QUINTERO y RAMÍREZ. 2019. TESELACIONES REGULARES-ISOMÉTRICAS EN EL PLANO EUCLIDIANO. Revista Sigma, 15 (1). Pág. 16–27
http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXV/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XV № 1 (2019), páginas 16–27

TESELACIONES REGULARES-ISOMÉTRICAS EN EL PLANO EUCLIDIANO

ANDERSON STIVEN QUINTERO [1]
CAMILO RAMÍREZ MALUENDAS [2]

Abstract: In this paper we introduce the mathematical object regular-isometric tessellation of the Euclidean plane and, we prove that the unique regular-isometric tessellation of the Euclidean plane are the well known regular tessellation by triangles, squares and hexagons.

Keywords. Tessellation, regular-isometric tessellation.

Resumen: En este artículo introducimos el concepto de teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano y probamos que las únicas teselaciones regulares-isométricas que admite el plano Euclidiano están conformada por triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares.

Palabras Clave. Teselación, Teselación regular-isométrica.

1. Introducción

La técnica de teselar ha estado presente en las grandes civilizaciones antiguas como la Egipcia (-2800,- 80), la Babilónica (-1792,-539) entre otras. Prueba de ello son sus vistosas estructuras arquitectónicas decoradas con moisacos pintorescos, pinturas coloridas, figuras talladas en bajo relieve, etcétera. A grosso modo, teselar es cubrir una región o superficie con una cantidad determinada de piezas siguiendo un patrón u orden, sin dejar espacio y superponer las pieza.

Durante el florecimiento de la civilización griega surgieron los cinco poliedros regulares, conocidos también como los sólidos platónicos:[3] *tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro* e *icosaedro* (véase Figura 1), los cuales son teselaciones regulares en la "esfera" y están formadas

[1]FUNDACIÓN UNIVERSITARIA KONRAD LORENZ. CP. 110231, BOGOTÁ, COLOMBIA. Email: andersons.quinteroe@konradlorenz.edu.co
[2]UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, SEDE MANIZALES. MANIZALES, COLOMBIA. Email: camramirezma@unal.edu.co
*Autor responsable de la correspondencia.
[3]Acorde con Proclo (412-485), estos objetos fueron descubiertos por la escuela pitagórica (véase e.g., [9, p. 2]; [2, p. 49]).

mediante un mismo polígono regular; cuatro triángulos, cuatro cuadrados, ocho triángulos, doce pentágonos y veinte triángulos, respectivamente. Otros ejemplos de teselaciones son las tres teselaciones regulares en el plano Euclidiano mediante triángulos equiláteros $\{3, 6\}$,[4] cuadrados $\{4, 4\}$ y hexágonos regulares $\{6, 3\}$ (véase Figura **2**).

La definición de teselación regular[5] desde el punto de vista algebraico y geométrico proviene de [5, p.101], la cual es dada a partir de la acción transitiva del grupo de automorfismos de la teselación sobre el conjunto de banderas de la teselación (véase también [3]). No obstante, nosotros introducimos la definición de *teselación regular-isométrica* en el plano Euclidiano, menos sofisticada y robusta en comparación a la dada por los anteriores autores, pues no pasamos por el grupo de automorfismos de una teselación pero si consideramos el grupo de Isometrías del plano Euclidiano.

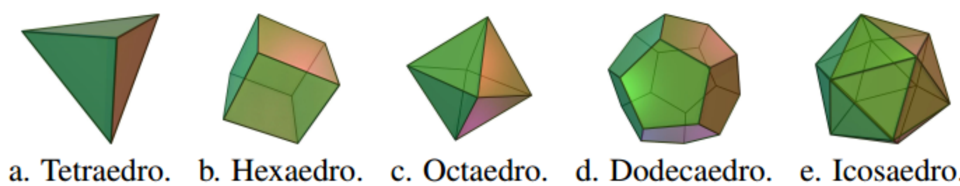


Figura 1: *Poliedros regulares.*
Imagen de Maksim Pe, distribuida bajo CC BY-SA 4.0

Motivados por el gran interés que han despertado las teselaciones regulares en esta última década (véase e.g., [1]; [4]; [6]; [7] entre otras) y, el importante rol que han desempeñado las teselaciones en el desarrollo histórico, probamos el siguiente resultado con argumentos sencillos de la teoría congruencia módulo y la geometría Euclidiana.

