

---

---

## EL CONJUNTO DE MANDELBROT: INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA HOLOMORFA

German Almanza Rodríguez

Departamento de Física y Matemáticas, Instituto de Ingeniería y Tecnología, Universidad  
Autónoma de Ciudad Juárez

### Resumen

Presentamos una introducción a la teoría de dinámica holomorfa, utilizando un lenguaje básico sin dejar de ser formal al enunciar las definiciones y los teoremas más relevantes en el estudio de dinámica holomorfa. El propósito principal es enunciar la conjetura MLC (Mandelbrot Localmente Conexo) en el lenguaje más simple. Así como dar la descripción del Conjunto de Mandelbrot como un espacio de parámetros de polinomios cuadráticos.

**Palabras clave:** conjunto de Mandelbrot, dinámica holomorfa, conjetura de MLC.

### Introducción.

"El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque lo disfruta, y lo disfruta porque es bella. Si la naturaleza no fuera bella, no tendría interés en entenderla y si la naturaleza no fuera entendible, no tendría interés por vivir la vida".

- Jules Henri Poincaré.



**Figura 1.** Jules Henri Poincaré es considerado como el creador de las teorías de sistemas dinámicos y topología.

Podemos observar que a lo largo de la historia, algunas culturas se preocuparon por entender los *fenómenos astronómicos*. Las investigaciones de J. Kepler, I. Newton, J. S. Laplace (entre muchos otros científicos del siglo XVII), tenían *la filosofía* de un universo que funciona como un "engranaje gigantesco", donde todo estaba regido por leyes matemáticas que obedecían a *ecuaciones diferenciales*, y desfasaron los "círculos de Platón" por elipses; es así como entendemos el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Hasta ahora podemos entender el movimiento de dos cuerpos, como en el caso del movimiento de la Tierra alrededor del Sol; sin embargo, no se puede decir mucho al respecto cuando interviene un tercer cuerpo, por ejemplo la gravedad de Júpiter interactuando con el Sol y la Tierra. Pero recordemos que en matemáticas resulta más interesante plantear buenas preguntas, que resolver

pequeños problemas. En 1887, el rey Oscar II de Suecia, ofreció un premio a quien respondiera (en términos científicos) sobre la estabilidad del Sistema Solar (asumiendo las Leyes de Newton), el francés J. H. Poincaré tratando de resolver este problema, introdujo un cambio radical en la *Teoría de mecánica celeste clásica*. En lugar de buscar soluciones analíticas *explicitas* a las ecuaciones diferenciales, propuso estudiar el comportamiento *cualitativo* de estas soluciones. Los resultados que obtuvo fueron muy sorprendentes, ya que Poincaré no imaginó que tales soluciones fueran matemáticamente consistentes. Este pasaje en la vida de Poincaré es conocido como "el error fructífero de Poincaré" (Barrow-Green, 1997).

### Proceso de Iteración.

La teoría de *ecuaciones diferenciales* es utilizada por algunos científicos para resolver problemas relacionados con: el movimiento de una partícula (en estado ideal), crecimiento de población, aceleración, entre muchos otros. La "idea general" de las ecuaciones diferenciales consiste en escoger una "partícula"  $x$  que pertenece a un "espacio"  $X$  y ver como evoluciona con respecto al tiempo  $t$  bajo la *función*  $f$  (de una forma mas precisa podemos decir que  $x$  es un *punto* que pertenece a la *variedad*  $X$ ,  $t$  es un *parámetro* continuo, por ejemplo  $t \in \mathbb{R}$  y  $f: X \rightarrow X$  es una función diferenciable).

La propuesta de Poincaré fue estudiar el compartimiento *discreto* del punto  $x \in X$ , bajo la función  $f: X \rightarrow X$ , i.e., considerar el conjunto  $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , donde

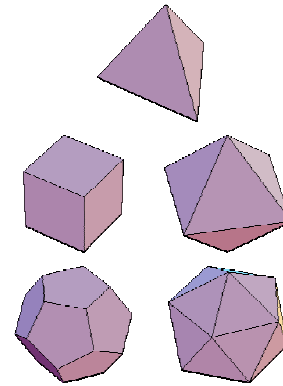


Figura 2. Sólidos Platónicos.

$$f^n(x) = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{n \text{ veces}}(x)$$

De esta manera, obtenemos el *espacio de faces* del punto  $x$ . La característica principal de este proceso, y fue lo que realmente "sorprendió" a Poincaré cuando lo aplico al problema de la estabilidad del sistema Solar (que ahora conocemos como el *problema de los tres cuerpos*), es que puntos *arbitrariamente cerca* suelen tener comportamientos (orbitas) muy distintos. Había puntos que presentaban *orbitas periódicas* bien definidas, en otros, la orbita para un  $n$  *suficientemente grande* se acercaba arbitrariamente a la posición original y en otros casos, las orbitas presentaban un comportamiento *inestable*. Esto es lo que Poincaré consideraba incorrecto, desde un punto de vista matemático. En palabras de Poincaré es lo siguiente:

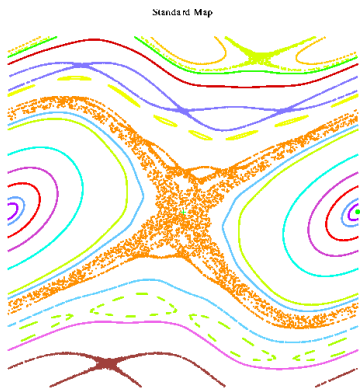
"Uno se puede sorprender por la complejidad de esta figura que yo no me atrevo a dibujar. Nada puede darnos una mejor idea de lo complicado que es el problema de los tres cuerpos y de todos los problemas de la dinámica en general"

(Barrow-Green, 1997).

Finalmente, H. Poincaré nos libero de un universo de formas regulares, relacionando algunos

fenómenos naturales con objetos matemáticos que intencionalmente fueron contruidos con propiedades muy extrañas; pero fue necesario esperar más de 50 años a que la tecnología hiciera visible este nuevo *universo matemático* en las pantallas de las computadoras.

