravadas em situações reais, com anuência dos professores, valendo-se de duas câmaras colocadas em tripés no fundo da sala. Antes de encetar os trabalhos, expliquei aos professores o motivo das gravações e, deste modo, estas não interferiram na dinâmica das reuniões.

As explorações sobre o software GeoGebra e o material produzido pelos professores participantes da experiência, poderão incorporar a tecnologia à realidade didáctica, fundamentando e instrumentalizando o processo de construção do conhecimento matemático. Durante as sessões, a insuficiência, latente, do método tradicional da régua e do compasso no que tange às representações gráficas de funções mais ousadas, foi suprida pelo Software de Geometria Dinâmica – O GeoGebra.

A partir de toda a circunstância teórica e tecnológica ensaiada, a novidade da experiência foi a relação integral desenvolvida entre os participantes, que se deu com quatro participantes de forma presencial e um participante através de uma interligação síncrona, em tempo real, remotamente com o software **Team Viewer**, Desktop do computador projetor, e o Viber, voz do professor remoto online, via "**net na mon**".

No decorrer das atividades foram aplicadas fichas de trabalho para investigar os latentes e sobejamente confirmados benefícios do GeoGebra no estudo das funções de duas variáveis.

Ao término de cada reunião, foram feitos levantamentos referentes à reunião, às atividades desenvolvidas e às perceções dos professores-alunos. Os objetivos foram traçados reunião a reunião, assim como sua crítica e constatações que forneceram alguns ajustes e modificações essenciais para melhor entendimento do assunto pelos professores-alunos. Debates coletivos foram levados a cabo, debruçados em alguns trabalhos feitos pelos professores, para reforçar e/ou propor novas formas de resolução

Foi escolhido o estudo da função de duas variáveis por ser um conteúdo da grelha curricular do Plano de Estudos do Ensino Superior em algumas Universidades do País e porque o software GeoGebra oferece recursos didáticos que facilitam o seu ensino, bem como o seu aprendizado.

Apresentação e discussão de Resultados

Aos professores foi-lhes perguntado se enquanto a sua formação académica tiveram alguma disciplina relacionada ao uso de softwares matemáticos. De apenas um obteve-se uma resposta positiva.

Perguntado se os professores utilizavam o laboratório de informática para trabalhar alguma atividade matemática, constatou-se que nenhum utilizava o laboratório.

Quando questionados sobre o que pensavam do uso de recursos informáticos para o ensino da matemática, 3 responderam que ajudava os professores e estimulava os alunos e 1 respondeu que ainda tem dúvidas que realmente estes expedientes favoreçam a aprendizagem.

Inicialmente foram trabalhadas duas fichas (Anexos I e II – Fichas de Trabalho Nº 1 e Nº 2) para a familiarização e manipulação das ferramentas do software em apreciação, resgatando o estudo da geometria euclidiana.

É de se ressaltar aqui que algumas questões nas fichas não precisaram ser respondidas pois, como é óbvio, os “alunos” deste cenário são todos professores do ensino secundário.

Algumas observações feitas pelos professores na resolução destas fichas de trabalho são dignas de registo. Por exemplo, na resolução da Ficha de Trabalho 1, o Professor S. R. importou as seguintes perceções:

I — A análise gráfica sustentada pelo software GeoGebra, coadjuva sobremaneira a manipulação dos objetos no “quadro”, nomeadamente na questão da visualização da construção, na possibilidade de colorir, deformar e perceber suas particulares e familiaridades, sem a necessidade de redesenhar e/ou apagar as peças do “tabuleiro” cada vez que se queira arrastar, aumentar ou demonstrar um procedimento.

II — É manifestamente evidente como o GeoGebra auxilia professores, e alunos, na simulação das propriedades intrínsecas a uma figura plana, tais como medições de ângulos e de segmentos, as posições relativas dos componentes, confrontando axiomas e teoremas, levando-os a conclusões que pelo tradicional régua e compasso, poderia gerar incertezas, tornando inconclusivo o objeto a atingir (ver a figura seguinte).

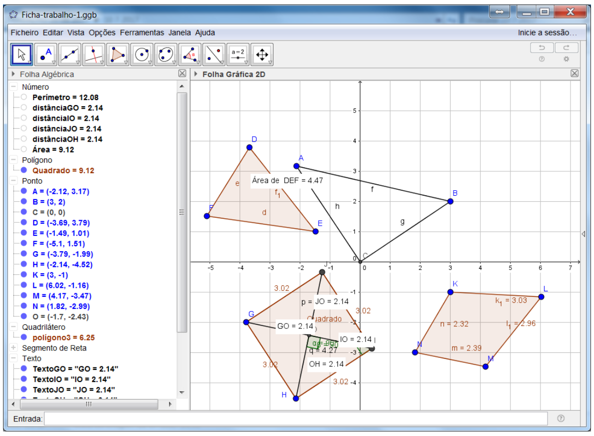


Figura 1 —Trabalho do Prof. S.R. na Ficha de Trabalho Nº 1: Janela do GeoGebra

Quanto à Ficha de trabalho nº 2, o Prof. J. D. destacou que:
I — A visualização espacial constitui um dos problemas mais evidentes para a maioria dos alunos. Os alunos com geometria descritiva no currículo, no fundo, conseguem vislumbrar alguma coisa, ainda assim bem lá no fundo [...].

II — Com o software GeoGebra as latências destas perceções tornam-se evidentes e transparentes, já que o software permite visualizar as peças em todas as vistas possíveis e imaginárias, para não dizer inimagináveis, permitindo "descobrir" pontos, arestas e faces "escondidas" em algumas observações, porém, visíveis em outras. Uma outra perceção, não menos importante, é a possibilidade de analisar em simultâneo, a tradução analítica do que se faz na geométrica.