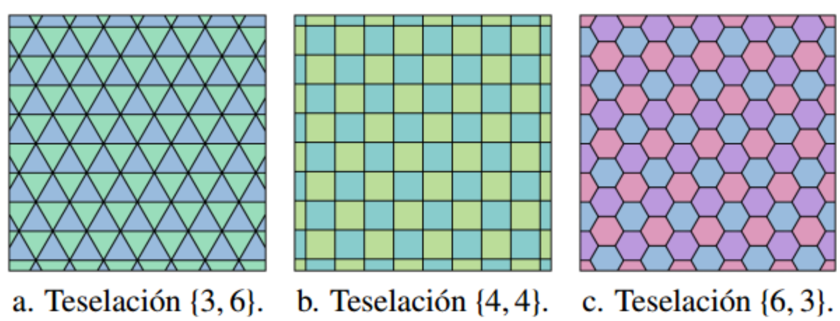


Figura 2: *Teselaciones regulares del plano Euclidiano.*
Imagen de R. A. Nonenmacher, distribuida bajo CC BY-SA 2.5

Teorema 1. *Si P es una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, entonces P está conformada por triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares*

Además, recopilamos varias ideas geométricas que aparecen en la sección 2 de [10] y proponemos una prueba a la siguiente afirmación.

Teorema 2. *Existen teselaciones regulares-isométrica en el plano Euclidiano mediante cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares.*

[4] El par $\{p, q\}$, introducido por Schäfli, L., es llamado el tipo de Schäfli de la teselación, lo cual significa que dicha teselación está conformado por p-ágonos y en cada vértice de los p-ágonos que conforman la teselación inciden exactamente q p-ágonos,(véase [9, p.6])

[5] Este concepto se extiende también a los objetos conocidos como politopos. Véase [9].

Antes de proceder las prueba de los teoremas **1** y **2**, introduciremos la definción de los objetos: *teselación* y *teselación regular-isométrica* en el plano Euclidiano. A través de este escrito denotaremos mediante $\mathbb{R}^2$ al plano Euclidiano dotado de la métrica Euclidiana usual.

Definición 1. *[8, p.16]. Una teselación P en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ es una familia numerable de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^2$, los cuales satisfacen las siguientes dos condiciones:*

(1) Los elementos de P cubren a $\mathbb{R}^2$, en otras palabras, el plano Euclidiano es la unión de los elementos de P,

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in P} P.$$

(2) Cualesquiera dos elementos de P no se sobreponen, es decir, el interior de los cerrados que conforman a P son disjuntos dos a dos.

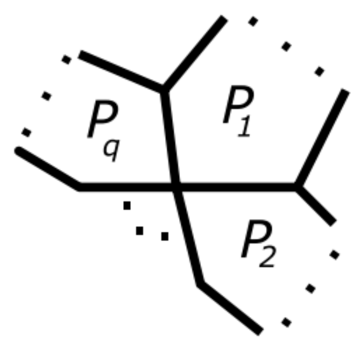


Figura 3: *q p-ágonos incidentes en un vértice.*

Definición 2. *Diremos que la teselación P en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ es regular-isométrica si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) Los cerrados que conforman a la familia P son p-ágonos regulares, para algún $p \geq 3$.

(2) Los polígonos de P son isométricos.

(3) La intersección de cualesquiera dos p-ágonos diferentes de P es vacía, un vértice o una arista.

(4) En cada vértice de cada polígono $p \in P$ inciden exactamente $q \geq 3$ elementos de P.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1

Consideramos P una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, conformada por p-ágonos regulares, para algún $p \geq 3$. Recordemos que la medida de los ángulos interiores de un p-ágono $p \in P$ es igual a $\dfrac{\pi(p-2)}{p}$. Dado que en cada vértice de P inciden exactamente $q \geq 3$ p-ágonos pertenecientes a P (véase Figura [3]), entonces q veces la medida de un ángulo interior de P es igual a 2π, dicho de otra manera,

$$\pi \frac{(p-2)}{p} q = 2\pi \tag{1}$$

De la igualdad (1) obtenemos que $(p-2)q = 2p$, lo cual implica que $2p$ es congruente a 0 módulo $p-2$,

