Experiencias Docentes

Innovación educativa con un cubo flexible didáctico

Educational innovation with a flexible didactic cube

Mª Esperanza Teixidor Cadenas

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 1, pp. 055−064, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Sep'18; Aceptación: 10 Ene'19

1 de abril de 2019

Resumen

Ante un dibujo geométrico complejo, la mayoría de las personas distinguen primero figuras de dos dimensiones. Y luego las figuras de tres dimensiones. Se propone cambiar el orden en la enseñanza de la geometría, para empezar con la tercera dimensión. Así conseguiremos mejorar la visión espacial.

El cubo didáctico Bafi, con vértices flexibles, es un material muy útil para reconocer y comprender volúmenes, superficies y longitudes. Manipulando este recurso educativo, se visualizan claramente algunos conceptos matemáticos en los que el alumnado tiene dificultades.

Palabras Clave: Innovación didáctica, geometría, enseñanza-aprendizaje, cubo Bafi.

Abstract

When observing a complex geometric drawing, most people first distinguish two-dimensional figures. And then the three-dimensional figures. Here it's proposed a change in the teaching order of geometry to start with the third dimension. This way we will be able to improve the spatial vision.

The Bafi Didactic Cube, with flexible vertices, is a very useful material to recognize and understand volumes, surfaces and lengths. Manipulating this educational resource, some mathematical concepts in which the students have difficulties are clearly visualized.

Keywords: Educational innovation, geometry, teaching and learning, Bafi cube.

1. Introducción

Todo comenzó en las rebajas, comprando una blusa muy geométrica. Mirando el dibujo, cada vez encontraba nuevas figuras, resultando un interesante reto matemático. Seguidamente me planteé preguntar a la gente qué figuras identificaban primero. Tiempo después, Pepe Vidal (de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas) me reprodujo el dibujo con el programa Geogebra, para poder mostrarlo y enviarlo a otras personas.

Las respuestas obtenidas de personas de distintas edades (escolares, universitarios y profesionales) son similares. Es llamativo que la mayoría de las personas lo primero que perciben son las figuras planas, de dos dimensiones: estrellas, triángulos, hexágonos. Si se fijan más, o cambian de punto de vista, descubren la tercera dimensión. Y finalmente las líneas y los puntos.

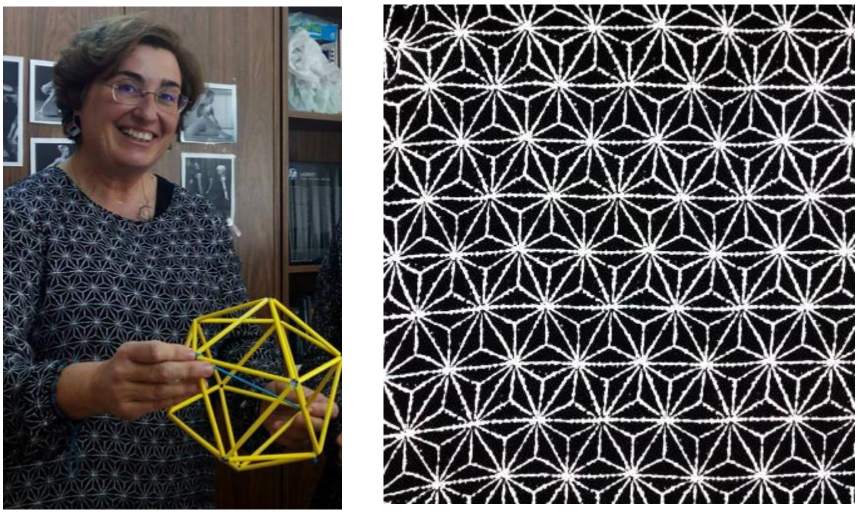

Figura 1. La autora y detalle de la blusa.