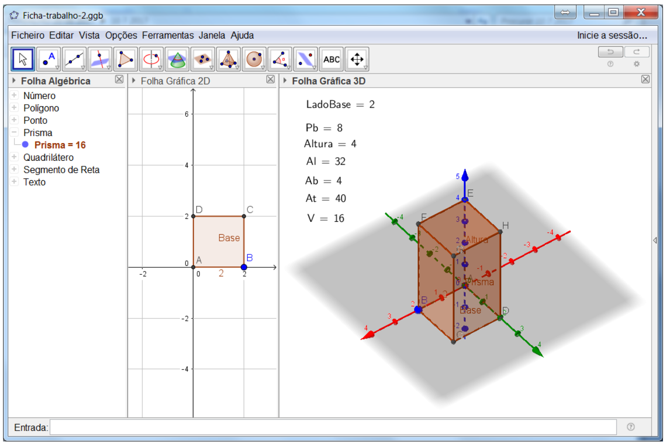


Figura 2 —Trabalho do Prof. J.D. na Ficha de Trabalho Nº 2: Janela do GeoGebra

A figura que se segue é um tema que não estava no âmbito deste trabalho, mas foi construída apenas para "matar" a curiosidade de um dos professores presentes relativamente a determinação das tangentes num ponto percorrendo sobre a função, em função da sua abcissa, de uma forma animada, com o software GeoGebra.

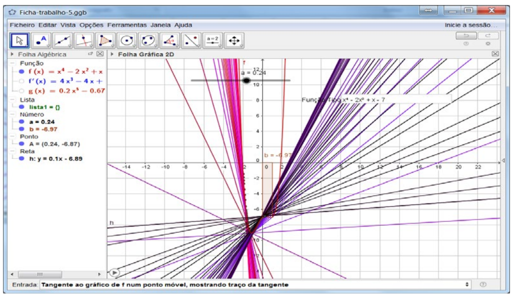


Figura 3 —Trabalho do Prof A.C: tangentes ao gráfico de uma função num ponto deslizante

Supondo que, durante uma aula, alguns professores apresentaram dificuldades relativamente à determinação da área lateral do prisma, pela corriqueira fórmula (perímetro da base) vezes (altura). Favoreça da sua ampla experiência como professor e, usufruindo das potencialidades do software GeoGebra, saia da rotina e elucide esses professores com processos geométricos (ver a figura seguinte que foi construída no GeoGebra para o estudo da determinação da área lateral de um prisma).

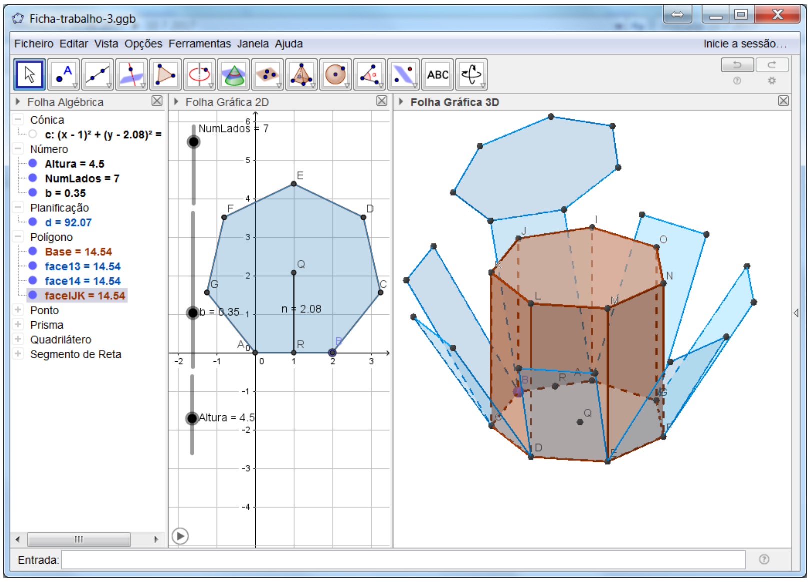


Figura4 —Trabalho do Prof. A.R.: Janela do GeoGebra mostrando a construção

Utilizaram-se os seguintes procedimentos de construção:

1º – foram criados 2 seletores: "***NumLados***", com a ferramenta *seletor* (para o número de lados do polígono da base) e "***Altura***" (para a altura do sólido). Salienta-se que ***NumLados*** ≥ 3. Porquê?

2º – com a ferramenta *polígono regular* construímos o polígono da base de nome "***Base***", de lado $[AB]$ e número de lados igual a "***NumLados***". A ilustração mostra ***NumLados***≡*7*, pelo que o polígono denomina-se heptágono;

3º – construímos uma circunferência passando pelos pontos **A**, **B** e **C**. Já que o menor número de lados de um polígono é 3, então, vão existir, sempre, esses três pontos;

4º – determinamos o centro da circunferência que configura, também, o centro do polígono da base, qualquer que seja o valor do "***NumLados***" e na, sequência, também determinamos o ponto médio da aresta $[AB]$, com a ferramenta *ponto médio ou centro*.

5º – determinamos a apótema do polígono, para o cálculo da área, traçando o segmento cujos os extremos são os pontos encontrados no número anterior;

Obs: *para o cálculo de medidas de comprimento, área e volume, no GeoGebra, podemos recorrer às ferramentas em detrimento de fórmulas matemáticas enfadonhas.*

6º – construímos um prisma assumindo como base o polígono "***Base***", de altura igual ao valor do seletor "***Altura***".

A ilustração na figura seguinte visou enfatizar e elucidar os alunos relativamente à dificuldade em perceberem de onde "surge" a fórmula para o cálculo da área lateral $\boxed{Al \equiv Pb \times h}$. Fazendo a planificação, recorrendo à ferramenta *planificação*, é fácil observar que a folha lateral de um prisma é formada por retângulos cujas áreas já é sobejamente do conhecimento dos alunos, desde o Ensino Básico. Basta calcular a área de um dos retângulos e multiplicá-la pelo "***NumLados***".