$$2p \equiv 0 \quad mod\; p-2. \tag{2}$$

Dado que $0 \equiv p-2 \; mod \; p-2$ y la relación congruente módulo es transitiva, entonce de la expresión (2) tenemos que

$$2p \equiv p-2 \; mod \; p-2. \tag{3}$$

De esta última congruencia deducimos fácilmente que

$$p+2 \equiv 0 \; mod \; p-2. \tag{4}$$

Nuevamente, dado que $0 \equiv p-2 \; mod \; p-2$ y la relación congruente módulo es transitiva de la relación (4) obtenemos que

$$p+2 \equiv p-2 \; mod \; p-2. \tag{5}$$

A partir de esta última relación planteamos la ecuación

$$p+2-(p-2) = k(p-2), \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}^+ \; y \; p \geq 3, \quad 4 = k(p-2), \tag{6}$$

la cual solo puede tener las siguientes tres soluciones enteras positivas

$$k_1 = 1 \text{ y } p_1 = 6, \; k_2 = 2 \text{ y } p_2 = 4, \; k_3 = 4 \text{ y } p_3 = 3.$$

Esto implica que p solo puede tomar valores en el conjunto $\{3,4,5\}$, entonces los polígonos que están en la familia P son triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares. Además, si P está conformada por triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares respectivamente, se sigue de la ecuación (1) que en cada vértice de cada polígono $p \in P$ inciden exactamente $q = 6, 4$ y 3 elementos de P, respectivamente. $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

La prueba de este teorema consiste en la construcción explícita de tres teselaciones regulares-isométricas en el plano Euclidiano conformadas por: cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares, respectivamente.

2. Construcción de una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano conformada por cuadrados

Para cada pareja ordenada $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definimos el cuadrado

$$P_{(a,b)} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq a+1, \; b \leq y \leq b+1\}. \tag{1}$$

Probaremos que la familia

$$P_{\square} := \{P_{(a,b)} : (a,b) \in Z \times Z\}, \tag{2}$$

es una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano conformada por cuadrados.
Veamos que en efecto $P_{\square}$ es una teselación en el plano Euclidiano. Por definición de $P_{\square}$ es inmediato que

$$\bigcup_{(a,b)\in Z\times Z} P_{(a,b)} \subset \mathbb{R}^2.$$

Ahora, tomamos el par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y la función piso $g : \mathbb{R} \to Z$, definida mediante

$$\upsilon \mapsto \lfloor \upsilon \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq \upsilon\},$$

entonces consideramos el cuadrado $P_{(\lfloor x\rfloor,\lfloor y\rfloor)} \in P_{\square}$. Dado que para todo número real $\upsilon \in \mathbb{R}$ se satisface la relación $\lfloor \upsilon\rfloor \leq \upsilon < \lfloor \upsilon\rfloor + 1$, entonces $(x,y) \in P(\lfloor x\rfloor, \lfloor y\rfloor)$. Esto prueba la contenencia.

$$\mathbb{R}^2 \subset \bigcup_{(a,b)\in Z\times Z} P_{(a,b)},$$

Así, concluimos que los elementos de $P_{\square}$ cubren al plano Euclidiano.

Por otro lado, consideremos dos cuadrados diferentes $P_{(a,b)} \neq P_{(c,d)} \in P_{\square}$ y veamos que la intersección de los interiores de $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ es vacía. Procederemos por contradicción. Supongamos que existe un par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en la intersección de los interiores de $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$. Entonces $a < x < a+1$, $b < y < b+1$ y; $c < x < c+1$, $d < y < d+1$, al evaluar los valores x y y en la función piso g se obtiene que $a = \lfloor x\rfloor = c$ y $b = \lfloor y\rfloor = d$, ello implica que los cuadrados $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ son el mismo i.e., $P_{(a,b)} = P_{(c,d)}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el interior de los cuadrados que conforman a $P_{\square}$ son disjuntos dos a dos. Esto prueba que en efecto $P_{\square}$ es una teselación en el plano Euclidiano. Para terminar, verificaremos que el conjunto $P_{\square}$ satisface las condiciones **(1)**-**(4)** enunciadas en la **definición 2**. Observemos que por la forma en que se definieron los objetos en $P_{\square}$ es inmediato **(1)**. Además, los cuadrados del conjunto $P_{\square}$ son isométricos, pues cualesquiera dos elementos $P(a,b), P(c,d) \in P_{\square}$ difieren por una translación, es decir, la translación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \mapsto (x,y) + (c-a, d-b),$$

envía el cuadrado $P_{(a,b)}$ sobre el cuadrado $P_{(c,d)}$, esto verifica **(2)**.