El *lector curioso* puede experimentar creando un programa que



**Figura 3.** Si Poincaré hubiera tenido acceso al programa de *d stool*, habría obtenido imágenes como esta. La imagen corresponde al retrato de fase de la ecuación  $x_1 = x + y_1$ ,  $y_1 = b \cdot y - k \cdot (2\pi \sin(2\pi x))^{-1}$  con parámetros  $b = 1$ ,  $k = 0.82, \dots, 0.84$ .

calcule los valores de la iteración:

$$x_0 = x^2 + c \text{ con } x, c \in \mathbb{R}$$

para,  $c$  fijo

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0^2 + c, \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1}^2 + c \end{aligned} \quad (1)$$

No hay que sorprendernos si por ejemplo se escoge  $c = -2$  y  $-2 < x < -1.5$ , aparecen órbitas periódicas de distintos periodos. En cambio, para  $x < -2$  todas las órbitas "convergen" a  $\infty$ , mientras que para  $c = -2$ , el intervalo  $[-2, 2]$  permanece invariante y en su complemento  $\mathbb{R} \setminus [-2, 2]$  todos los puntos convergen a  $\infty$ .

### Familia Cuadrática Compleja

En el último cuarto del siglo XX causo mucho interés entre los matemáticos y físicos de la época la dinámica de la *familia cuadrática real* (ec. 1). Por lo tanto, resultado natural estudiar el comportamiento de la *familia cuadrática compleja*, i.e., considerar la familia (ec. 1) con  $x, c \in \mathbb{C}$ . Como era de esperarse, la dinámica que se encontró en la familia cuadrática compleja fue por demás interesante, ya que se pudo demostrar que la regularidad e inestabilidad de esta familia respondía a características geométricas y topológicas *intrínsecas* de cada parámetro. En otras palabras, denotamos

$$P_c(z) = z^2 + c \text{ para } z, c \in \mathbb{C} \text{ con } c \text{ fijo}$$

$$P_c^2 = P_c \circ P_c(z) = (z^2 + c)^2 + c,$$

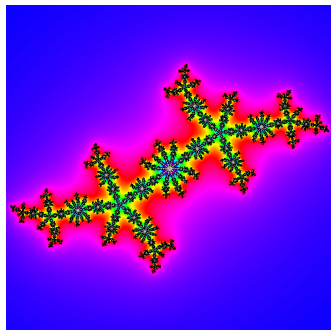
$$P_c^n = \underbrace{P_c \circ \dots \circ P_c}_{n \text{ veces}}(z) \quad (2)$$

Ahora consideraremos el *plano complejo extendido*; esto es, el espacio definido como  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , donde el  $\{\infty\}$  denota otro punto mas en  $\hat{\mathbb{C}}$ . Vía la *proyección estereográfica* podemos identificar a  $\hat{\mathbb{C}}$  con la *esfera unitaria*.

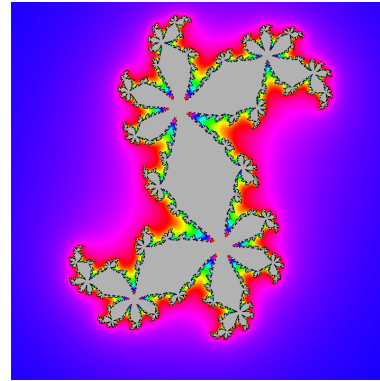
$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

por esta razón  $\hat{\mathbb{C}}$  también se conoce como la *esfera de Riemann*. Estudiaremos la órbita  $\alpha$  del punto  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  bajo la iteración del polinomio  $P_c$ . Esencialmente vamos a separar a  $\hat{\mathbb{C}}$  en dos conjuntos: el *conjunto de Fatou*  $\mathcal{F}_c$ , que es el conjunto abierto maximal, tal que la órbita de todos sus puntos es estable, i.e., existe un número finito de puntos  $x_1, \dots, x_k \in \hat{\mathbb{C}}$  tales que la órbita  $\alpha$  de cada punto  $x \in \mathcal{F}_c$  eventualmente converge a  $x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), el punto puede ser  $\infty$ ; y su complemento el *conjunto de Julia*  $\mathcal{J}_c$ , que consiste de aquellos puntos que tienen órbita inestable (*caótica*).

Respecto a la *topología* del conjunto de Julia podemos decir que  $\mathcal{J}_c$  es *conexo* (consiste de una sola pieza) si existe  $N \in \mathbb{R}$  un tal que  $P_c^n(0) < N$  para  $n \rightarrow \infty$ , en caso contrario, i.e., cuando el  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) = \infty$  decimos que  $\mathcal{J}_c$  es *totalmente desconexo* (homeomorfo a un conjunto de Cantor), ver las figuras 4 y 5.

