DESARROLLO DE LA FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDAD (PDF) DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y SU APLICACIÓN

Manuel R. Piña-Monarrez

Departamento de Ingeniería Industrial – Instituto de Ingeniería y Tecnología Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Resumen

La distribución normal juega un rol determinante en muchos procesos de inferencia estadística. Dado que esta función de densidad de probabilidad (pdf) de la distribución normal cumple con las condiciones de regularidad, sus parámetros son estimados a través del método de máxima verosimilitud (MV). En este artículo se presenta el desarrollo de la pdf a través de la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 \cdot 2^{-1})dy$, se determinan sus parámetros aplicando la estimación de momentos y el método de (MV). Además, una aplicación de la distribución normal a través de una función compuesta para el diseño de parámetros, en ingeniería de confiabilidad, es presentada. En particular con la finalidad de relacionar el diseño con la filosofía seis sigma, el parámetro y su tolerancia es estimada para que cumpla que sólo 1% de las partes diseñadas sean defectuosas y que el proceso de manufactura presente a lo más 3.4 partes por millón (PPM´s).

Palabras clave: Distribución normal, Diseño probabilístico, Seis sigma.

Introducción

El uso extendido de la distribución normal para modelar los datos en las aplicaciones estadísticas, generalmente se debe a que muchos de los procedimientos estadísticos habitualmente utilizados asumen la normalidad de los datos observados, transforman los datos o generan distribuciones muestrales (teorema del límite central). Las pruebas de bondad más versátiles para determinar si los datos siguen una distribución específica, entre otras son Anderson Darling, Kolgomorov Smirnov y Ji-Cuadrada. En particular en este artículo una aplicación de la distribución normal al diseño de los parámetros para un producto con tolerancias seis sigma es presentado. El articulo, está estructurado para presentar en forma breve y secuencial los conocimientos teóricos/técnicos necesarios para el entendimiento, flexibilización y aplicación de la distribución normal a los procesos productivos.

Estimación de parámetros

Entre los métodos más usuales para la estimación de parámetros están los métodos de regresión, la estimación bayesiana, la estimación basada en distancias y la estimación de momentos y de máxima verosimilitud desarrollados brevemente en este artículo.

Estimación de Momentos de M(t)

La función generatriz de momentos puede ser definida como el valor esperado de (e^{tx}). Así, para una variable aleatoria X con función de probabilidad $f(x)$ del tipo discreto o continuo, donde existen números positivos *h* tal que el valor esperado de (e^{tx})

es $E(e^{tx})$ para t, en el intervalo $-h < t < h$, de esa forma el valor esperado de (e^{tx}) dada $f(x)$ es $E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) \cdot dx$ si X es del tipo continuo o $E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} \cdot f(x)$ si X es del tipo discreto. Este valor esperado es conocido como función generatriz de momentos de X (o de la distribución de X) y es denotada por (1).

$$M(t) = E(e^{tx}) \tag{1}$$

De (1), y dado que $f(x)$ es una función distribución de probabilidad (pdf), es evidente que si $t = 0$, entonces $M(0) = 1$. Es importante resaltar que $M(t)$ por ser una función monótona creciente, es única para cada distribución, (para diferentes valores de *t*, diferentes valores de $M(t)$). De esa forma, si dos variables aleatorias tienen la misma función generatriz de momentos, éstas tienen la misma distribución (Hogg y Graig, 1965).

Estimación de Máxima Verosimilitud

El estimador de máxima verosimilitud (MV), es un estimador ampliamente utilizado para determinar los parámetros de una pdf u otra inferencia estadística. MV se puede definir como aquella estimación que maximiza la probabilidad de observar los parámetros $\hat{\theta}_j$ dada una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La verosimilitud $L(\theta; x)$ del parámetro θ dados los datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es proporcional a la probabilidad $P(x; \theta)$ de obtener los datos observados dado el parámetro θ. Ésta proporcionalidad $L(\theta; x) \propto P(x; \theta)$, puede convertirse en igualdad a través de una constante arbitraria $L(\theta; x) = k \cdot P(x; \theta)$. Dado que la pdf normal cumple con las condiciones de regularidad (Kalbfleisch, 1980), se puede utilizar el MV para construir la función de verosimilitud y estimar sus parámetros.