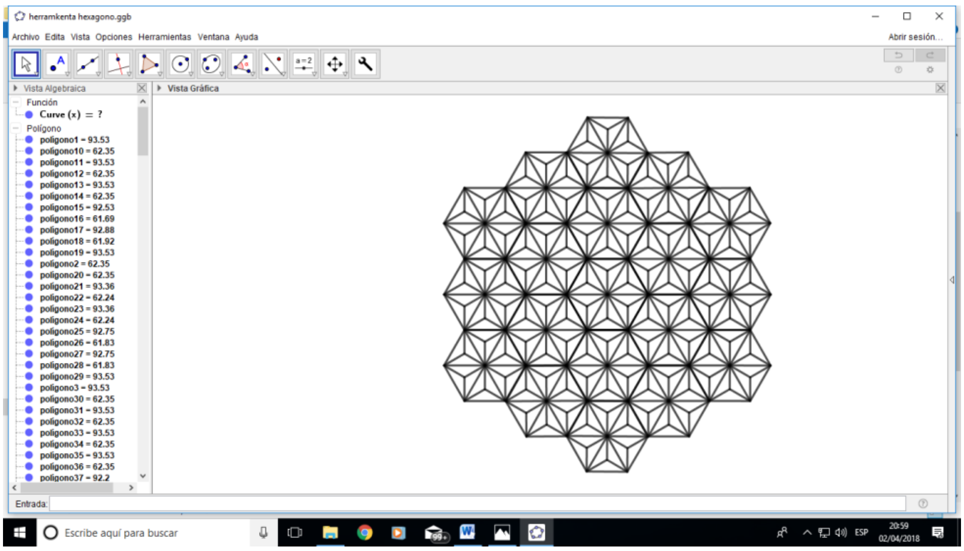

Figura 2. Dibujo obtenido con el programa Geogebra.

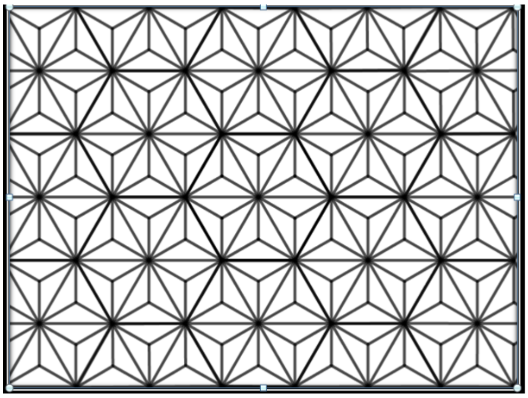

Figura 3. Imagen para mostrar.

Mira este último dibujo y responde: ¿Qué es lo primero que ves? Sigue buscando qué otras figuras hay. Haz una clasificación de ellas según sean de una, dos o tres dimensiones. Por ejemplo, de dos dimensiones puedo encontrar triángulos equiláteros e isósceles, rombos, romboides, trapecios, trapezoides, cuadriláteros irregulares, pentágono irregular, hexágono regular… Y de tres dimensiones, cubos y tetraedros.

¿Por qué en primer lugar ven las figuras planas y no los cubos? Posiblemente sea porque se sigue enseñando comenzando por las líneas rectas (que no tienen ni comienzo ni final), que es lo más abstracto ¡Y no existen en la realidad! Y encima pretendemos que nuestro alumnado lo entienda. Lo que se logra es un aprendizaje memorístico. Esto tiene que ver con la necesidad de cambiar el orden en la enseñanza de la geometría, comenzando por la tercera dimensión. Así se explica en mi artículo del número 92 de la revista *Números*. Ver Bibliografía.

Es apasionante la tarea de enseñar a ver, a visualizar las figuras. Cuando se visualizan los conceptos matemáticos se comprenden en profundidad. Es una destreza que con el material Bafi se puede desarrollar. El cubo Bafi se transforma al manipularlo en distintas figuras geométricas. Está formado por doce tubos iguales, ensartados en un hilo elástico, que los mantiene unidos. Se caracteriza por sus vértices flexibles, pudiéndose convertir en al menos 18 figuras. Ha obtenido la concesión de modelo de utilidad (según el Boletín Oficial de la Propiedad Industrial de fecha 21/10/2014).