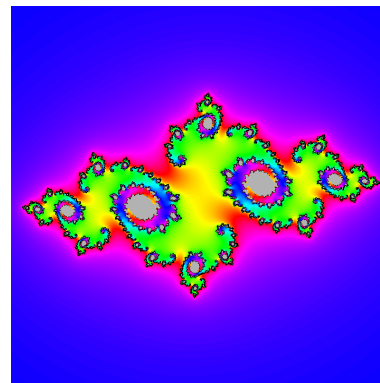


a)  $\mathcal{J}_c$  con  $c = -0.5622 - 0.6427i$

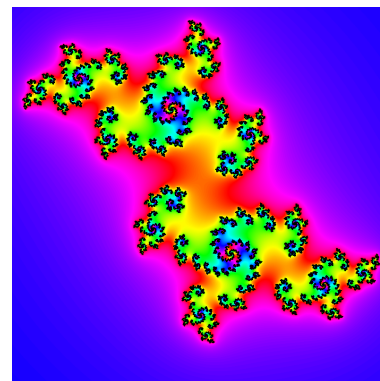


(b)  $\mathcal{J}_c$  con  $c = 0.3828 - 0.3352i$

**Figura 4.** Conjuntos de Julia conexos



a)  $\mathcal{J}_c$  con  $c = 0.7574 - 0.2i$



b)  $\mathcal{J}_c$  con  $c = 0.7i$

**Figura 5.** Conjuntos de Julia desconexos

## B. Mandelbrot y el Conjunto de Mandelbrot.

Así como en muchas otras ciencias, la culminación del trabajo de muchos, se le atribuye a una sola persona. Hace unos 20 años, muchos escritores de divulgación (que no necesariamente hacen un trabajo científico) atribuyen a B. Mandelbrot la introducción de la *Teoría Fractal*, incluso uno de los fractales más estudiados y de gran importancia en la *Teoría de Dinámica Holomorfa* lleva su nombre (figura 7). Sin embargo, A. Douady y J. H. Hubbard fueron los primeros en estudiar la *dinámica de polinomios de grado dos*, incluso ellos contaban con un *software* con el que hicieron las primeras imágenes (de muy poca calidad) de los primeros *conjuntos de Julia*. Fue a finales de 1977 en la universidad de Cornell, N.Y., en donde J. H. Hubbard ofreció una conferencia y hablo sobre los avances obtenidos junto con Douady respecto al estudio de *dinámica de polinomios cuadráticos*. En esa conferencia B. Mandelbrot invito a Hubbard a dar una charla en Yorktown Heights, para que se presentara a inicios de 1978, menciono que el también había pensado en los *conjuntos de Julia* y que aun no había obtenido una imagen de estos (Lei, 2000). Poco después, en el año 1979 Mandelbrot hizo públicas sus imágenes (de mucho mejor calidad que las de Douady y Hubbard) de conjuntos de Julia que desarrollo en los laboratorios de IBM. La complicada geometría y maravillosos colores que presentaron las imágenes de Mandelbrot, motivaron a una nueva corriente científica y filosófica que podría considerarse similar a la que hubo en tiempos platónicos. Lo que hay que reconocer de Mandelbrot es que convenció a mucha gente quienes

afirman que "la naturaleza es regida por la geometría fractal"

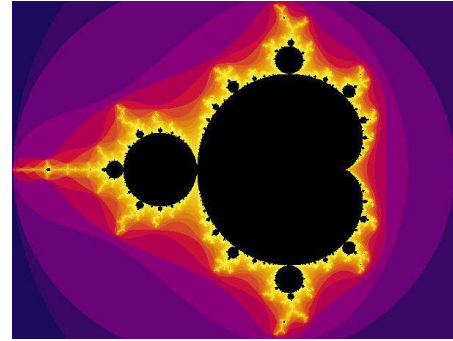
Para entender que es el conjunto de Mandelbrot, primero vamos a distinguir una propiedad de los *puntos periódicos* de una función. Consideramos una *funcion holomorfa*  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (no constante y distinta de la identidad), decimos que  $z_0$  es un punto periódico de periodo  $n$  si  $f^n(z_0) = z_0$  y  $f^m(z_0) \neq z_0$  para todo  $1 \leq m < n$ , en caso de que  $n = 1$  llamamos a  $(z_0)$  punto fijo. Diremos que un punto periódico  $z_0$  es *atractor*, *repulsor*, *indiferente* o *super atractor* si  $|f'(z_0)| < 1$ ,  $|f'(z_0)| > 1$ ,  $|f'(z_0)| = 1$  y  $|f'(z_0)| = 0$  respectivamente. Recordemos que  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = 1$  tiene la forma  $\exp(i\pi\theta)$ , por lo tanto vamos a llamar punto *parabólico* a  $z_0$  si  $\theta$  es racional, en caso contrario diremos que es un punto *indiferente irracional*.

Por otra parte, una *transformación de Möbius* es una función holomorfa del tipo  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  que satisfacen  $ad - bc \neq 0$ . Una característica importante de las transformaciones de Möbius es que son *bi-holomorfismos* de  $\mathbb{C}$ ; esto es, son funciones *biyectivas* de  $\mathbb{C}$  y *conformes* (preservan ángulos); pero lo que es más importante para nuestros fines es que dado cualquier polinomio cuadrático  $p(z) = Az^2 + Bz + C$  con  $A, B, C \in \mathbb{C}$ , existe una única transformación de Möbius tal que  $\varphi \circ p \circ \varphi^{-1}(z) = z^2 + c = P_c(z)$ , para un único  $c \in \mathbb{C}$ . Cuando esto ocurre, decimos que el polinomio  $p(z)$  es *isomorfo* a  $P_c(z)$ , esto significa que los puntos periódicos de ambos polinomios tienen el mismo orden y son del mismo tipo (atractor, repulsor, indiferente o súper atractor).



**Figura 6.** A. Douady con un Chinelo en el Instituto de Matemáticas de la UNAM – Cuernavaca enero 2003.

El único punto crítico de la familia  $P_c(z)$  es  $z = 0$  recordemos que la “topología”  $J_c$  está determinada por la órbita de 0. En estos términos definimos al *Conjunto de Mandelbrot* como  $\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ es conexo}\}$ , ver figura 7. Denotamos  $\text{Pol}_2$  al conjunto de todos los polinomios de grado 2 y  $\text{Möb}(\mathbb{C})$  al grupo de transformaciones de Möbius. Por lo tanto, podemos considerar al espacio formado por las *clases de equivalencia* de polinomios cuadráticos (bajo conjugación de transformaciones de Möbius); mas precisamente denotamos  $\mathcal{P}_2 = \text{Pol}_2 / \text{Möb}(\mathbb{C})$ , este cociente es llamado *espacio de Moduli*, no es difícil mostrar que  $\mathcal{P}_2$  coincide con  $\mathbb{C}$  y por lo tanto, podemos ver al conjunto de Mandelbrot como un “mapa” que representa la dinámica de todos los polinomios cuadráticos.