Para la formación de la función de verosimilitud, considere que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es una variable aleatoria independiente con función densidad de probabilidad $f_i(x_i; \theta)$ (normalmente distribuida en este caso) que depende del valor del parámetro θ, por lo que la función densidad de probabilidad conjunta (o de verosimilitud), está dada por (2):

$$L(\theta; x) = f(x; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta) \tag{2}$$

La función definida en (2) es conocida como la función de verosimilitud. Dado que las raíces de (2) y las de su logaritmo son las mismas, generalmente para la optimización (determinación de los parámetros de la función que maximizan la probabilidad de observar los datos actuales), se construye la función de log-verosimilitud, la cual está dada por (3):

$$\log L(\theta; x) = \sum_{i=1}^{n} \log f_i(x_i; \theta) \tag{3}$$

Así, formalmente el estimador de máxima verosimilitud (LMV), es el valor del parámetro $\hat{\theta}$ tal que $\log L(\hat{\theta}; x) \geq \log L(\theta; x)$ para toda θ. El procedimiento para la optimización consiste en obtener la primera derivada de (3), igualarla a cero y despejar para el parámetro. La derivada parcial está dada por (4):

$$g(\theta) = \frac{\partial \log L(\theta; x)}{\partial \theta} \tag{4}$$

El vector gradiente definido en (4) cuando es evaluado como el valor verdadero tiene media cero $E[g(\theta)] = 0$ y matriz de varianzas y covarianzas dada por la matriz de información dada por $V[g(\theta)] = E[g(\theta)g^t(\theta)] = I(\theta)$ la cual bajo condiciones de regularidad puede ser aproximada por la matriz de información de Fisher dada por menos las segundas derivadas de (3) como sigue:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial\theta\partial\theta^{t}}\right] \qquad (5)$$

Observe que las segundas derivadas indican la extensión (dispersión) a la cual la función de log verosimilitud es leptocúrtica (picuda) más que mesocúrtica (aplastada), por lo que su uso como matriz de información parece intuitivamente razonable.

Nota: La estimación por LMV, generalmente utiliza procedimientos iterativos para la optimización. Cuando se usan modelos de la serie de Taylor, el método utilizado es el método de Newton-Raphson dado por $\hat{\theta} = \theta_0 - H^{-1}(\theta_0)\cdot g(\theta)$, donde θ_0 es un valor inicial (generalmente cero). $H^{-1}(\theta_0)$ es la inversa del Hessiano dado por las segundas derivadas (sin el negativo) como se definió en (5) y $g(\theta)$ es el vector gradiente definido en (4).

Distribución normal

La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754). Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; de ahí que también que se le conozca más comúnmente, como la **"campana de Gauss"**. La distribución de una variable normal está completamente determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar, denotadas generalmente por μ y σ y sus propiedades son:

- La moda, media aritmética y mediana, tienen el mismo valor.
- La curva normal es asintótica al eje de abscisas.
- Es simétrica con respecto a su media μ.
- Sus puntos de inflexión están en $\pm\sigma$. Cuanto mayor sea σ, más aplanada será la curva de la densidad.
- La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros *c*. La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de μ, la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal. Por otra parte, la desviación estándar determina el grado de apuntalamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de σ, más se dispersarán los datos alrededor de la media y la curva será más plana. Un valor pequeño de este parámetro indica, por tanto, una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución.

Como se deduce de este último apartado, no existe una única distribución normal, sino una familia de distribuciones con una forma común, diferenciadas por los valores de su media y su varianza. De entre todas ellas, la más utilizada es la **distribución normal estándar**, que corresponde a una distribución de media 0 y varianza 1. Esta propiedad resulta especialmente interesante en la práctica, ya que para una distribución $N(0,1)$ existen tablas publicadas, a partir de las que se puede obtener de modo sencillo la probabilidad de observar un dato menor o igual a un cierto valor *z*, y que permitirán resolver preguntas de probabilidad acerca del comportamiento de variables de las que se sabe o se asume que siguen una distribución aproximadamente normal. El estadístico *Z* está dado por:

$$Z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (6)$$

Donde μ y σ, son respectivamente la media y desviación estándar poblacional. La función definida en (6) en su forma muestral, está dada por:

$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (7)$$

Donde $\bar{X}$ es la media muestral y $\sigma/\sqrt{n}$ es la desviación de la distribución muestral donde *n* representa el tamaño de la muestra (*n* deberá de ser aleatoria y suficiente). El estadístico *Z*, da el número de desviaciones estándares que el dato se encuentra retirado de su media (Rencher 2002).