El cubo didáctico Bafi es un material idóneo para este cometido. No sólo es un cubo. De la misma forma, ensartando elástico en bastoncillos, hacemos otras construcciones como los cuerpos platónicos, la bipirámide pentagonal, las pirámides cuadradas y los polígonos.

2. Fundamentos metodológicos y práctica educativa

Los Bafis siguen dando sorpresas, como las muñecas rusas. Son una fuente continua de aprendizaje, tanto para el profesorado como para el alumnado.

A nivel metodológico se constata lo que es imprescindible para un aprendizaje significativo:

2.1 Aumentar el tiempo de manipulación de los materiales didácticos

Es común en el profesorado que a veces tenga prisa por enseñar, en lugar de ayudar a descubrir. Por ejemplo, el alumnado puede encontrar otras formas de construir los cuerpos geométricos.

La investigación y lo que descubren es la mejor auto-recompensa ya que despierta el interés y las ganas de investigar.

La alumna Paula Toledano, de cuarto de Primaria en Gran Canaria, descubrió otras dos formas de construir la pirámide de base cuadrada. Ella me enseñó a esperar y no tener prisa en vez de explicarlo todo. Es mucho más ventajoso que investiguen. Ese esfuerzo por conseguir hacerlo y luego verbalizar lo que han hecho es muy gratificante para ellos.

Mario, alumno de la Facultad de Educación en Madrid, descubrió como construir esa misma pirámide desde el hexaedro irregular. De 3 dimensiones a 3 dimensiones. Anteriormente se construía desde figuras de dos dimensiones.

En marzo de 2018, una futura maestra sevillana llamada Blanca, lo consiguió a partir de un cuadrado de tres bastoncillos por lado. Y seguidamente nos dijo: “Me he sentido muy bien”. La mejor recompensa es que el alumnado descubra por sí mismo y auto-refuerce sus logros. Y además estimula al resto de la clase a seguir trabajando para buscar nuevos caminos de conseguirlo.

Figura 4. Blanca y Mario.

2.2 Aprovechar los fallos para construir conocimiento.

Es importante hacer pensar, planteando preguntas interesantes para que el alumnado razone o descubra en que falló y encuentre nuevos caminos.

Todavía encontramos personas de todas las edades, no solo escolares, que confunden el tetraedro con el triángulo, o el cubo con el cuadrado. Por ejemplo, cuando mostrando un cubo Bafi te dicen que es un “cuadrado”. Es muy fácil corregir el error mediante un sencillo giro del cubo, que lo transforma -ahora sí- en un cuadrado.

De vuelta al cubo, les das la razón, por estar formado por cuadrados. A continuación les preguntas: ¿pero cuántos cuadrados tiene este cubo? Algunos cierran los ojos para visualizar el libro de matemáticas donde lo habían visto. Otros se ponen rápidamente a contar hasta decir seis. Con esta observación se descubre cómo ha sido su aprendizaje. Luego para enseñarles a apreciar la característica de "volumen", propia del cubo, les haces observar que es posible introducir la mano, o llenarlo con un líquido o un sólido. Todo este proceso se hace mediante preguntas que les ayudan a diferenciar superficies y volúmenes.

2.3 Vivenciar los conceptos para que cobren significado.

A veces seguimos empleando palabras que ya no concuerdan con el producto actual, pero que inicialmente eran coherentes. En matemáticas, como en toda ciencia, el lenguaje es importante. Incluso es un motivo para fomentar el interés por el origen de las palabras y su empleo correcto. Por ejemplo, "tetrabrik". La RAE dice: "envase de cartón impermeabilizado, cerrado herméticamente, y generalmente de forma rectangular, para bebidas y alimentos líquidos". La grafía original es Tetra Brik y se trata de una marca registrada de la empresa Tetra Pak. Sabemos que "tetra" significa cuatro caras. Pero los actuales envases tienen seis caras, son ortoedros. ¿Por qué esta confusión? La causa es que al principio los envases tetrabrik eran tetraedros.