**Figura 7.** Conjunto de Mandelbrot.



**Figura 8.** D. Sullivan en el Instituto de Matemáticas UNAM – Cuernavaca 2006.

### Definiciones Elementales

**Punto Atractor vs. Punto Super Atractor.** La diferencia entre un punto atractor y uno super atractor es sutil, la dinámica global es similar en ambos casos, la diferencia reside en la dinámica Local. En el caso atractor, podemos linealizar la función  $f$  en una vecindad del punto atractor y localmente tiene la forma,  $g(z) = \lambda z$  esto nos permite dar una interpretación *geométrica* de la dinámica de la función  $f$ ; mientras que en el caso super atractor lo que se tiene es un comportamiento del tipo  $g(z) = z^n$  donde  $n$  denota el grado de la función  $f$ , la geometría que corresponde a este caso es muy distinta que en el caso atractor. Detalles sobre linealización se pueden encontrar en Beardon, (1991); Carleson y Gamelin (1993) y Milnor (2005).

**Conjugación.** Llamamos Sistema Dinámico a la pareja  $(X, f)$  donde  $X$  es una variedad y  $f: X \rightarrow X$  una función al menos diferenciable, es decir, de tipo  $f \in C^\infty$ . Esta definición se puede generalizar de manera natural a considerar en lugar de  $f$  un grupo o semi grupo. Si  $X = \mathbb{C}$  y  $f$  es una función holomorfa llamamos a  $(\mathbb{C}, f)$  sistema dinámico holomorfo. Dos sistemas dinámicos  $(\mathbb{C}, f_1)$  y  $(\mathbb{C}, f_2)$  son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $\varphi$  tal que  $\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}(z) = f_2(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Análogamente diremos que son *conforme* o *quasiconformemente equivalentes* si  $\varphi$  es un bi-holomorfismo o un homeomorfismo quasiconforme.

"Intuitivamente" podemos distinguir las equivalencias definidas anteriormente de la siguiente manera. Recordemos que es *topologicamente equivalente* a  $\mathbb{S}^2$ ; es decir, podemos pensar a  $\mathbb{C}$  como la 2-esfera pero con *estructura analítica*, esto es la estructura inducida por  $\mathbb{C}$ . Si consideramos un *homeomorfismo*  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , se tiene que  $\varphi$  no distingue la estructura analítica de  $\mathbb{C}$ , por lo tanto si  $f$  es una función holomorfa,  $\varphi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}(z)$  no es necesariamente una función holomorfa. Esto hace que la conjugación dada por un homeomorfismo sea *débil* en cierto sentido. Por otra parte, cuando  $\varphi$  es un biholomorfismo entonces la conjugación es *rígida*, esto significa que tanto la dinámica de  $f$  como la estructura analítica de  $\mathbb{C}$  son *esencialmente la misma* bajo la conjugación. Finalmente, la conjugación que es mas útil para nuestros fines es cuando  $\varphi$  es un homeomorfismo quasiconforme ya que preserva la

dinámica y la estructura analítica "no cambia mucho".

La teoría de dinámica holomorfa tuvo avances significativos a partir de que Dennis Sullivan a finales de la década de 1970 utilizó homeomorfismos quasiconformes para resolver una conjetura planteada por Gaston Julia en 1920.

**Estabilidad.** En la teoría de *Sistemas Dinámicos* el concepto de *estabilidad* es el objeto central de estudio. Decimos que un sistema dinámico es estable si la dinámica no cambia bajo pequeñas perturbaciones de  $f$ . Para ilustrar este concepto consideremos el conjunto de polinomios cuadráticos  $\text{Pol}_2$  y dotamos a este conjunto con la topología inducida por los coeficientes de los polinomios. Sea  $W \subset \text{Pol}_2$  un abierto, decimos que  $P \in W$  es *J-estable* en  $W$  si existe una vecindad  $U$  de  $P$  tal que para todo  $P_\alpha \in U$  existe un homeomorfismo quasiconforme  $\varphi_\alpha: U(J_P) \rightarrow U(J_{P_\alpha})$  tal que  $\varphi_\alpha \circ P \circ \varphi_\alpha^{-1}(z) = P_\alpha(z)$  para todo  $z \in U(J_P)$  y  $\varphi_\alpha$  depende de  $P_\alpha$ , donde  $U(J_P)$  y  $U(J_{P_\alpha})$  son vecindades de los conjuntos  $J_P$  y  $J_{P_\alpha}$  respectivamente. Más aun llamamos a  $P$  *estructuralmente estable* si  $P_\alpha$  se extiende a  $\mathbb{C}$ . En estos términos podemos decir que un polinomio cuadrático es estable si todos los polinomios cuadráticos que se encuentran "cerca" de él tienen la misma dinámica.

A principios de 1980 Mane, Sad y Sullivan (1983) y de manera independiente Lyubich (1990) demostraron el siguiente resultado. Sea  $\text{Rat}_d$  el conjunto de funciones racionales de grado  $d$ , con coeficientes complejos y  $W \subset \text{Rat}_d$  una variedad arbitraria.

**Teorema 1.** El conjunto de parámetros  $\mathcal{J}$ -estables es un subconjunto abierto y denso en  $\mathcal{W}$ .

El resultado anterior es muy general, en términos del conjunto de Mandelbrot lo podemos enunciar de la manera siguiente.

**Teorema (1').** El conjunto de parámetros  $c \in \mathcal{M}$  tales que  $P_c$  es  $\mathcal{J}$ -estable, forma un subconjunto abierto y denso en  $\mathcal{M}$ .

**Conjunto Poscritico.** Estudiar la orbita de un punto crítico resulta muy interesante ya que esta nos da mucha información importante sobre la dinámica de la función; por lo tanto, distinguiremos los siguientes conceptos.

Sea  $f$  una función holomorfa, denotamos al conjunto de sus puntos críticos por  $Cr(f) := \{c \in \mathbb{C} : f'(c) = 0\}$ , llamamos *conjunto poscritico* al conjunto

$$Pos(f) := \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{c \in Cr(f)} f^n(c) \right\}$$

Si  $Pos(f)$  es finito diremos que  $f$  es *poscriticamente finita*. Dos funciones  $f_1$  y  $f_2$  que son conjugadas (en cualquier sentido) tienen el mismo numero de puntos críticos y además la cardinalidad de los conjuntos  $Pos(f_1)$  y  $Pos(f_2)$  es la misma.