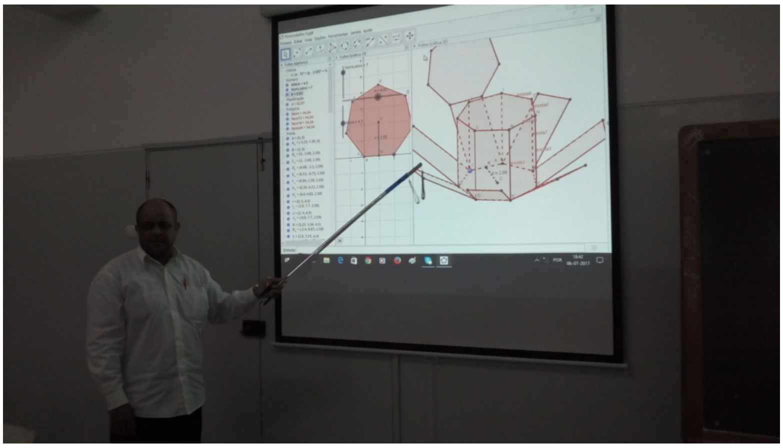


Figura5 ─Ambiente de aula: Janela do GeoGebra ilustrando o momento dinâmico da planificação

Deduzamo-la:

$$
\begin{aligned}
& Al \equiv Pb \times h\,? \\
& A_{\square} \equiv Arestabase \times Altura \\
& Al \equiv NumLados \times A_{\square} \Leftrightarrow Al \equiv \underbrace{NumLados \times Arestabase}_{Perímetro\ Base} \times Altura \\
& Al \equiv PerímetroBase \times Altura \\
& \boxed{Al \equiv Pb \times h} \qquad c.q.d
\end{aligned}
$$

Na segunda fase da experiência, referente ao estudo de **Funções de duas variáveis**, foi necessária uma exposição teórica recorrendo ao tradicional quadro-giz com a finalidade de auxiliar os professores a se apropriarem e/ou refrescarem conceitos de funções de duas variáveis, pois apenas um dos professores participantes costuma lecionar temas do ensino superior, ainda assim, baseado em conteúdos bastantes básicos devido aos conteúdos programáticos do ensino secundário em Cabo Verde.

Definição. Seja a região D um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma função de duas variáveis é uma correspondência que associa a cada par (x, y) em D exatamente um número real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de *f*. O contradomínio de *f* consiste em todos os números reais $f(x, y)$, com (x, y)

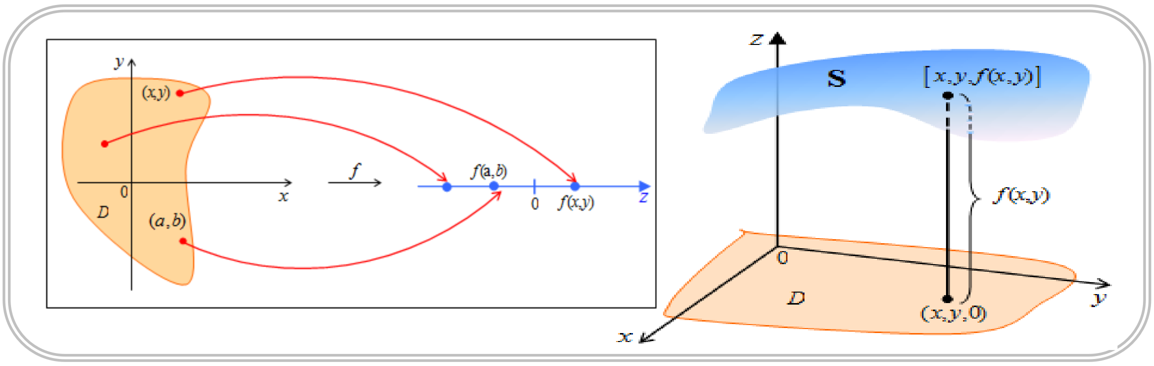


Figura6 — construção feita pelo autor da experiência, com auxílio do Software Microsoft Word

em D.

De seguida resolvemos, para ilustrar, dois exercícios versando o tema função de duas variáveis, recorrendo ao GeoGebra

Seja *f* a função dada por $f(x, y) \equiv \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

a) ***Esboce o gráfico de f, bem como o do seu domínio. Comente.***

Resolução:

O domínio é $Df \equiv \left\{x, y \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 \geq 0\right\} \equiv \left\{x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$, cuja representação gráfica é formada por todos os pontos do plano, interiores à circunferência $x^2 + y^2 \equiv 9$, incluído a fronteira, ou seja, o círculo $x^2 + y^2 \leq 0$.

Quanto ao gráfico, ou imagem, da função, de equação $z \equiv \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, após adequada simplificação, $z^2 \equiv 9 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow z^2 + x^2 + y^2 \equiv 9$, é traduzida numa esfera de raio 3, com $z \geq 0$, ou seja, uma semiesfera.