Determinación de la pdf Normal

Para determinar la función densidad de probabilidad normal (pdf) considere la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2 \cdot 2^{-1}) \cdot \mathrm{d}y$, la cual para la variable z, puede ser escrita como $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2 \cdot 2^{-1}) \cdot \mathrm{d}z$. Además, el integrando $\exp(-z^2 \cdot 2^{-1})$, es una función continua positiva que está limitada por una función integrable, entonces la integral existe por lo que:

$$0 < \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) < \exp(-|y| + 1) \text{ para } -\infty < y < \infty \quad (8)$$

Observe que (8) puede ser escrita como $\frac{-y^2}{2} < -|y| + 1$, por lo que para $|y| \geq 0$, $\frac{-y^2}{2} < -y + 1$, se tiene que $0 < (y-1)^2 + 1$ y para $|y| < 0$, $\frac{-y^2}{2} < y + 1$ y $0 < (y+1)^2 + 1$, por lo que claramente *I* es positiva *I* > 0 (se cumple la primera condición mencionada en la nota).

Nota: no olvide que para que una función $f(x)$, sea una función densidad de probabilidad, se debe de cumplir que $f(x)$ sea siempre positiva y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)$.

Para evaluar la integral I, se basa en el hecho de que I > 0 y de que I^2 puede ser escrita como $I^2 = F(Y,Z) = g(y) \cdot h(z)$ donde,

$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}y$ y $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}z$, por lo que

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(Y,Z) \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot h(z) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$

y I^2, queda como $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \cdot h(z) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = \left[\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}y\right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}z\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z =$

o en forma simplificada como:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-y^2 - z^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \quad (9)$$

Esta integral iterada puede ser evaluada realizando un cambio de variables a coordenadas polares, por lo que estableciendo $y = r \cdot cos\theta$ y $z = r \cdot sen\theta$ la integral es $I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \cdot r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\theta$, donde $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$, por lo que $I = \sqrt{2\pi}$ y finalmente, la integral I queda como:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}y \qquad (10)$$

Si introducimos una nueva variable de integración, dígase x, tal que $y = \frac{x-a}{b}$ para $b > 0$, entonces (10) con el cambio de variable queda como: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\cdot b^2}\right) \cdot \mathrm{d}x = 1$. Dado que $b > 0$, la función es continua en todo punto, es decir:

$$f(x) = \frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\cdot b^2}\right) \qquad (11)$$

La función representada en (11) es conocida como distribución normal, y a una variable aleatoria que sigue esta distribución, se dice que sigue una distribución normal.

Determinación de los Parámetros de la pdf Normal

Por lo anterior, la función generatriz de momentos para la pdf normal es: $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{b\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\cdot b^2}\right) \cdot \mathrm{d}x$. Para su desarrollo, sea $x = by + b^2t + a$, entonces,

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\cdot(by+b^2t+a)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(by+b^2t)^2}{2\cdot b^2}\right) \cdot \mathrm{d}y$$

, por lo que $M(t)$, se puede escribir como:

$$M(t) = exp\left(a\cdot t + \frac{b^2 t^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) \cdot \mathrm{d}y = exp\left(a\cdot t + \frac{b^2 t^2}{2}\right) \qquad (12)$$

La función dada en (12) representa la función generatriz de momentos de la pdf normal para toda t real. El primer momento dado como la primera derivada de (12) con respecto a t e igualada a cero ($t = 0$), es la media aritmética [$M'(t) = \mu = E(X)$]. Por lo que la media aritmética está dada por:

$$\mu = exp\left(a\cdot t + \frac{b^2 t^2}{2}\right) \cdot (a + b^2 \cdot t) = a \qquad (13)$$

El segundo momento representado por la segunda derivada de (12) con respecto a t, es $M''(t) = b^2 + a^2$, por lo que la varianza de la distribución dada por el momento dos menos momento uno al cuadrado y resolviendo para $t = 0$, está dada por:

$$\sigma^2 = M''(t) - [M'(t)]^2 = b^2 \qquad (14)$$

Finalmente de (13) y (14), se concluye que los parámetros que determinan a la distribución normal son la media μ y la varianza σ^2.