Figura 5. Forma de los primeros envases tetrabrik.

A continuación formulo una serie de preguntas, y expongo la experiencia realizada para visualizar esos conceptos y que permanezcan en el tiempo. Con el material Bafi, los errores frecuentes se evitan o superan.

2.3.1 ¿Por qué 1m = 10dm, 1m^2 = 100dm y 1m^3 = 1000dm?

La tradicional enseñanza de "la escalera", que encontramos aún en muchos libros de texto, ha propiciado la pérdida de significado para el alumnado. La misma escalera sirve para longitudes, superficies y volúmenes con sólo una diferencia numérica. Con esta enseñanza tradicional se trasmite un aprendizaje memorístico sin sentido. Con el material Bafi logramos un aprendizaje significativo de las dimensiones. Podemos comprobar:

a) Un metro de longitud (que se hace con el Bafi de 1 m de arista) equivale a 10 Bafis de un decímetro de arista.

b) En un metro cuadrado (con un Bafi de 1 m de arista se forma un cuadrado) caben 100 dm^2 (100 Bafis de 1 dm de arista en forma de cuadrado).

c) En un metro cúbico caben 1000 litros. Lo primero es comprobar que en un Bafi de 1dm de arista cabe un litro. Al alumnado le cuesta, porque la imagen que tienen del litro es la de un tetrabrik que es más estrecho y alto. Primero medimos el tetrabrik: 5 x 10 x 20 cm. Seguidamente cortamos con tijeras la mitad, y colocamos las dos mitades juntas. De esta manera comprobamos que es lo mismo: 10 x 10 x 10 cm. También aritméticamente en ambos casos son $1000cm^3 = 1dm^3$. Con el cubo Bafi se puede comprobar poniendo unas caras de plástico transparente y dentro del cubo, una bolsa donde introducir el agua.

Una vez visto que cabe un litro, nos disponemos a investigar cuántos litros cabrán en el cubo Bafi de un metro de arista, utilizando como unidad el de un litro. El alumnado decide cómo hacerlo. Normalmente primero comprueban que caben 10 Bafis en la horizontal y 10 en la vertical. Tendríamos un prisma cuadrado con 100 litros. ¿Y cuántos más puedo poner? Otros nueve prismas, en total 1000 litros.

2.3.2 ¿Cuántos dm^2 hay en un cuadrado de medio metro de arista?

La contestación de la mayoría del alumnado es afirmar que hay 50 dm^2, sin darse cuenta de su error. El origen de esta equivocación se encuentra en que el alumnado deduce que será la mitad de lo que hay en un cubo de un metro de arista. Si bien es cierto que el alumnado domina que en un cuadrado de un metro de arista hay 100 dm^2, en cambio falla al creer que la mitad de la longitud implica la mitad de la superficie total. Este error se puede evitar si con un cubo Bafi de un metro de arista hacemos un cuadrado, e introducimos dentro otro cuadrado de medio metro. El alumnado se dará cuenta al instante que su superficie es menor. Entonces es fácil llegar a la solución: la superficie es la cuarta parte, habrá 25 dm^2. Necesito cuatro cuadrados para cubrir $1m^2$. (100: 4 = 25).

También llegarán, con más facilidad, a que el cuadrado de 25 cm de lado comprende 6,25 dm^2. Necesito 16 cuadrados (4^2) para cubrir $1m^2$. (100: 16 = 6,25).

En el número 92 de la revista *Números,* está explicado cuántos litros caben en un cubo de medio metro de arista. En ambos casos el error del alumnado se debe a que operan con unidades de distintas dimensiones (longitud y capacidad; longitud y superficie).

Figura 6. Bafis de metro, medio metro y cuarto de metro de arista formando cuadrados.

2.3.3 ¿Pentágono regular o irregular?