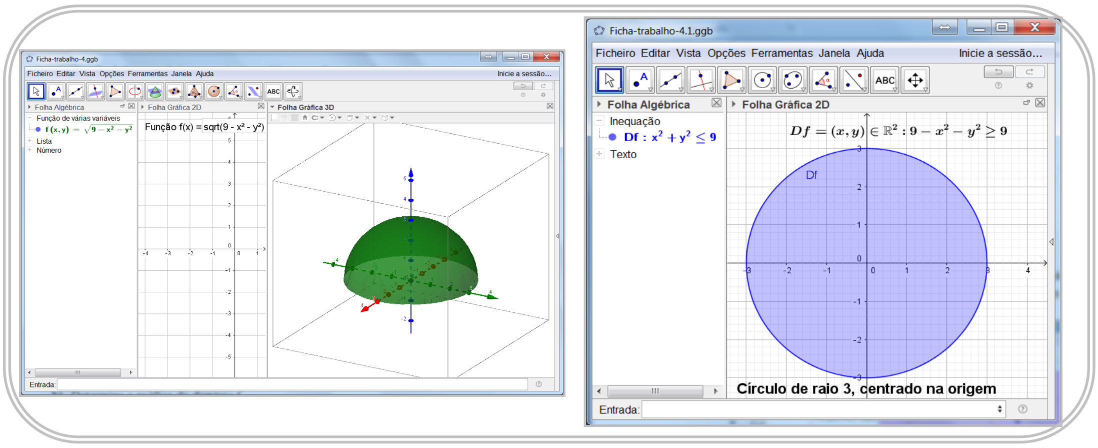


Figura7 — Trabalho do Prof_J.D.: Janela do GeoGebra

Para a sua representação gráfica com o método quadro-giz, aconselhar-se-ia a determinação dos traços da função nos planos coordenados. No plano de referência das cotas, xOy , consideremos $z \equiv 0$ e obtemos $x^2 + y^2 \equiv 9$ traduzido num círculo de raio 3. No plano de referência das ordenadas, xOz , consideremos $y \equiv 0$ e obtemos $x^2 + z^2 \equiv 9$ traduzido num semicírculo de raio 3. No plano de referências das abcissas, yOz , consideremos $x \equiv 0$ e obtemos $y^2 + z^2 \equiv 9$ traduzido num círculo de raio 3.

Unindo os três planos, obtemos um esboço do gráfico

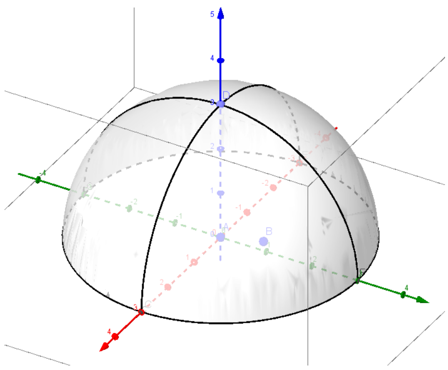


Figura8 — Trabalho do autor da pesquisa.: em substituição do quadro-giz

Para o estudo da curva de nível, também, foi necessária uma súmula abordagem teórica, para contextualizar o tópico em estudo.

Definição: O traço, ou interseção, do plano $z \equiv k$ no gráfico que representa geometricamente a função *f*, projetado no plano xOy, produz uma curva **C** de equação $f(x,y) \equiv k$. Se um ponto $(x,y,0)$ se move ao longo de **C**, os valores $f(x,y)$ são sempre iguais a k. **C** é chamada de **curva de nível** de *f*.

a) ***Determine o domínio de f e represente-o graficamente.***

$$Df\left\{(x,y) \in R^2 \ : \ 9 - x^2 - y^2 \geq 0\right\}$$
$$Df\left\{(x,y) \in R^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

b) ***Exiba os traços produzidos na superfície pelos planos seguintes:***

$$z \equiv k, \quad k \in \left[\,0,3\,\right], \, incremento \equiv 0.3$$

c) ***Comente o que observa?***

Resolução:

As curvas de nível são representações gráficas, no plano xOy, de equações de formato $f(x,y) \equiv k$, isto é, $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \equiv k \Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 \equiv k^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \equiv 9 - k^2$. Estas são circunferências, com centro na origem do referencial, para $0 \leq k \leq 3$

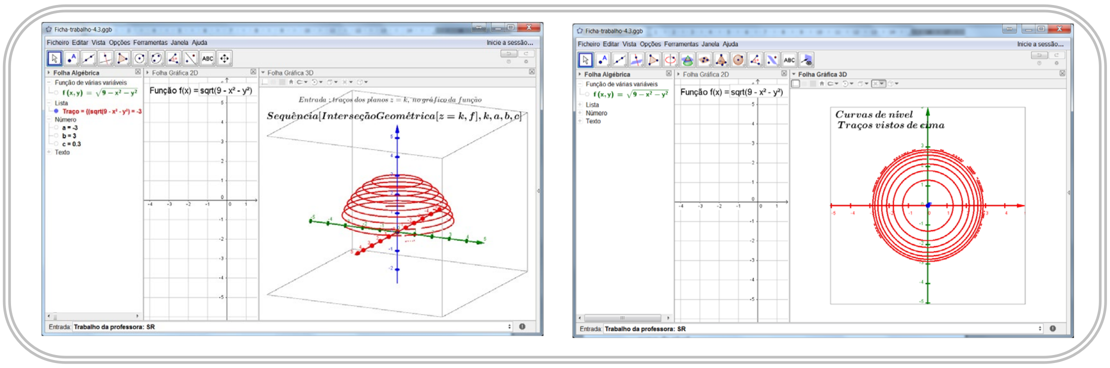


Figura9 —Trabalho do Prof_A.C.: Janela do GeoGebra mostrando a construção

É possível vislumbrar, à esquerda, os traços dos planos na superfície semiesférica representativa da função — círculos de nível paralelos entre si — traduzidos, à direita, pelas respetivas curvas de nível, quando vistas de cima e projetadas no plano de referência das cotas — circunferências concêntricas na origem.