De igual manera, (11) en términos de (13) y (14) está dada por $f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right)$, por lo que la función de verosimilitud definida en (2) está dada por:

$$L(\theta; x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}\right) \qquad (15)$$

La función de log-verosimilitud definida en (3), en términos de (15) es:

$$\log L(\theta; x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (16)$$

derivando (16) con respecto a μ e igualando a cero como se definió en (4), la media está dada por:

$$\mu = \sum_1^n \frac{X_i}{n} \qquad (17a)$$

La derivada de (16) con respecto a σ cómo se definió en (4), está dada por:

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}|\hat{\varepsilon})}{\partial(\hat{\sigma})} = -\frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{\sum_i^n (X_i - \mu)^2}{2} \cdot \hat{\sigma}^{-3}$$

$$\frac{\partial \ln L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}|\hat{\varepsilon})}{\partial(\hat{\sigma})} = -\frac{n}{\hat{\sigma}} - \frac{\sum_i^n (X_i - \mu)^2}{2\hat{\sigma}^3}$$

$$\frac{\sum_i^n (X_i - \mu)^2}{\hat{\sigma}^3} - \frac{n}{\hat{\sigma}} = \frac{\sum_i^n (X_i - \mu)^2 - n\,\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^3} = 0$$

por lo que $\sum_i^n (X_i - \mu)^2 - n\,\hat{\sigma}^2 = 0$.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i^n (X_i - \mu)^2}{n} \qquad (17b)$$

En particular, para una variable aleatoria X [$N(0{,}1)$], se puede decir que X tiene una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, es decir su pdf, es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x)^2}{2}\right), -\infty < x < \infty,$$

Así, si se dice que X está $N(5{,}4)$, entonces, X tiene una distribución normal con $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 4$, y su pdf, es

$$f(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left(\frac{-(x-5)^2}{2(4)}\right), -\infty < x < \infty,$$

por lo que:

Teorema 3.1: Si la variable aleatoria X, está $N(\mu, \sigma^2)$ para $\sigma^2 > 0$, entonces la variable aleatoria $Z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, está $N(0{,}1)$.

Demostración: La distribución de la función $G(z)$ de *c*, dado que $\sigma^2 > 0$, es

$$G(z) = Pr\frac{x-\mu}{\sigma} \leq z = \Pr(x \leq z\sigma + \mu),$$

es decir:

$$G(z) = \int_{-\infty}^{z\sigma+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

y si se hace el cambio de variable de integración por $y = (x-\mu)/\sigma^{-1}$, entonces $G(z) = \int_{-\infty}^{w} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(y)^2}{2}\right) dy$. Bajo estas circunstancias, la pdf, $g(z) = G'(Z)$ de la variable aleatoria continua Z es $G'(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-(z)^2}{2}\right) dy, \quad -\infty < x < \infty$. Es decir, Z está $N(0{,}1)$, por lo que la demostración está completa.

Propiedad Reproductiva de la Distribución Normal

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, variables aleatorias independientes normalmente distribuidas con media μ_i y varianza σ_j^2 [$X \approx N(\mu_i, \sigma_j^2)$]. Si se define una nueva variable

$$Z = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n,$$

entonces por la propiedad reproductiva de la normal, Z se distribuye normal con $Z \approx N(\mu_{zi}, \sigma_z^2)$ donde:

$$\mu_z = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \qquad (18)$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i \sigma_i)^2 \qquad (19)$$

Para dos variables aleatorias normalmente distribuidas, se puede definir la función $g = R - S$, donde si $g(R,S) > 0$ implica que R es mayor que *S* y si $g(R,S) < 0$ entonces *S* es mayor que *R*, por lo que se puede establecer la función de estado límite o de frontera entre ambas variables cuando $g(R,S) = 0$ Así por ejemplo si *R* representa resistencia y *S* representa esfuerzo por unidad de carga, entonces, la probabilidad de falla es la probabilidad de que $g < 0$ que en función de *R* y *S*, está dada por $p[g(R,S)] < 0$. Así, si se define $Z = g(x) = R - S$, entonces la probabilidad de falla de $Z[p(Z < 0)]$, es:

$$P_f = P\left[\frac{(0-\mu_z)}{\sigma_z}\right] = \Phi\left(\frac{\mu_z}{\sigma_z}\right) \qquad (20)$$

Si se define el índice de seguridad como:

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} \qquad (21)$$

entonces la probabilidad de que el sistema alcance el límite de seguridad es equivalente a:

$$P_f = \Phi(-\beta) \qquad (22)$$

donde Φ, es la distribución acumulada normal estándar.

