HERR LEIBNIZ SE EJERCITA EN LAS BARRAS (EL CÁLCULO SEGÚN LEIBNIZ)

Antonio Antolín Fonseca

Departamento de Física y Matemáticas, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Resumen

El Cálculo nació en dos versiones esencialmente distintas: la de Newton y la de Leibniz. La versión leibniziana, basada en la idea de infinitésimo, fue dominante hasta la primera mitad del siglo diecinueve, pero fue desplazada en la segunda por la de linaje newtoniano, basada en la noción de límite, gracias a su formulación rigurosa a manos de Weierstrass. No existen textos modernos que presenten el cálculo a la Leibniz (no se hace referencia aquí al Análisis No-Estándar de Robinson). El presente artículo pretende, mediante un par de ejemplos, mostrar dos cosas: (a) El cálculo de Leibniz es conceptualmente más simple que el basado en la noción de límite y (b) Facilita el arribo inmediato a las aplicaciones del Cálculo, lo que sale al paso de la resistencia que genera, en el que aprende, un conocimiento en apariencia inútil.

Palabras clave: Leibniz, cálculo,

Introducción

Es bien sabido que el Cálculo Infinitesimal, o Diferencial e Integral como también se le llama, fue creado dos veces: por Isaac Newton (1642 – 1727) alrededor de 1666 y, nuevamente, por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) unos diez años después, de manera independiente. Las diferencias entre estas dos versiones del Cálculo son muy numerosas, pero todas provienen en última instancia de los conceptos en que se apoyan Newton por su parte y Leibniz por la suya.

Newton tomó como básico el concepto de razón última de dos magnitudes que cambian en el tiempo y se desvanecen simultáneamente. Sin entrar en detalles, puede decirse que este concepto es el abuelo de la moderna definición de derivada como límite de un cociente de diferencias. Leibniz, por su parte, basó el Cálculo en el concepto de diferencia infinitamente pequeña.

Los cursos usuales de Cálculo combinan ambos enfoques: el concepto básico que utilizan proviene de Newton, la notación y parte de la terminología, de Leibniz. De esta manera es frecuente que la notación y los términos empleados no se adecúen a las ideas que representan.

Me propongo aquí dos cosas:

Presentar las ideas detrás de la notación leibniziana.

Mostrar, a través de ejemplos, la economía de presentación que se logra mediante el enfoque leibniziano.

El Cálculo de Leibniz.

Leibniz concibe el Cálculo de manera simple: las operaciones básicas son la suma y la resta. La técnica para resolver una clase amplia de problemas se reduce a un truco que facilita el cálculo de sumas.

Considere la suma de números impares sucesivos:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 \text{ etc.}$$

Las sumas son iguales a los cuadrados sucesivos. Ello se debe a que la diferencia de dos cuadrados sucesivos es impar:

$$1^2 + 0^2 = 1 \quad 2^2 + 1^2 = 3 \quad 3^2 + 2^2 = 5 \quad \text{etc.}$$

En general,

$$n^2 - (n-1)^2 = 2 \cdot n - 1$$

y por lo tanto

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2 \cdot n - 1)$$
$$= (1^2 - 0^2) + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + [n^2 - (n-1)^2]$$
$$= n^2 - 0^2 = n^2$$

ya que todos los términos intermedios aparecen una vez sumados y otra restados y se cancelan. Ese es el truco de Leibniz: para sumar una serie (los impares, por ejemplo) hay que hallar otra serie (en este caso la de los cuadrados) cuyas diferencias de términos sucesivos coincidan con los términos de la primera serie: de este modo, la suma de la serie original es igual al último término de la otra serie menos su primer término (o sólo al último, cuando el primer término sea cero). En símbolos:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n - a_0$$

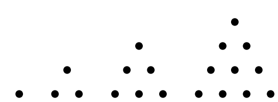
siempre que se tenga

$$a_1 - a_0 = b_1, \quad a_2 - a_1 = b_2,$$
$$a_3 - a_2 = b_3, \quad \ldots \quad a_n - a_{n-1} = b_n$$

si $a_0 = 0$ entonces

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = a_n$$

Como segundo ejemplo tomaré el que Christian Huyghens propuso a Leibniz en París en 1673[1]. Este problema dio pie a que Leibniz concibiera las ideas que aquí se exponen. Se trata de encontrar la suma de los recíprocos de los números triangulares. Dichos números son los siguientes:



etc.

1 3 5 10

[1] En su Historia et Origo (Leibniz, 2005), Leibniz dice que el problema de hallar la suma de los recíprocos de los números triangulares se lo planteó Huyghens en 1672, que lo resolvió y que comunicó la solución a Oldenburg (secretario de la Royal Society) en febrero de 1673. No dice si el problema lo había ya resuelto en 1672. Tomemos como oficial la fecha de la primera comunicación escrita, es decir, 1673.