**Hiperbolicidad.** Si la órbita de un punto crítico converge a un ciclo atractor (o súper atractor) diremos que  $f$  es una *aplicación hiperbólica*. Hay una equivalencia sobre las condiciones de cuando una función es hiperbólica (McMullen, 1994) para nuestros fines nos basta la definición anterior y la

siguiente equivalencia, si  $Pos(f) \cap \mathcal{J}(f) = \emptyset$  entonces  $f$  es hiperbólica.

Es claro que  $P_c$  es hiperbólico para todo  $c \in \mathcal{M}$  ya que la orbita del punta crítico converge al punta fijo super atractor  $\{\infty\}$ . Sea  $f \in Rat_d$  una funcion hiperbolica, llamaremos *componente hiperbólica* de  $f$  al conjunto

$$U^h(f) := \{f_\alpha : f_\alpha \text{ es hiperbolico y } \mathcal{J}\text{-equivalente a } f\}$$

Vamos a denotar al espacio de transformaciones racionales conformemente equivalentes, como  $Rat_d/Möb(\mathbb{C})$ .

**Teorema 2.** Sea  $U^h \subset Rat_d/Möb(\mathbb{C})$  una componente hiperbólica, supongamos que  $\mathcal{J}_\alpha$  es conexo para  $f_\alpha \in U^h$ , entonces existe una unica transformaci3n poscriticamente finita  $f_0 \in U^h$ .

El anterior resultado parece muy "inofensivo" pero es de gran utilidad, ya que trabajar con transformaciones poscriticamente finitas es más sencillo y por lo tanto, basta conocer la dinamica de  $f_0 \in U^h$  para conocer el comportamiento de todos los elementos de  $U^h$ . El anterior teorema lo podemos enunciar en terminos del conjunto de Mandelbrot de la siguiente manera.

**Teorema (2').** Cualquier componente hiperbólica  $U^h \subset \mathcal{M}$  contiene un único elemento poscriticamente finito  $P_{c_n} \in U^h$ . El elemento  $f_0 \in U^h$  poscriticamente finito centro de la componente hiperbólica  $U^h$ . Hemos definido los elementos necesarios para enunciar una de las conjeturas principales en la teoria de dinamica holomorfa.

**Conjetura (Densidad de Hiperbolicidad).** El conjunto de funciones racionales



hiperbólicas es abierto y denso en el espacio  $\text{Rat}_d$ .

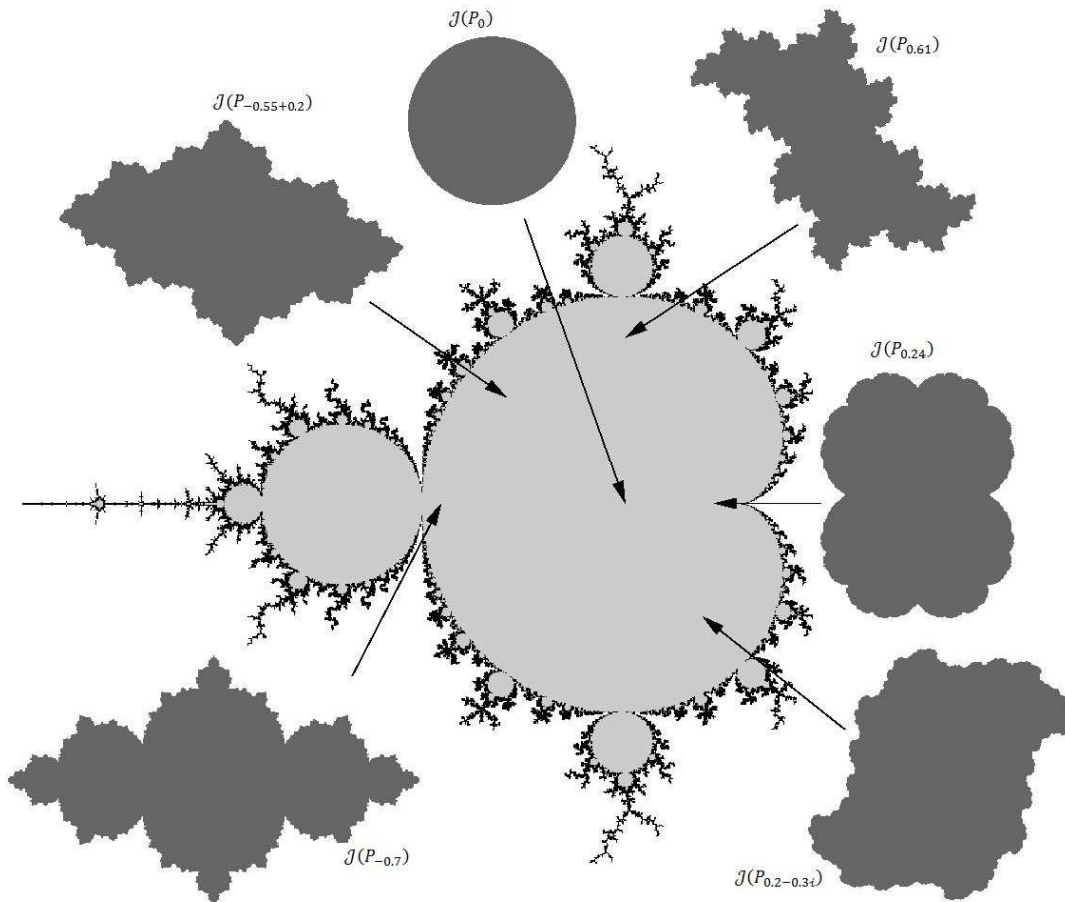
La versión para polinomios cuadráticos de la conjetura anterior es la siguiente.

**Conjetura 1.** El conjunto de parámetros  $c \in \mathbb{C}$  tales que  $P_c(z)$  es hiperbólico es un conjunto abierto y denso en el plano.

Para dejar en claro las definiciones anteriores así como los dos teoremas, vamos a estudiar algunas componentes del conjunto de Mandelbrot.