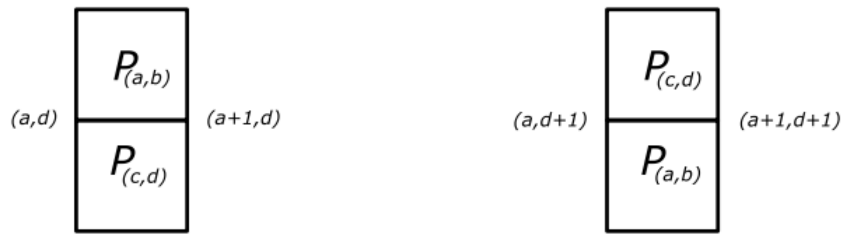
Ahora, consideremos los cuadrados $P_{(a,b)} \neq P_{(c,d)} \in P_{\square}$ y veamos que su intersección es vacía, un vértice o una arista. Las parejas ordenadas con entradas enteras (a,b) y (c,d) son diferentes, lo cual nos implica los siguientes tres casos a examinar.

Caso 1. Las parejas (a,b) y (c,d) solo difieren en una entrada. Supongamos que dichas parejas coinciden en la primera entrada pero difieren en la segunda entrada, es decir, $a = c$ y $b \neq d$ (el caso en que las parejas coinciden en la segunda entradas pero difieren en la primera entrada, es decir, $a \neq c$ y $b = d$, se prueba de manera similar), entonces se satisface alguna de las siguientes relaciones $b = d \pm 1$ o $b \neq d \pm 1$.

$*$ Si se satisface que $b = d \pm 1$, entonces

$$\begin{aligned} P_{(a,b)} = P_{(c,b)} :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq a+1 \ y\ b \leq y \leq b+1\}, \\ :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq c+1 \ y\ (d\pm 1) \leq y \leq (d\pm 1)+1\}, \\ P_{(c,d)} :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq c+1 \ y\ d \leq y \leq d+1\}, \end{aligned}$$

y la intersección $P_{(a,b)} \cap P_{(c,d)}$ es el segmento de recta con extremos (a,d) y $(a+1,d)$ (véase Figura **4**-a.) o, el segmento de recta con extremos $(a,d+1)$ y $(a+1,d+1)$ (véase Figura **4**-b.), es decir, una arista.



a. La intersección de $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ es el segmento de recta con extremos (a, d) y $(a+1, d)$.

b. La intersección de $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ es el segmento de recta con extremos $(a, d+1)$ y $(a+1, d+1)$.

Figura 4: *La intersección de los cuadrados $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ es un segmento.*

$*$ Contrariamente, si se cumple que $b \neq d \pm 1$, entonces

$$\begin{aligned}
P_{(a,b)} = P_{(c,b)} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq a+1 \ y \ b \leq y \leq b+1\}, \\
&:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq c+1 \ y \ b \leq y \leq b+1\}, \\
P_{(c,d)} &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq c+1 \ y \ d \leq y \leq d+1\},
\end{aligned}$$

y la intersección $P_{(a,b)} \cap P_{(c,d)}$ es vacía (véase Figura **5**-a).

a. La intersección de los cuadrados $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ es vacía.

b. La intersección de los cuadrados $P_{(a,b)}$ y $P_{(c,d)}$ es un vértice.

Figura 5: *La intersección de los cuadrados $P_{(a,b)}$ y $P(c,d)$ es vacía o un punto.*

Caso 2. Las parejas (a,b) y (b,c) difieren en ambas entradas, es decir, $a \neq c$ y $b \neq d$. Entonces, probaremos que la intersección $P_{(a,b)} \cap P_{(b,c)} = \emptyset$. Contrariamente, si la intersección $P_{(a,b)} \cap P_{(c,d)} = \emptyset$, entonces existe un elemento $(x,y) \in P_{(a,b)} \cap P_{(c,d)}$ tales que se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
a \leq x \leq a+1 \quad y \quad b \leq y \leq b+1, \\
c \leq x \leq c+1 \quad y \quad d \leq y \leq d+1,
\end{aligned} \tag{3}$$

Al restar las dos últimas desigualdades a las dos primeras tenemos que

$$a - c \leq 0 \leq a - c \quad y \quad b - d \leq 0 \leq b - d, \tag{4}$$

ello implica que $a = c$ y $b = d$, pero este hecho es claramente una contradicción pues $a \neq c$ y $c \neq d$. Por lo tanto, $P_{(a,b)} \cap P_{(b,c)} = \emptyset$.