Resulta claro de la figura por qué se llaman triangulares y también que el *n*-ésimo número triangular t_n es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n$$

Para encontrar la suma, súmese con ella misma como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + \cdots + & n & = & t_n \\ \underline{n} & + & \underline{(n-1)} & + & \underline{(n-2)} & + \cdots + & \underline{1} & = & \underline{t_n} \\ (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \cdots + & (n+1) & = & 2t_n \end{array}$$

De aquí resulta que

$$2 \cdot t_n = n \text{ veces } (n+1) \quad \text{ó} \quad n \cdot (n+1)$$

de donde

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

La suma que Huyghens requirió de Leibniz es:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{t_n}$$

ó

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{2}{n \cdot (n+1)}$$

No es difícil darse cuenta que:

$$\frac{2}{n \cdot (n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

de modo que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{2}{n \cdot (n+1)}$$

$$= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{n+1}$$

De aquí se sigue que si la suma se continúa indefinidamente, el resultado será 2:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = 2$$

El Cálculo Infinitesimal consiste en aplicar estas mismas ideas a series formadas por ordenadas de curvas u otras magnitudes continuas. Basta notar que la continuidad de la serie requiere que las diferencias de términos sucesivos sean infinitamente pequeñas. Dos ejemplos ilustrarán dicha aplicación.

Ley de Hooke. ¿Cuánto se estira una barra sujeta a tensión? Depende, desde luego, de la tensión: a mayor tensión, mayor deformación; depende también de las características de la barra: a mayor área de sección, menor deformación; a mayor longitud, mayor deformación (si un metro se estira un milímetro, dos metros se estiran 2 milímetros). Finalmente depende del material de que esté hecha la barra. Por fortuna, todas estas dependencias son lineales siempre que la tensión no sea demasiado grande. La siguiente fórmula, confirmada experimentalmente, expresa las relaciones necesarias y se llama *Ley de Hooke*:

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{AE} \qquad (1)$$

donde $\Delta\ell$ es la deformación, o incremento de la longitud ℓ, F es la fuerza que estira a la barra, A es el área de la sección transversal y E es una constante de proporcionalidad, propia de cada material y que se llama *módulo de elasticidad* del mismo (Den Hartog, 1961). Así pues, si tenemos dos barras cilíndricas B y B', hechas del mismo material y B tiene longitud y radio dobles que los de B' y está sujeta al doble de tensión, entonces B y B' se estiran lo mismo.

La Ley de Hooke supone que tanto la fuerza de tensión F como el área de la sección A son constantes. La extenderemos a dos casos, en uno de los cuales la fuerza varía, y en el otro, la sección.

Fuerza variable. La figura 1 representa una barra empotrada en el techo, suspendida sin tocar el suelo. La fuerza que actúa sobre cada sección es el peso de la parte de la barra que pende de ella (es decir, la parte sombreada). En símbolos,

$$F_x = \gamma \cdot A \cdot x$$

donde γ es el peso específico del material, A el área de la sección (por lo que $A \cdot x$ es el volumen de la parte sombreada). Para reducir este caso simple de fuerza variable al caso de una fuerza (aproximadamente) constante, dividimos la barra en rebanadas transversales delgadas.

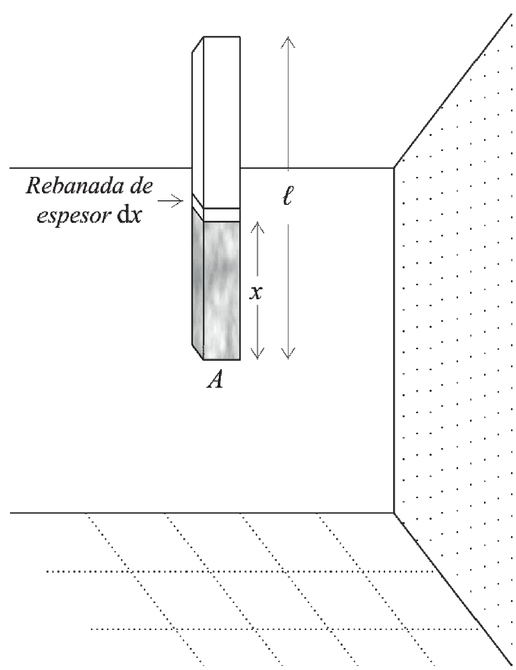


Figura 1. Una barra empotrada en el techo, suspendida sin tocar el suelo.