Cuando pedimos al alumnado que dibuje un pentágono regular, muchos hacen la "casita" (que tiene dos ángulos rectos, dos obtusos y uno agudo). Y aunque les digamos que lo revisen, siguen asegurando que está bien, porque todos los lados son iguales. Se han olvidado de que todos los ángulos también tienen que ser iguales. En cambio, al pedirles que definan lo que es un pentágono regular, lo expresan perfectamente. Se lo saben de corrido, pero no lo han asimilado de forma manual y práctica. Una y otra vez, en los casos prácticos se olvidan de los ángulos.

Los polígonos flexibles, al manipularlos, ayudan a que el alumnado consiga visualizar todos los polígonos (pentágonos, en este caso) y no tan solo los que habitualmente aparecen en los libros de texto. Si además se habitúan a girar la figura que han construido, y la distinguen en cualquier situación, hemos avanzado en la comprensión geométrica.

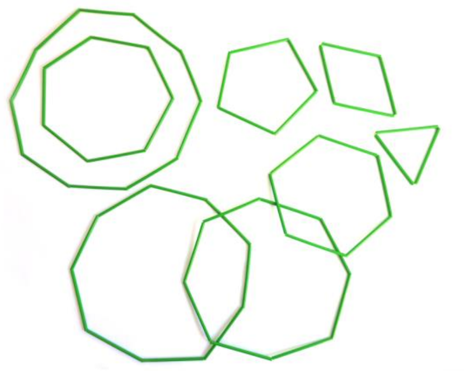

Figura 7. Polígonos flexibles, construidos con tubos y elásticos.

Dibujar un pentágono regular tiene más dificultad que formarlo con una tira rectangular de papel, tal como se muestra a continuación:

Figura 8. Pentágono regular hecho con una tira rectangular.

Realizarlo con tiras rectangulares de distintos tamaños hará que podamos seguir aprendiendo a través de preguntas. ¿El lado del pentágono es mayor, menor o igual que el lado menor de la tira rectangular? ¿Cómo sabría si la tira rectangular me da para hacer el pentágono? ¿En qué tres figuras se descompone este pentágono?

En definitiva, se trata de ampliar la idea de polígono, ya que muchas veces la tenemos restringida a una imagen y no al concepto. Polígono regular, de un determinado número de lados, sólo hay uno. Todos los demás son irregulares.

2.3.4 ¿Polígono cóncavo o convexo?

Aquí no cabe decir que es cóncavo o convexo según lo mire. El polígono es cóncavo o convexo. Ver fotografía de la figura 9. Será necesario recorrer el hexágono haciendo una parada en cada vértice para pensar hacia qué lado se hace el giro. Al hacerlo, se dan cuenta de que siempre el giro es hacia el mismo lado, salvo en el vértice del ángulo cóncavo que cambia el sentido. De esta forma se interioriza lo que es ángulo cóncavo y ángulo convexo. Los polígonos regulares serán siempre convexos y los irregulares pueden ser cóncavos o convexos.

Figura 9. Recorriendo un hexágono cóncavo.

Otra investigación interesante es contar el número de los ángulos cóncavos que como máximo pueden tener los polígonos. De esta manera observamos que los triángulos no pueden ser cóncavos, como mínimo los polígonos deben tener cuatro lados. El número máximo de ángulos cóncavos que pueden tener los polígonos son los siguientes: Los trapecios sólo pueden formar un ángulo cóncavo, los pentágonos dos, hexágonos y heptágonos tres, en octógonos y eneágonos cuatro, decágonos y endecágonos cinco. Y así sucesivamente.

Figura 10. Trapecio cóncavo, concretamente llamado deltoide.

Los polígonos con el máximo número de ángulos cóncavos forman estrellas. Visualmente observamos que las estrellas siempre corresponden a polígonos de lados con números pares, a partir del 6.

En la foto inicial de la blusa, lo que el alumnado llamaba estrella (de seis puntas), en realidad es un dodecágono cóncavo.