## Componentes del Conjunto de Mandelbrot

Hemos dicho que el conjunto de Mandelbrot es como un "mapa". En este sentido trataremos de escudriñar que información oculta, con el interés de enunciar una de las conjeturas centrales en la teoría de dinámica holomorfa y acentuar porque matemáticos especialistas en distintas áreas han puesto gran interés en este objeto, mas aun en la teoría de dinámica holomorfa.



**Figura 9.** Componente principal del Conjunto de Mandelbrot.

**Componente principal.**

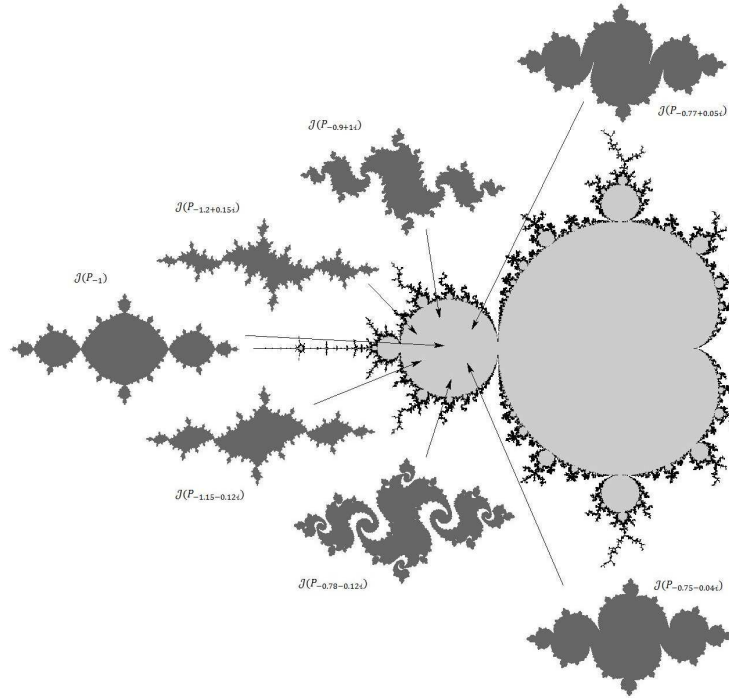
Denotamos  $P_\epsilon(z) = z^2 + \epsilon$  con  $|\epsilon| < \frac{1}{4}$ . Sabemos que un polinomio de segundo grado tiene a lo mas dos puntos fijos en  $\mathbb{C}$  y cuando consideramos  $\widehat{\mathbb{C}}$  entonces  $\{\infty\}$  siempre es un punto fijo; en general para cualquier polinomio este es un punto fijo super atractor. Un calculo sencillo nos muestra que el polinomio  $P_\epsilon(z)$  con  $0 < |\epsilon| < \frac{1}{4}$  tiene un punta fijo atractor  $x_\alpha$  y otro repulsor  $x_\tau$ . Algo que no es difícil mostrar es que  $x_\alpha \in \mathcal{F}(P_\epsilon)$  y  $x_\tau \in \mathcal{J}(P_\epsilon)$ ; mas aun, en general se puede probar que el conjunto  $\mathcal{J}(f)$  es la *cerradura* de los puntos repulsores de  $f$ . Podemos observar que la órbita del punto crítico de  $P_\epsilon(z)$  converge a  $x_\alpha$ ; en otras palabras, se tiene que  $P_\epsilon^n(0) \rightarrow x_\alpha$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo tanto el polinomio  $P_\epsilon(z)$  es hiperbólico para todo  $\epsilon$  que satisface la condición inicial. Utilizando *teoría de variable compleja básica* podemos demostrar que  $\mathcal{J}(P_\epsilon)$  es un *circulo topológico*; mas precisamente, diremos que  $\mathcal{J}(P_\epsilon)$  es un *quasi circulo* (Ahlfors, 2006; Lehto y Virtanen 1973) para todo  $0 < |\epsilon| < \frac{1}{4}$ . Por otra parte, cuando  $\epsilon = 1$  tenemos que  $P_0(z)$  tiene a  $1$  como punto fijo repulsor y  $0$  como punto fijo super atractor; por lo tanto  $P_0(z)$ , es hiperbólico y poscriticamente finito. Podemos observar que  $P_\epsilon^n(z) \rightarrow 0$  para todo  $z \in \mathbb{D}$  y  $P_\epsilon^n(z) \rightarrow \infty$  para todo  $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y por lo tanto

$\mathcal{J}(P_0)$  es el círculo unitario  $\partial\mathbb{D}$ , ver figura 9.

Denotamos  $U_0 \subset \mathcal{M}$  a la componente hiperbólica que tiene centro a  $P_0(z)$ , observemos que  $P_\epsilon(z)$  es estructuralmente estable en  $U_0 \setminus \{0\}$  y  $P_0(z)$  solo es  $\mathcal{J}$ -estable en  $U_0$ . Vamos a denotar  $\partial U_0$  a la frontera de la componente  $U_0$ ; este conjunto consiste de los puntos  $\alpha$  tales que se encuentran cerca de  $U_0$  y que la dinámica del polinomio  $P_\alpha(z)$  es distinta a la de los polinomios que tienen parámetro en  $U_0$  y por lo tanto  $P_\alpha(z)$  no es hiperbólico. Por ejemplo,  $\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{4} \in \partial U_0$  ya que los polinomios  $P_{\frac{1}{4}}(z)$  y  $P_{-\frac{\epsilon}{4}}(z)$  tienen un punto parabólico.

Una componente  $U \subset \mathcal{M}$  es hiperbólica si  $P_c(z)$  es hiperbólica o para algún  $c \in U$ . Los componentes hiperbólicos satisfacen una propiedad de estabilidad; sin embargo, identificar a los puntos  $\alpha \in \partial U$  para cualquier componente  $U \subset \mathcal{M}$  es un problema *muy complicado* de hecho está relacionado con la conjetura 1, que podemos reformular de la siguiente manera.