Caso 3. Si $a = c + 1$ y $b = d + 1$, se sigue que

$$\begin{aligned}P_{(a,b)} = P_{(c+1,b+1)} :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq a+1,\ \ b \leq y \leq b+1\},\\ :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c+1 \leq x \leq c+2,\ \ d+1 \leq y \leq d+2\},\\ P_{(c,d)} :=& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq c+1,\ \ d \leq y \leq d+1\},\end{aligned}$$

Entonces la intersección $P_{(a,b)} \cup P_{(b,c)} = \emptyset$ es el punto $(c+1, d+1)$ (véase Figura **5**-b), es decir, un vértice. El anterior análisis nos prueba que se verifica **(3)**.

Finalmente, por construcción el conjunto formado por los vértices de los cuadrados de la teselación $P_{\square}$ coincide con $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Además, en cada pareja ordenada $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ inciden los cuatro cuadradados de la teselación $P_{\square}$ $P_{(a,b)}, P_{(a-1,b)}, P_{(a,b-1)}$ y $P_{(a-1,b-1)}$. Eso prueba que $P_{\square}$ cumple **(4)**. Así, concluimos que $P_{\square}$ es una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano formado por cuadrados.

3. Construcción de una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano mediante triángulos equiláteros

Consideremos la transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que define la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \tag{1}$$

la cual es biyectiva y satisface las siguientes propiedades: fija el eje x y envía las rectas perpendiculares al eje x sobre rectas con pendiente $tan\frac{\pi}{3}$.
Ahora, definimos el conjunto

$$P := \{P_{f(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} \tag{2}$$

siendo $P_{f(a,b)}$ la imagen directa del cuadrado $P_{(a,b)}$ (véase ecuación **7**) bajo la transformación f.

Observación 1. *Dado que la transformación lineal f es un homeomorfismo, entonces el conjunto P es una teselación en el plano Euclidiano mediante paralelogramos, con las siguientes propiedades:*

(1) Los paralelogramos de P son isométricos pues difieren por una translación. Para cualesquiera paralelogramos $P_{f(a,b)}$ y $P_{f(c,d)}$ de P consideramos la translación $\hat{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$(x,y) \mapsto (x,y) + f(a,b) - f(c,d)$$

la cual envía el paralelogramo $P_{f(a,b)}$ sobre el paralelogramo $P_{f(c,d)}$.

(2) La intersección de cualesquiera dos paralelogramos diferentes de P es vacía, un vértice o una arista.

(3) En cada vértice de cada paralelogramo $P \in P$ inciden exactamente 4 paralelogramos de P.

Entonces $P_{f(a,b)}$ es un paralelogramo de lado uno, con ángulos interiores $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}$ y, cuyos vértices son los puntos coordenados siguientes (véase Figura **6**-a.)

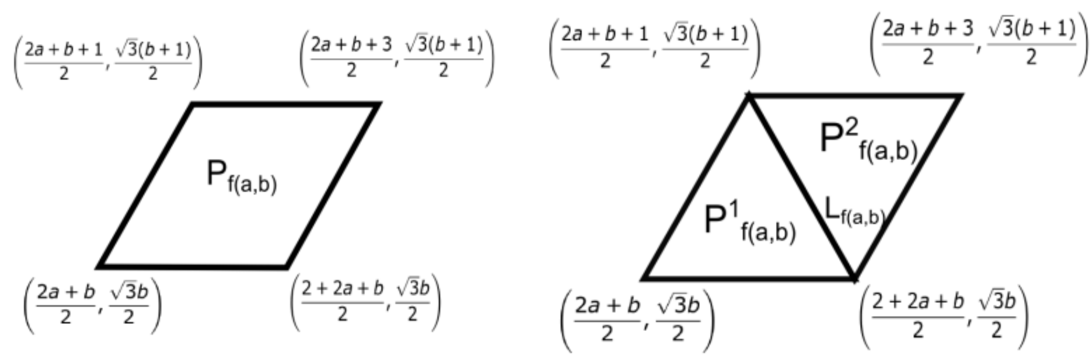
$$\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right), \left(\frac{2+2a+b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right), \left(\frac{2a+b+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(b+1)}{2}\right) y \left(\frac{2a+b+3}{2}, \frac{\sqrt{3}(b+1)}{2}\right).$$