Esta proeza foi possível fazendo uso de dois comandos internos do GeoGebra (comando *Sequência* e comando *InterseçãoGeométrica*), de forma aninhada e, desta feita, pela *entrada de comandos*:

Sequência[InterseçãoGeométrica[z = k, f], k, 0, 3, 0.3]

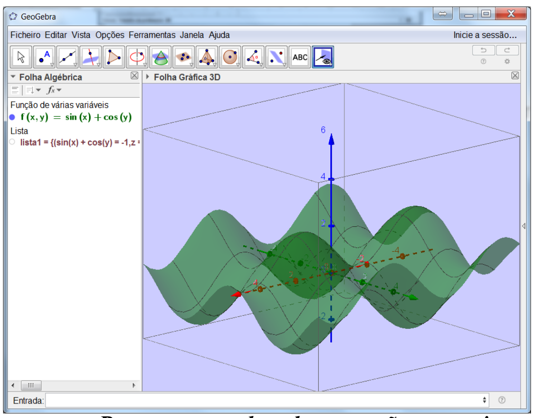
Lançou-se de seguida o seguinte desafio aos professores:
Seria possível representar o gráfico e algumas curvas de nível da função?

$$f(x, y) \equiv sen(x) + \cos(y)\,?$$

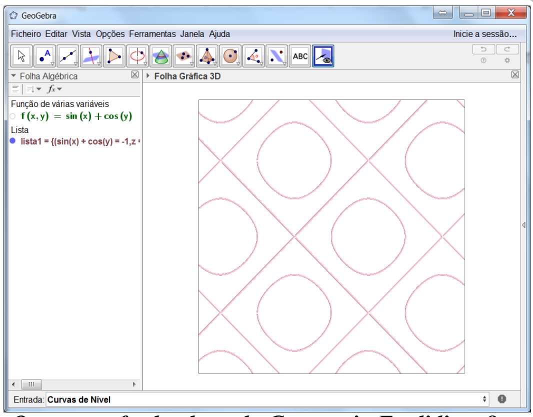
Bom, pelo método tradicional, apenas aventurar-se-ia imaginar tal espetáculo, porém, revelar-se-ia dificílimo, para não dizer impossível.

Recorramos ao nosso GeoGebra!

O gráfico da função $f(x, y) \equiv sen(x) + \cos(y)$ *e as respetivas curvas de nível*



Parece uma palete de ovos, não parece!



O que nos faz lembrar da Geometria Euclidiana?

Figura10 —Trabalho do Prof_AR.: Janela do GeoGebra mostrando a construção

Poder-se-ia aproveitar as figuras para se estabelecer a conexão entre os conceitos em estudo e as transformações geométricas isométricas no plano euclidiano e as simetrias. Por exemplo, os tipos de frisos podem ser explorados neste contexto.

Ora, como pudemos observar, o GeoGebra facilita, sobremaneira, a tarefa do professor, não porque este não consegue reproduzir os gráficos pelo método tradicional, pelo menos os acima apresentados, mas porque o rigor e a perfeição, no tempo estipulado, só são conseguidos com um software adequado e concebido à medida.

Na última fase da experiência, abordou-se o tópico Integral Dupla, com realce ao Teorema de FUBINI, para o estudo do Volume de Sólidos por Integração Iterada.

O autor desta comunicação, explorou estes tópicos em conjunto com os professores participantes do estudo.

Para tal, inicialmente discutiu-se a definição de uma integral dupla.

Definição. Uma função de duas variáveis está definida numa região do plano xOy, pelo que se deve considerar a integral de *f*, definida numa região do plano xOy e, consequentemente, as partições definidas por pequenos retângulos, nesse plano.

Como exemplo, lançou-se o seguinte desafio: Calcule o volume aproximado do sólido acima do retângulo $R \equiv [0,3] \times [0,2]$ e abaixo do plano $z \equiv 10 - x - 2y$.

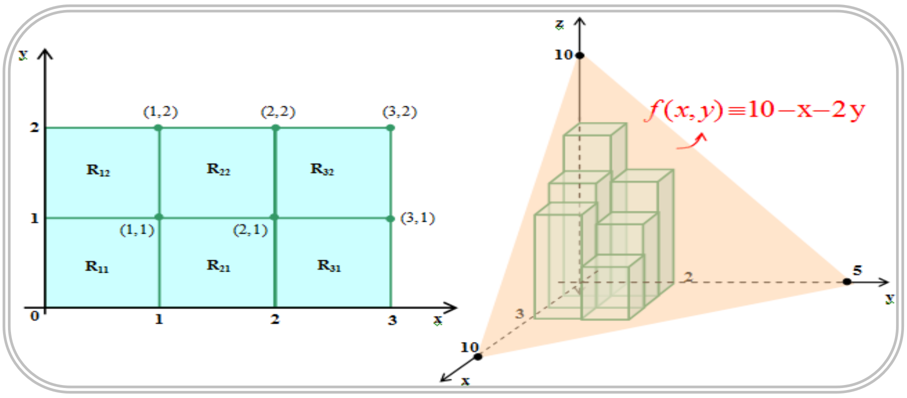


Figura11 — construção feita pelo autor da comunicação, com auxílio do Microsoft Word

O desafio foi resolvido por dois métodos distintos:

I — <u>Pela noção de somatório dos volumes de todos os paralelepípedos</u>

$$V \approx \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f\left(x_i, y_j\right) \Delta A$$

$\approx f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,1)\Delta A + f(2,2)\Delta A + f(3,1)\Delta A + f(3,2)\Delta A$

$\approx 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1$

$\approx 30\, u.v.$

II — <u>Por integração Iterada</u>

O Volume, denominado de integral iterada (também se diz integral dupla) de *f* no retângulo *R*, é por definição: $\lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left(x_i, y_j\right) \Delta A_i \equiv \iint_R f(x,y)\,\mathrm{dA}$,

sendo $dA \equiv dxdy \;\; ou \;\; dA \equiv dydx$

$$V \equiv \iint_R f(x,y)\,\mathrm{dA} \equiv \int_0^3 \int_0^2 (10 - x - 2y)dydx \equiv \int_0^3 \left[10y - xy - y^2\right]_0^2 dx$$

$$\equiv \int_0^3 [16 - 2x]dx \equiv \left[16x - x^2\right]_0^3 \equiv 48 - 9 \equiv 39\,u.v.$$