**Conjetura 2.** Cada componente  $U \subset \mathcal{M}$  es hiperbólica.

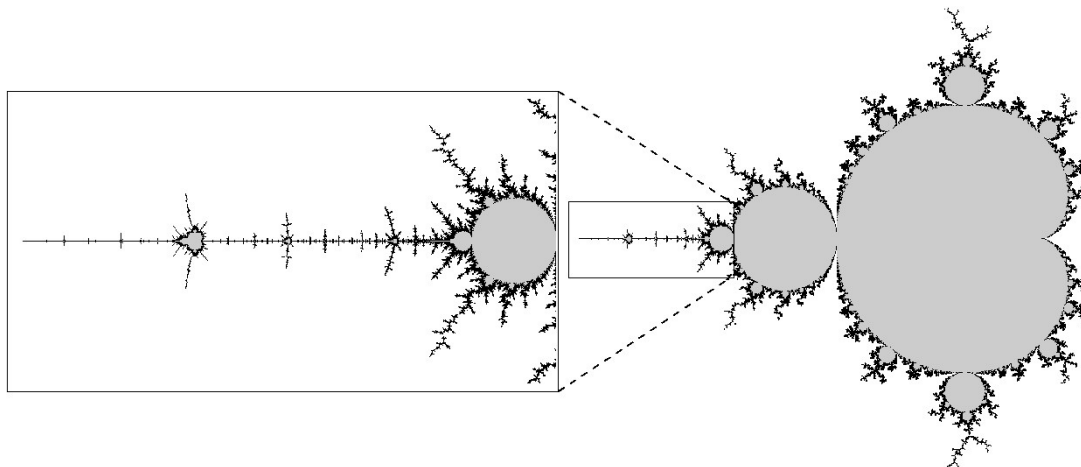


**Figura 10.** Componente  $U_{-1}$  del Conjunto de Mandelbrot.

**Componente de Periodo 2.**

Denotaremos  $U_{-1} \subset \mathcal{M}$  a la componente que contiene al disco centrado en  $-1$  y de radio  $\frac{3}{4}$ . Un sencillo calculo muestra que el polinomio  $P_{-1}(z)$

tiene un ciclo de periodo 2 super atractor definido por  $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$ . Por lo tanto  $-1$  es el centro de la componente hiperbólica  $U_{-1}$  y el polinomio es hiperbólico y tiene un punta atractor de periodo 2 para todo  $c \in U_{-1} \setminus \{-1\}$ . Ver figura 10.



**Figura 11.** Acercamiento al conjunto de Mandelbrot en el intervalo  $(-2, -1.25)$ .

### Componentes de Periodo 3 y 5.

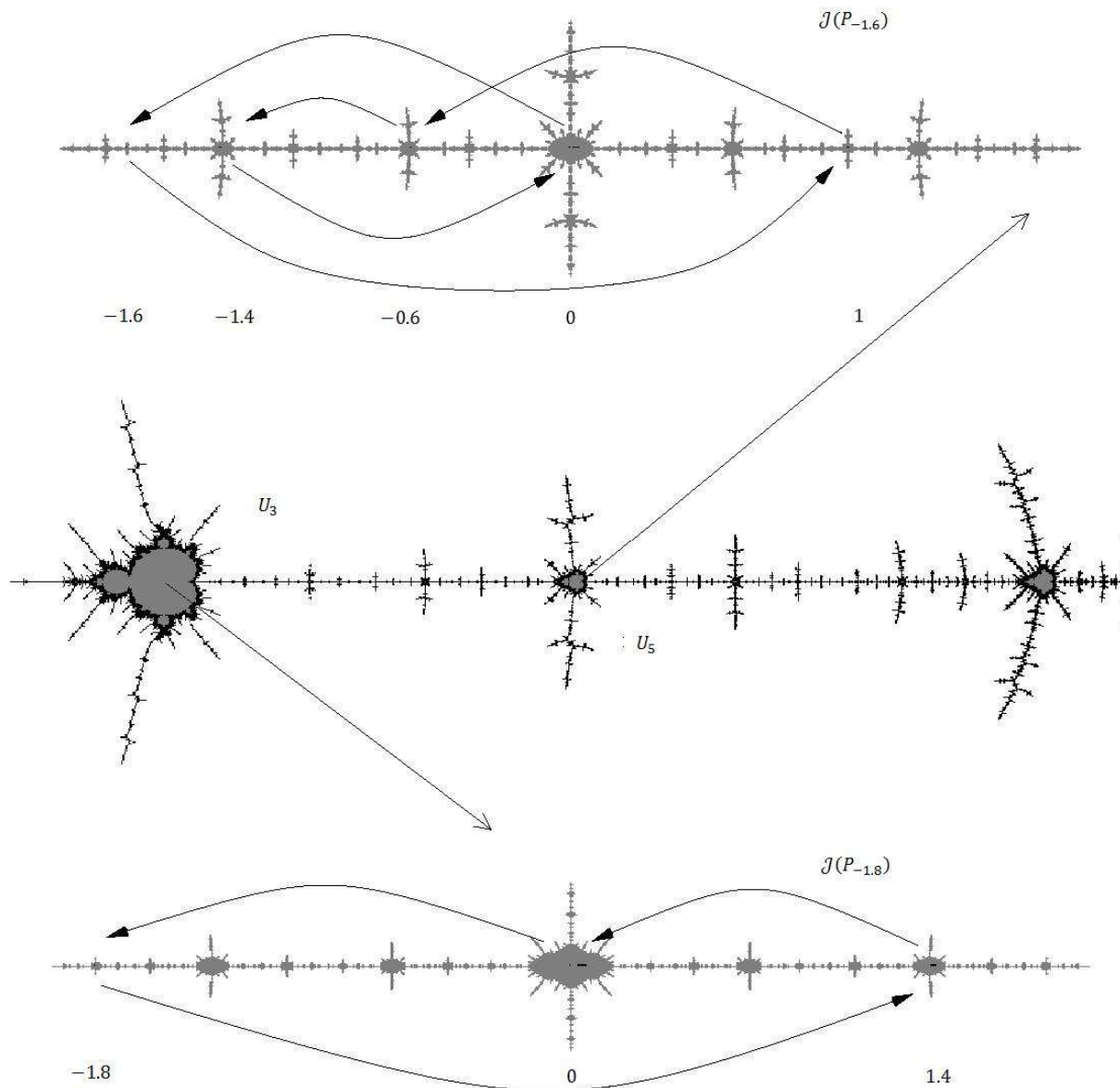
Vamos a hacer un acercamiento al conjunto de Mandelbrot alrededor del intervalo  $(-2, -1.25)$ , como se muestra en la figura 11. Observemos que aparecen tres copias del conjunto de Mandelbrot, centraremos nuestra atención en las copias que denotaremos  $U_3$  y  $U_5$  que corresponden a las componentes hiperbólicas de periodos 3 y 5 respectivamente (ver figura 12). El parámetro  $-1.765 \in U_3$ ; por lo tanto, después de un cálculo numérico podemos observar que la órbita  $P_{-1.765}^n(0)$  converge al ciclo atractor  $0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , donde  $x_1 \approx -1.8$ ,  $x_2 \approx 1.4$ . Por otra parte,  $-1.628 \in U_5$ . Después de un cálculo