Dentro de cada rebanada, x varía muy poco, por lo que la fuerza que actúa sobre las secciones de la rebanada es aproximadamente constante y la aproximación será tanto mejor cuanto más delgada sea la rebanada. Calculando por la Ley de Hooke lo que se estira cada rebanada y sumando las deformaciones, obtendremos la deformación total de la barra. Aquí es donde entra la idea de Leibniz: los valores de x correspondientes a los cortes efectuados constituyen una serie; denotaremos por $\mathrm{d}x$ la diferencia de dos valores sucesivos de x. El requerimiento leibniziano de que $\mathrm{d}x$ sea infinitamente pequeño se ajusta perfectamente al requerimiento físico de que cada rebanada sea muy delgada. La deformación de una rebanada de espesor $\mathrm{d}x$ es (por la Ley de Hooke)

$$\frac{F_x \cdot \mathrm{d}x}{A \cdot E} = \frac{\gamma \cdot A \cdot x \cdot \mathrm{d}x}{A \cdot E} = \frac{\gamma}{E} \cdot x \cdot \mathrm{d}x$$

Para sumar todas estas deformaciones necesitamos encontrar una sucesión cuyas diferencias sean los términos $\frac{\gamma}{E} \cdot x \cdot \mathrm{d}x$. La experiencia con los cuadrados sugiere intentar la diferencia

$$(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2$$

El cuadrado de una fracción es menor que la fracción y tanto menor cuanto más pequeña sea la fracción. Por ejemplo,

$$(0.001)^2 = 0.000\,001,$$

$$(0.000\,001)^2 = 0.000\,000\,000\,001$$

El cuadrado de una fracción infinitesimal es infinitamente más pequeño que la fracción misma y, por lo tanto, despreciable comparado con ella. En otras palabras, $(\mathrm{d}x)^2$ es insignificante comparado con $\mathrm{d}x$ y sus múltiplos. Esta observación permite escribir

$$(x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2 \cdot x \cdot \mathrm{d}x$$

y de aquí

$$\frac{1}{2} \cdot (x + \mathrm{d}x)^2 - \frac{1}{2} \cdot x^2 = x \cdot \mathrm{d}x$$

Si ahora empleamos una S mayúscula para denotar suma e índices para señalar el primer y último términos a ser sumados, se tendrá

$$\int_0^{\ell} \frac{\gamma}{E} \cdot x \cdot dx = \int_0^{\ell} x \cdot dx$$

ya que $\frac{\gamma}{E}$ es un factor común a todos los sumandos y, por otra parte,

$$\int_0^{\ell} x \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{\ell} \left[\frac{1}{2}(x + \mathrm{d}x)^2 - \frac{1}{2}x^2\right] = \frac{\ell^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{\ell^2}{2}$$

la suma deseada (la deformación total) será

$$deformación = \int_0^{\ell} \frac{\gamma}{E} \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \frac{\gamma \cdot \ell^2}{2 \cdot E}$$

o también, teniendo en cuenta que el peso W de la barra es $W = \gamma \cdot A \cdot \ell$,

$$deformación = \frac{W \cdot \ell}{2 \cdot A \cdot E}$$

que es la mitad de la deformación correspondiente, según la Ley de Hooke, a una tensión o esfuerzo constante de magnitud W.

Sección variable. Consideramos un caso simple de variación de la sección:

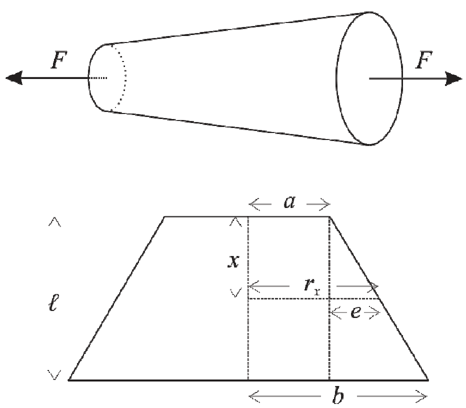


Figura 2. Barra en forma de cono truncado.

La figura 2 muestra un corte longitudinal de una barra en forma de cono truncado; se ve allí que el radio r de la sección transversal producida por un corte hecho a distancia x de la base menor es $r_x = a + e$ y e satisface (por semejanza de triángulos)

$$\frac{e}{b-a} = \frac{x}{\ell} \quad \text{o bien} \quad e = \frac{b-a}{\ell} \cdot x$$

El área de la sección vale entonces

$$A_x = \pi \cdot r_x^2 = \pi \cdot \left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2$$

Como en el caso anterior, sólo podemos aplicar la Ley de Hooke a rebanadas infinitamente delgadas (de espesor $\mathrm{d}x$), que pueden considerarse como de sección constante. La deformación de la rebanada típica es

$$\frac{F \cdot \mathrm{d}x}{A_x \cdot E} = \frac{F \cdot \mathrm{d}x}{\pi \cdot \left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2 \cdot E}$$