En cada paralelogramos $P_{f(a,b)}$ de P trazamos el segmento de recta $L_{f(a,b)}$ con extremos los vértices $\left(\frac{2+2a+b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$ y $\left(\frac{2a+b+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(b+1)}{2}\right)$. Entonces, obtenemos dos triángulos equiláteros de lado uno $P^1_{f(a,b)}$ y $P^2_{f(a,b)}$, como se muestra en la Figura **6**-b. Los vértices del triángulo equilátero $P^1_{f(a,b)}$ tienen coordenadas

$$\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right), \left(\frac{2+2a+b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right) y \left(\frac{2a+b+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(b+1)}{2}\right).$$

Así mismo, los vértices el triángulo equilátero $P^2_{f(a,b)}$ tienen coordenadas

$$\left(\frac{2+2a+b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}\right), \left(\frac{2a+b+1}{2}, \frac{\sqrt{3}(b+1)}{2}\right) y \left(\frac{2a+b+3}{2}, \frac{\sqrt{3}(b+1)}{2}\right).$$



a. Paralelogramo $P_{f(a,b)}$. *b. Triángulos equiláteros $P^1_{f(a,b)}$ y $P^2_{f(a,b)}$.*

Figura 6: *Elementos del conjunto P.*

Por construcción, el paralelogramo $P_{f(a,b)}$ es la unión $P_{f(a;b)} := P^1_{f(a,b)} \cup P^2_{f(a,b)}$ tal que la intersección P1 $P_{f(a;b)} := P^1_{f(a,b)} \cap P^2_{f(a,b)}$ es el segmento $L_{f(a,b)}$. Además, el segmento $L_{f(a,b)}$ biseca los dos ángulos del paralelogramos que tienen medida $\frac{2\pi}{3}$.

Finalmente, de nuestra construcción anterior definimos el conjunto

$$P_{\triangle}\{:= P^1_{f(a,b)}, P^2_{f(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}, \tag{3}$$

la cual es una teselación del plano Euclidiano mediante triángulos equiláteros. Probaremos que el conjunto $P_{\triangle}$ es una teselación regular-isométrica del plano Euclidiano mediante triángulos equiláteros.

Por construcción, la teselación $P_{\triangle}$ satisface las dos primeras condiciones de la definición **2**, entonces solo debemos verificar las dos últimas condiciones de la mencionada definición.

Veamos que se satisface la condición **(3)**, entonces probaremos que los triángulos equiláteros $P^i_{f(a,b)}$ y $P^1_{f(0,0)}$ de $P_{\triangle}$ son isométricos, para algún $i \in \{1,2\}$ y para algún $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Debemos considerar los siguientes dos casos.

Caso 1. Si $i = 1$, entonces los triángulos $P^1_{f(a,b)}$ y $P^1_{f(0,0)}$ difieren por una translación, es decir, la translación $T_{f(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$(x, y) \mapsto (x, y) + f(a, b),$$

envía el triángulo equilátero $P^1_{f(0,0)}$ en el triángulo equilátero $P^1_{f(a,b)}$.

Caso 2. Si $i = 2$, entonces consideramos la reflexión $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a la línea recta que pasa por los vértices $f(1, 0)$ y $f(0, 1)$ del cuadrilátero $P_{f(0,0)}$. Notemos que R envía el triángulo equilátero $P^1_{f(0,0)}$ sobre el triángulo $P^2_{f(0,0)}$, esto implica que los triángulos $P^1_{f(0,0)}$ y $P^2_{f(0,0)}$ son isométricos. Ahora, consideramos la función composición $T_{f(a;b)} \circ R$, la cual es una isometría que envía el triángulo equilátero $P^1_{f(0,0)}$ sobre el triángulo equilátero $P^2_{f(0,0)}$.