Igualmente, aproveitou-se o momento para uma revisão do **Teorema de Fubini:**

Se uma função $f(x,y)$ é contínua para todos os pontos da região $A \equiv \left\{ (x,y) \in R^2 : a \leq x \leq b \;\; \wedge \;\; c \leq y \leq d \right\}$ e $f(x,y) \geq 0$, então:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \equiv \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Verificação:

$$V \equiv \iint_R f(x,y)\,\mathrm{dA} \equiv \int_0^2 \int_0^3 (10 - x - 2y)dxdy \equiv \int_0^2 \left[10x - \frac{x^2}{2} - 2xy\right]_0^3 dy$$

$$\equiv \int_0^2 \left[\frac{51}{2} - 6x\right]dx \equiv \left[\frac{51}{2}x - 3x^2\right]_0^2 \equiv 51 - 12 \equiv 39\,u.v.$$

Como se pode observar, há uma margem de erro bastante considerável (9 unidades volumétricas) entre os volumes devolvidos pelo processo da soma dos volumes dos paralelepípedos e pelo processo de integração iterada, isto porque o primeiro processo é uma grosseira aproximação por defeito. Para minimizar esse erro, a partição do domínio deve fazer-se em quadrados de lados bem menores. Quanto maior o número de paralelepípedos conseguidos, mais próximos ficam os volumes dados pelos dois rocessos considerados.

Mediante o exposto, de seguida foram exploradas as potencialidades do GeoGebra para o cálculo de volumes.

Para objetar, construamos um recurso que possibilite apresentar os episódios da resolução de uma integral dupla, de forma dinâmica, que seja exequível as seguintes entradas (□)

$$\iint_{\square} \square\,\mathrm{dA} \equiv \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \square\, dydx \equiv \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

Nos momentos de discussões, conclui-se que a resolução de questões envolvendo volumes, implica observar alguns passos:

- Desenhar o sólido, em 3D, definido pelos gráficos das funções;
- Identificar a região que configura a base, no plano xOy e desenha-la;
- Identificar, também, a função que dá a altura do sólido (*teto do sólido*);
- Escrever a integral dupla cujo valor traduz o volume do sólido;
- Calcular o valor da integral definida no ponto anterior;

Observemos, a seguir, os passos principais da resolução do problema anterior:

$$\int_0^3\int_0^2 (10 - x - 2y)dydx \cdot$$

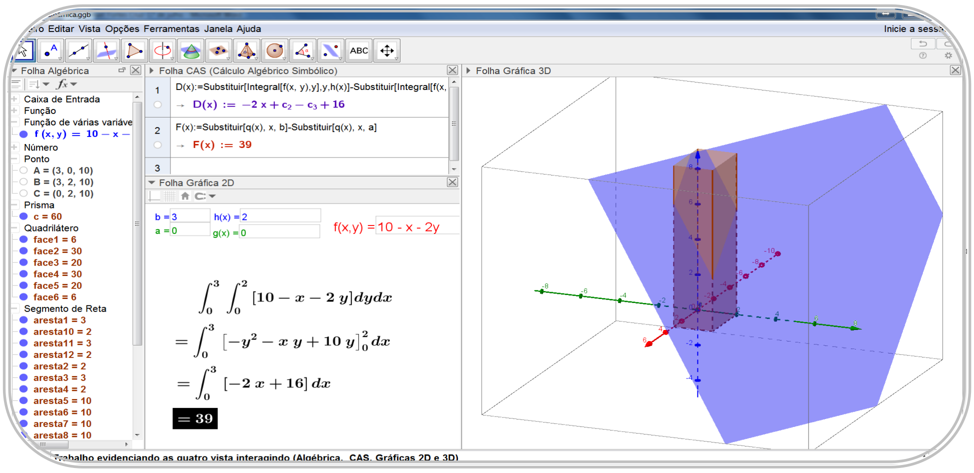


Figura12 —Trabalho do autor da pesquisa: 4 Janelas (Algébrica, 2D, 3D e CAS)

1º – Criamos, na folha gráfica 2D e valendo da ferramenta *inserir Campo de Entrada*, cinco caixas de texto, para a inserção dos quatro limites de integração $[\ a\ ,b\ , g(x)\ , h(x)\ ]$ e da função integranda $[f(x,y)]$ que nos vão possibilitar a edição dos mesmos e devolver, dinamicamente e em tempo real, a solução do problema;
2º – Com a ferramenta ABC *caixa de texto*, construímos textos dinâmicos na forma **LaTex**, para tornar o trabalho interativo e mais favorável ao ensino e aprendizagem

Para devolver $\int_0^3\int_0^2 (10 - x - 2x)dydx$ na janela gráfica, em forma LaTex escrevemos:

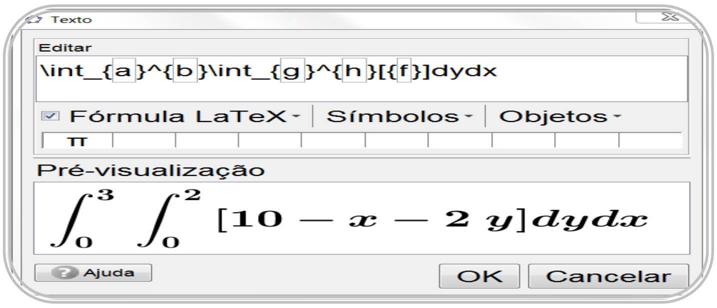


Figura13 —Trabalho do autor da comunicação: introdução de texto em LaTex

Para devolver $\int_0^3 \left[-y^2 - xy - 10y\right]_0^2 dx$ na janela gráfica, em forma LaTex escremos:

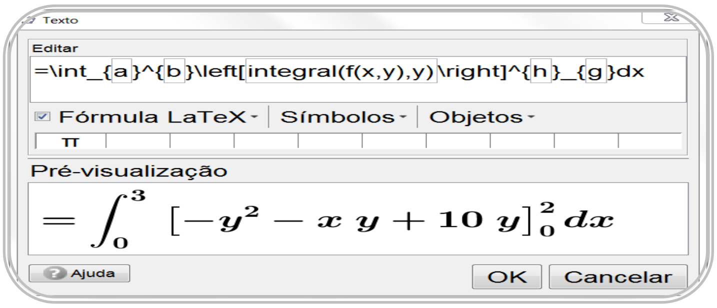


Figura14 —Trabalho do autor da comunicação: introdução de texto em LaTex

Obs: *O "**left**"* e o *"**right**", introduzidos antes dos parênteses retos, foram para adaptar, dinamicamente, a altura dos parênteses à do resto do texto.*

3º – conjugando e interagindo as janelas, folha algébrica, folhas gráfica 2D, 2D2 e 3D e **C**álculo **A**lgébrico **S**imbólico (CAS) edificamos e solucionamos o desafio.

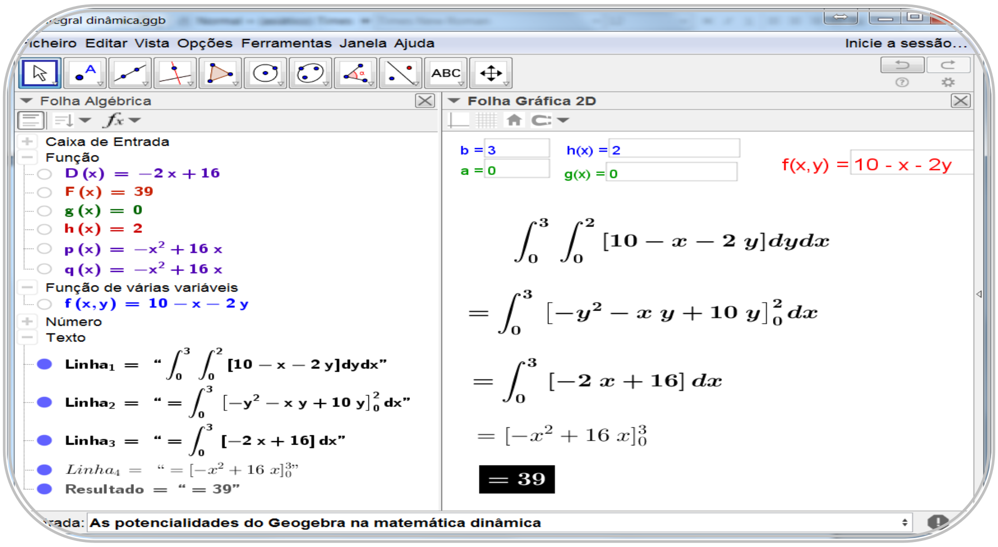


Figura15 —Trabalho do autor da comunicação: O dinamismo do Software GeoGebra

Se alterarmos os conteúdos nos campos de entrada, toda a estrutura vai mudar, isto é, vai moldar-se e apresentar o resultado de acordo.

Alteremos os limites de integração, a , b , $g(x)$, $h(x)$ e a função integranda $f(x, y)$:

Calcule $\iint_D (x+2y)\,\mathrm{dA}$ sendo D a região limitada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

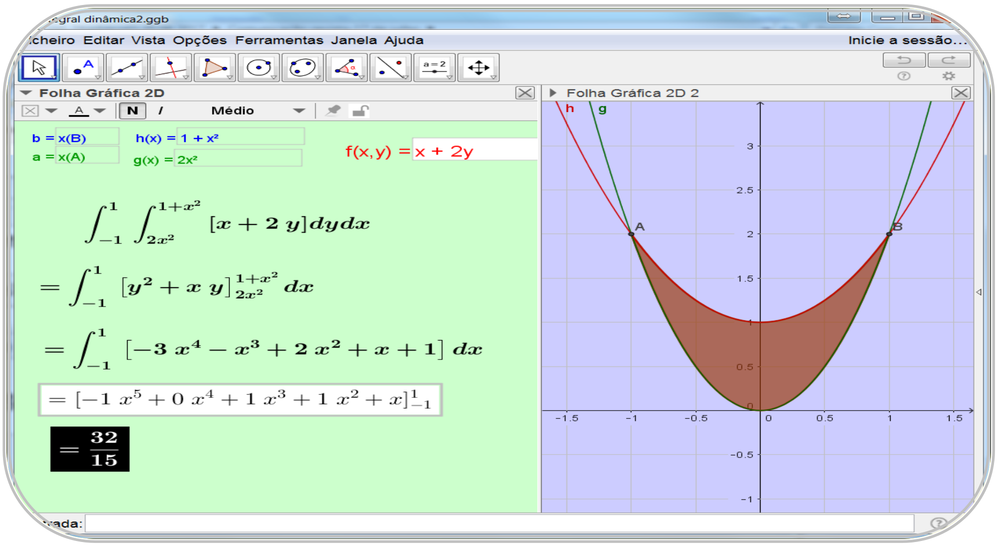


Figura16 —Trabalho do autor da comunicação: O dinamismo do Software GeoGebra

Observação: Neste episódio, os limites de integração interiores podem ser funções da variável de integração exterior, mas os limites de integração exteriores não podem depender de nenhuma das variáveis.

Para encontrarmos os extremos observemos que **y** varia da parábola inferior $y \equiv 2x^2$ à parábola superior $y \equiv 1 + x^2$, para cada **x** fixo, e que **x** varia da abcissa do ponto **A** à abcissa do ponto **B,** $x(A) \equiv -1$ à $x(B) \equiv 1$, ambos pontos de interseção das duas parábolas, para varrer toda a região, conforme realça a construção desenvolvida na ***janela gráfica 2D2*** do GeoGebra.