La deformación de la barra es igual a la suma de las deformaciones de las rebanadas que la componen:

$$\text{Deformación total} = \int_0^{\ell} \frac{F \cdot \mathrm{d}x}{\pi \cdot \left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2 \cdot E} = \frac{F}{\pi \cdot E} \cdot \int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}x}{\left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2}$$

Igual que en el caso anterior, tenemos que encontrar una serie cuyas diferencias sean los términos

$$\frac{\mathrm{d}x}{\left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2}$$

El ejemplo de la suma de los recíprocos de los números triangulares sugiere que las diferencias de los recíprocos de cantidades lineales son recíprocos de cantidades cuadráticas, de modo que ensayaremos

$$\frac{1}{C + Dx}$$

ajustando C y D de manera conveniente.

La diferencia de dos términos sucesivos es (nótese el orden usual, en que un término se resta del que le sigue y no, como hicimos en el caso de los recíprocos, en que restamos cada término del anterior, así: $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$):

$$\frac{1}{C + D(x + \mathrm{d}x)} - \frac{1}{C + Dx} = \frac{-D \cdot \mathrm{d}x}{[C + D(x + \mathrm{d}x)] \cdot [C + Dx]}$$

El denominador de esta expresión es igual a $(C + Dx)^2 + D(C + Dx)dx$, donde el segundo término es infinitamente más pequeño que el primero, lo que permite (cometiendo un error despreciable) simplificar el denominador

$$(C + Dx)^2$$

Al comparar con el denominador deseado, es decir, con

$$\left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2$$

se ve cuánto deben valer C y D , a saber

$$C = a, \qquad D = \frac{b-a}{\ell} \cdot x$$

Subsiste, sin embargo, una peque˜na dificultad: tenemos un numerador $-D\mathrm{d}x$, en vez del que queremos tener $\mathrm{d}x$. La dificultad no es seria pues basta dividir los términos a restar entre $-D$, ya que al restar podemos sacar factor común. Con esto, la serie buscada tiene términos

$$\frac{\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{\frac{b-a}{\ell} \cdot x}$$

En efecto,

$$\frac{-\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{a + \frac{b-a}{\ell} \cdot (x + \mathrm{d}x)} - \left(\frac{-\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2}$$

Por lo tanto, la integral $\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}x}{\left(a+\frac{b-a}{\ell}\cdot x\right)^2}$ es igual al último término de la serie (el correspondiente a $x = \ell$) menos el primero de la misma (correspondiente a $x = 0$):

$$\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}x}{\left(a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x\right)^2} = \frac{-\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x}\Bigg|_{x=\ell} - \left(\frac{-\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{a + \frac{b-a}{\ell} \cdot x}\right)\Bigg|_{x=0}$$

$$= -\frac{\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{b} + \frac{\ell}{b-a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\ell}{a \cdot b}$$

La deformación total es entonces

$$\frac{F}{\pi \cdot E}\int_0^{\ell}\frac{\mathrm{d}x}{\left(a+\frac{b-a}{\ell}\cdot x\right)^2}=\frac{F\cdot \ell}{\pi \cdot a\cdot b\cdot E}$$

que es la deformación que sufrirá bajo la acción de la fuerza F un cilindro cuyo radio fuese la media geométrica $\sqrt{a\cdot b}$ de los radios del cono truncado.

Los dos ejemplos anteriores muestran que es posible resolver problemas de interés con un mínimo de herramientas, empleando el enfoque leibniziano. Ello permite, en la enseñanza, reducir enormemente la distancia entre las matemáticas y sus aplicaciones e incluso invertir el orden usual de presentación, que es: primero las matemáticas y después (frecuentemente uno o varios semestres después) sus aplicaciones. Con el enfoque leibniziano es posible resolver el problema de motivación (*"¿Para qué me va a servir esto?"*) tomando un problema específico de cualquiera de las disciplinas que emplean el Cálculo Infinitesimal, como punto de partida y no de llegada.

Agradezco a la M. en C. Susana C. Martínez Sánchez (DME-CINVESTAV) el haber transcrito mi manuscrito en LaTeX, incluso mejorando mis figuras, realizando un trabajo minucioso y muy profesional.

REFERENCIAS

Den Hartog, JP. 1961. *Strength of Materials.* Dover Publications, Inc. New York, (Reimpresión de la obra publicada originalmente por McGraw-Hill Book Company, Inc., en 1949). 2 – 6.

Leibniz GW. 2005. *Historia et Origo Calculi Differentialis.*Una traducción al inglés puede verse en Leibniz, G.W., The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz, Translated and with an Introduction by J. M. Child. Dover Publications, Inc., New York,. (Reimpresión de la obra originalmente publicada por Open Court Publishing Company, Chicago, en 1920). 30 y 50.