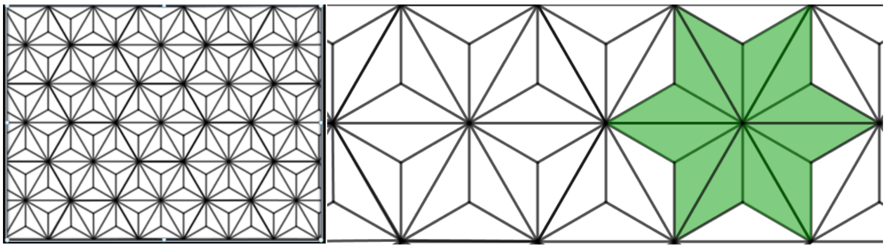

Figura 11. Imagen que se muestra y dodecágono cóncavo.

2.3.5 ¿Jugamos con un triángulo isósceles?

Es fácil reconocer el triángulo isósceles en todas las posiciones, girándolo, porque lo manipulo. De esta manera visualizamos que un cambio de posición no altera la esencia de la figura.

Es casi generalizado encontrar en los libros de texto los triángulos isósceles a modo de "pico" con dos lados iguales de mayor longitud que la base.

La ventaja de estar hecho con elástico es que se puede estirar el lado menor, formando muchos otros triángulos isósceles, que no son del tipo "pico", porque los lados iguales son menores. En un caso lograremos el triángulo equilátero.

En arquitectura se utiliza mucho el triángulo isósceles pero no lo identificamos. Es también la escuadra que usamos en dibujo técnico.

Otra investigación interesante es estirar los otros dos tipos de triángulos (equilátero y escaleno) por los extremos de un lado y ver que triángulos se forman.

2.3.6 ¿Por qué solo hay cinco cuerpos platónicos?

Es habitual memorizar el nombre de los cinco: cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. ¿Qué les hace únicos? Son poliedros regulares convexos. Vamos a visualizarlo con el material flexible Bafi.

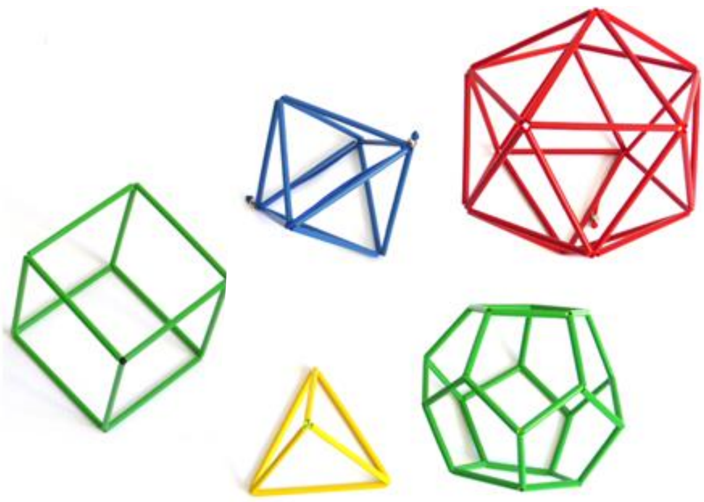

Figura 12. Los cinco cuerpos platónicos.

En cada vértice convergen el mismo número de aristas. O que estirando cualquier vértice se visualizan triángulos con los elásticos que aparecen (en tetraedro, cubo y dodecaedro), cuadrados en el octaedro, y pentágonos en el icosaedro.

Referencias

[1] CANALS, M. A. *Superficies, volúmenes y líneas.* Associació de Mestres Rosa Sensat, Barcelona, 2009.

[2] TEIXIDOR, E. *Pajifiguri: un material manipulativo y un cuento interactivo*, Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74, pp. 75-92. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/74/Experaula_01.pdf

[3] TEIXIDOR, E. *3D, 2D, 1D*, Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 92, pp. 93-103. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/92/Experaula.pdf

Sobre la autora:
Nombre: Mª Esperanza Teixidor Cadenas
Correo Electrónico: cubodidacticobafi@gmail.com
Institución: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.