podemos comprobar que la órbita  $P_{-1.628}^n(0)$  converge al ciclo atractor  $0 \mapsto x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto 0$ , para  $n \rightarrow \infty$  donde  $x_1 \approx -1.6$ ,  $x_2 \approx 1$ ,  $x_3 \approx -0.6$ , y  $x_4 \approx -1.4$ .

Tenemos que  $U_3$  y  $U_5$  son componentes hiperbólicas; por lo tanto, la dinámica de sus elementos es esencialmente la misma, i.e., de periodo 3 y 5 respectivamente.

Un problema nada trivial, es identificar la *frontera* de cada componente  $U \subset \mathcal{M}$ . El siguiente resultado es lo "mas cercano" a una posible respuesta a este problema.

**Teorema 3.** Si  $P_c(z)$  tiene un ciclo o periódico indiferente, entonces  $c \in \partial \mathcal{M}$ .



**Figura 12.** Conjuntos de Julia en las componentes de periodo 3 y 5 respectivamente.

Sin embargo la frontera del conjunto de Mandelbrot no consiste únicamente de tales parámetros. El problema de identificar la frontera del conjunto de Mandelbrot está relacionado con las conjeturas 1 y 2. De hecho la siguiente conjetura es una versión "muy fuerte" de las anteriores conjeturas.

**Conjetura 3.** La frontera del conjunto de Mandelbrot es localmente conexa (Douady y Hubbard, 1984).

En el intento de resolver esta última conjetura se ha desarrollado mucha de la teoría de dinámica holomorfa, que relaciona a distintas áreas de matemáticas como: aritmética, combinatoria, topología, geometría. Esto muestra que en

*matemáticas todas sus distintas disciplinas están relacionadas entre si.*

Es necesario aclarar que la teoría de sistemas dinámicos holomorfa no estudia únicamente polinomios cuadráticos o grado  $n$ , parte muy importante de estudio son las funciones racionales, funciones trascendentes y grupos kleinianos. Muchos matemáticos muy importantes son quienes han intervenido en el desarrollo de esta teoría, entre ellos cuatro *medallistas Fields*:

- ♦ John Milnor, que recibió la medalla Fields en el año de 1962 por trabajos en el área de *geometría diferencial*, algunas de sus contribuciones en dinámica holomorfa es sobre caracterización topológica de transformaciones hiperbólicas.
- ♦ William Thurston recibió a medalla Fields en 1982, su trabajo esencialmente es *geometría y topología de 3-variedades* y su contribución en dinámica holomorfa es muy vasta en cuanto a la teoría de grupos kleinianos, respecto a la dinámica de funciones racionales tiene dos resultados *muy importantes* uno es junto con J. Milnor en donde relaciona propiedades aritméticas con la dinámica de cierto tipo de funciones. Mas tarde hizo una caracterización de topológica de funciones racionales y este resultado engloba conjeturas muy importantes en esta teoría.
- ♦ Jean-Christophe Yoccoz recibió la medalla Fields en 1994, trabaja principalmente en *Dinámica Holomorfa* al igual que
- ♦ Curtis McMullen quien recibió la medalla Fields en 1998.

Aunque muchos especialistas en el área aseguran que el conjunto de Mandelbrot es un objeto que "casi" conocemos completamente, la teoría está *lejos* de ser concluida, las conjeturas que quedan son muy fuertes, esto no quiere decir que sean imposibles de resolver, sin embargo también hay problemas *relativamente sencillos* que esperan a ser resueltos. También cabe mencionar que hay un grupo de jóvenes investigadores mexicanos que trabajan directamente con los importantes matemáticos mencionados anterior mente.

### Referencias

Ahlfors LV. 2006. Lectures on Quasiconformal Mappings. volume 38 of University Lecture. AMS.

Barrow-Green J. 1997. *Poincaré and the three body problem*. AMS Bookstore. Providence RI.

Beardon AF. 1991. *Iteration of Rational Functions*. Number 132 in GTM. Springer-Verlag.

Carleson L. y Gamelin TW. 1993. *Complex Dynamics*. Universitext. Springer-Verlag.

Douady A. y Hubbard JH. 1984. *Etude dynamique des polynômes complexes*, Prépublications mathématiques d'Orsay 2/4.

Lehto O. y Virtanen K. 1973. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer Verlag.

Lei T. 2000. *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*. London Mathematical Society Lecture Note Series Number 274. Cambridge University Press edition. Pp.8-20.

Lyubich M. 1990. *An Analysis of stability of the dynamics of rational functions*. Selecta Math. Sov. 9(1):69-90. (Original Ruso publicado en 1984.)

McMullen C. 1994. *Complex Dynamics and Renormalization*. Number 135 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press.

Mane R. Sad P. y Sullivan D. 1983. *On the dynamics of rational maps*.

Ann. Sei. Ee. Norm. Sup. Paris, 4(16): 198-217.

Milnor J. 2005. *Dynamic in one Complex Variable: Intro-ductory Lectures*. Number 160 in Annals of Math. Studies. Princeton University Press, 3rd edition.