Os pontos **A** e **B** podem ser conseguidos por processos puramente geométricos, fazendo uso da ferramenta  *interseção de dois objetos* ou digitando na entrada de comandos, **Intersetar(<Objeto>, <Objeto>**), tomando como objetos, **g** e **h**, designações atribuídas às parábolas do cenário.

A delimitação da área, bem como o seu sombreado, foram conseguidos digitando na entrada de comando a seguinte sintaxe: **IntegralEntre(h, g, x(A), x(B))**. Esta região configura-se a base do sólido abaixo da função integranda $f(x,y) \equiv x + 2y$ e acima da área colorida balizada pelas parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Conclusão

As reuniões revelaram-se muito produtivas. Os professores participaram de forma ativa interagindo com o software GeoGebra, manipulando os gráficos podendo observar e comparar as mudanças. A comparação, auxiliada pela disponibilidade da interatividade do software, permite observar vários objetos ao mesmo tempo. É de se evidenciar que este software é de fácil adaptação, favorecendo desenvolver e executar uma diversidade de atividades mais rapidamente. Os objetivos foram claramente alcançados.

Foi possível comprovar que quando se toma parte das escolhas, e se é estimulado, a solução é positiva. Os professores foram unânimes em atestar que a aplicação do software GeoGebra no ensino da matemática, só traz vantagens na aprendizagem do aluno, pois este pode interagir com o conteúdo, a utilidade no caso da possibilidade de visualização do construído, faculdade de modificação e eliminação das figuras geométricas, além da oportunidade de animar, deformar e entender suas particulares e semelhanças. Utilizando o GeoGebra, promove-se a aprendizagem do aluno e, deste modo, ele consegue desenvolver o seu próprio conhecimento dentro de um ambiente instigante e motivador. Salienta-se que este trabalho teve um sentido muito importante, na medida em que essa capacitação aumentou a confiança dos professores participantes em trabalhar com o auxílio do GeoGebra, vencendo a insegurança perante os alunos e mostrando que o uso de uma nova proposta de trabalho em sala de aula faz parte do processo de formação continuada.

O professor que atua como mediador do sistema educativo deve fazer uso de distintos meios didáticos, a fim de encontrar uma interação positiva e construtiva entre o conhecimento e a aprendizagem dos alunos. O livro didático foi, é e continua sendo forte manancial de informações para o ensino, no entanto, pode-se fazer uso de diversos outros recursos didáticos, nomeadamente o GeoGebra, para o sistema de ensino e aprendizagem da matemática, fazendo a ponte entre os alunos e os conteúdos estudados. Os professores participantes ficaram motivados a fazer uso do GeoGebra, como opção de ensino da matemática.

Todos somos responsáveis pelo sucesso ou fracasso do Programa Nacional da Educação. Ajude o Instituto GeoGebra a contribuir para o sucesso do Ensino da Matemática em Cabo Verde!

Referências

CARRILLO, A (2013). Nuevas opciones para trabajar con GeoGebra 4.2: Cálculo simbólico (CAS). Organización de Estados Iberoamericanos OEI: Espanha.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=T5NbnG7N3-w (acedido em 20 de Outubro de 2016).

CARRILLO, A (2016). GeoGebra como recurso para unas nuevas matemáticas. Organización de Estados Iberoamericanos OEI: Espanha.

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=sND4Kwlutjs (acedido em 20 de Outubro de 2016).

DOS SANTOS, J. (2013) GeoGebra 5.0 Beta - Da Esfera ao Nosso Planeta.... MinhoMat2013 – Escola EB 3/S de Arcos de Valdevez, 26 de Janeiro. Acedido a 13-02-2013 em:www.GeoGebra.org.pt/ficheiros_on_line/video/conf_MinhoMat2013.mov, e em http://www.GeoGebratube.org/student/m30800 .

DOS SANTOS, J. TROCADO, A. (2015). GeoGebra as a Learning Mathematical Environment, in 7th International Workshop on Mathematical e-Learning. Universidade Aberta, 8 and 9 of June.

DOS SANTOS, J. (2013 a). GeoGebra 3D, para a aprendizagem da geometria tridimensional na disciplina de Matemática A, num 10o ano de escolaridade, em Portugal. Jornadas da Associação Catalã de GeoGebra. Universidad Pompeu fabra.

DOS SANTOS, J. TROCADO, A. (2008) Estudo de isometrias com o GeoGebra como abordagem possível para o 1o e 2o Ciclo do Ensino Básico no contexto do reajustamento do Programa de Matemática do Ensino Básico. Sessão Pratica, MinhoMat 2008. Vila Verde. Acedido a 23-01-2013 em: http://www.GeoGebra.org.pt/images/arquivos/minhomat_2008/MinhoMat_2008.pdf.

HOHENWARTER, M., & PREINER, J. (2007). Dynamic Mathematics With GeoGebra. Disponível em: http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html (acedido em 17 de Abril de 2012).

SILVEIRA, A. (2015). *O GeoGebra na formação e aprendizagem de transformações geométricas isométricas no plano euclidiano*. Tese de doutoramento. Aveiro: Universidade de Aveiro.

SILVEIRA, A. & Cabrita, I. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das Transformações Geométricas Isométricas no plano euclidiano. Indagatio Didactica, 5(1), 149-170.

SILVEIRA, A. & CABRITA, I. (2012). GeoGebra: uma alternativa para o ensino e aprendizagem da Geometria. *I WorkShop Internacional sobre o ensino da Língua Portuguesa, Matemática e Disciplinas Afins*. Praia: Universidade de Cabo Verde.

SILVEIRA, A. & CABRITA, I. (2012). Oficina de formação para Professores dos Ensinos Básico e Secundário: Geometria e potencialidades do GeoGebra. I

WorkShop Internacional sobre o ensino da Língua Portuguesa, Matemática e Disciplinas Afins. Praia: Universidade de Cabo Verde.

RECEBIDO:16/05/2018

ACEITO: 25/06/2019