Una aplicación

Suponga que se va a diseñar una viga de longitud (*L*) de 10 pulgadas, cuya resistencia (*R*) es considerada una variable aleatoria normal con media 35nw y desviación estándar de 2nw. La viga será sometida a una carga aleatoria (*C*) normalmente distribuida con media de 5nw y desviación estándar de 1nw. La altura (*h*) del material a utilizar es de 4 pulgadas, se desea saber de que ancho (*A*) deberá de ser la viga para el que la probabilidad de falla (pf), sea menor del 1%. De igual forma, se desea encontrar una tolerancia de 6 sigma para el ancho *A* (a lo más 3.4 defectos por millón) una representación esquemática del diseño esperado, se presenta en la Figura 1.

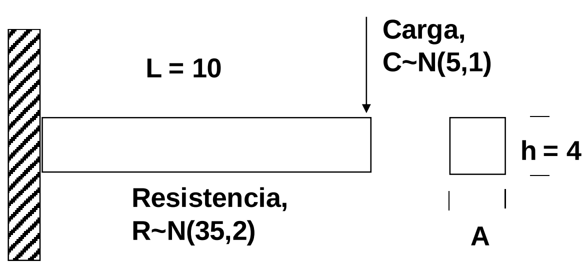

Figura 1. Representación esquemática de la viga

Análisis: Dado que la tolerancia es para seis sigma, considérese que la probabilidad de falla del 1% es una estimación de la desviación estándar a largo plazo (AIAG, 2005). Dado que *R* y *C* son ambas variables aleatorias normales e independientes, entonces por la propiedad de la distribución normal se puede definir una nueva variable

$g(x) = R - S$ donde $R \approx N(35,2)$ y S en función de *A*, *C* y *h*, con s representando el esfuerzo por unidad, está dada por $S = \frac{CL\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{Ah^3}{12}} = \frac{6CL}{Ah^2} = \frac{60C}{16A} = \frac{3.75C}{A}$, así la media de *Z*, de acuerdo a (18), está dada por

$$\mu_z = 35 - 18.75/A \qquad (23)$$

y de acuerdo a (19), la varianza de *Z* es

$$\sigma_z = 4 + 14.065/A^2 \qquad (24)$$

De igual forma, dado que aquí 1 % de acuerdo a (21), se estableció como el índice de seguridad, entonces de (22), el valor *Z* que corresponde al 1 % , da un índice de seguridad $\phi(\beta) = 2.326347874 \approx 2.33$, por lo que al sustituir (23) y (24) en (21) el ancho de la viga es *A* = *0.81*. Finalmente la tolerancia de seis sigma para *A* y debido a que el 1 % es de largo plazo, entonces por establecer la igualdad dada en (6), igual a 4.5 (3.4 PPM) (ver Yang *et. al* 2003), con $\mu = A = LIE = 0.81$ y $\sigma = 0.01$, se tiene que $\bar{A} = 0.855 \pm 0.0450$. Es decir para que las vigas diseñadas cumplan con el índice de seguridad de que sólo 1 viga de cada 100 falle y de que el proceso produzca a lo más 3.4 PPMs, estas deberán de tener un ancho de cuando menos $\bar{A} = 0.855 \pm 0.0450$ pulgadas.

Conclusiones

La función generatriz de momentos determina eficientemente los parámetros de una función densidad de probabilidad (pdf). El estimador de máxima verosimilitud permite la estimación numérica de los parámetros de la pdf. La propiedad reproductiva de la normal, permite la mezcla de variables independientes normales de acuerdo a una función conveniente para el análisis, ya que dicha función también sigue una distribución normal, por lo que con ella se pueden realizar todas las inferencias que el análisis requiera. La aplicación presentada, aunque es un caso muy simple de la literatura, tiene la intención de detallar el análisis de variables aleatorias normales que se realizan en el diseño probabilístico de parámetros y procesos en ingeniería de confiabilidad.

Referencias

AIAG. 2005. *Manual del AIAG 2005*. Industria Automotriz.

Hogg RV. y Craig AT. 1965. *Introduction to Mathematical Statistics*, New York: Macmillan Company, USA.

Kalbfleisch JD. y Prentice RL. 1980. *The Statistical Analysis of Failure Time Data*, Jhon Wiley and Sons, New York.

Rencher AC. 2002. *Methods of Multivariate Analysis*, Jhon Wiley and Sons, New York, USA.

Yang K. y El-Haik B. 2003. *Design for Six Sigma: A roadmap for Product Development*. Mc-Graw-Hill, New York, U