Finalmente, probaremos que se satisface la propiedad (4) de la definición **2**, concretamente, probaremos que en cada vértice de cada triángulo equilátero de $P_\triangle$ inciden exactamente $q = 6$ triángulos de $P_\triangle$.

Por construcción $\{f(a, b) : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto formado por los vértices de los triángulos que conforman al conjunto $P_\triangle$. De la Observación **1** inciso (3) se sigue que el punto $f(a, b)$ es un vértice de exactamente cuatro paralelogramos P_1, P_2, P_3 y P_4 de P. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que el punto $f(a, b)$ en P_1 y P_4 es el vértice de un ángulo cuya medida es $\dfrac{2\pi}{3}$ (véase Figura **7**-a). Asimismo, el punto $f(a, b)$ en P_2 y P_3 es el vértice de un ángulo cuya medida es $\dfrac{\pi}{3}$. Ahora, recordemos que en cada paralelogramo P_i con $i \in \{1, \ldots, 4\}$ trazamos solamente un segmento de línea recta con extremos el vértice de los dos ángulos cuya medida es $\dfrac{2\pi}{3}$ (véase Figura **7**-b), entonces el punto $f(a, b)$ es vértice de seis triángulos equiláteros pertenecientes a la teselación $P_\triangle$.

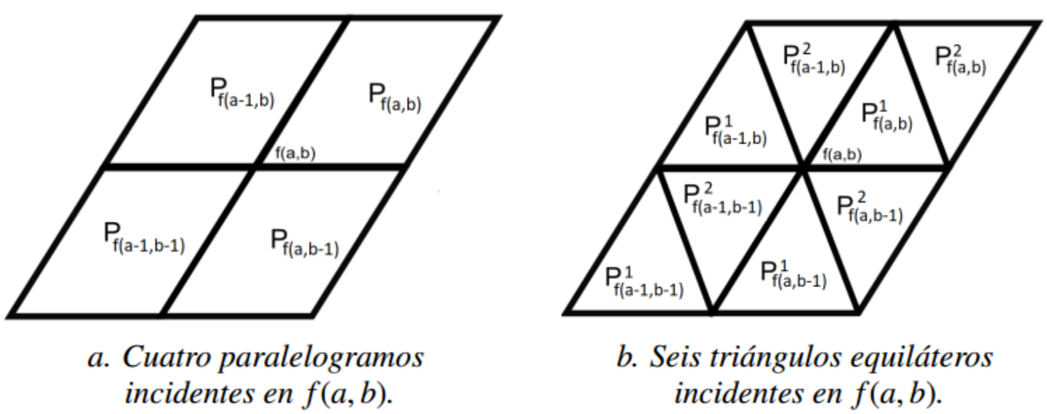


Figura 7: *Paralelogramos y triángulos equiláteros.*

Dado que la teselación $P_\triangle$ definida en la ecuación 13 satisface las cuatro condiciones de la definición **2**, entonces podemos concluir que $P_\triangle$ es una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano mediante triángulos equiláteros.

4. Construcción de una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano mediante hexágonos regulares

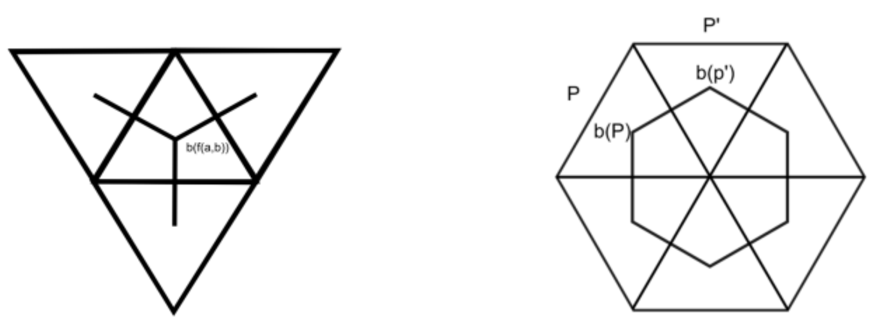
En cada triángulo equilátero P de la teselación $P_{\triangle}$ (véase ecuación **13**) consideramos su respectivo baricentro

$$b(P) := \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}(X_k, Y_k) \tag{1}$$

siendo (x_k, y_k) con $k \in \{0, 1, 2\}$ los vértices del triángulo equilátero P. Denotaremos mediante $B := \{b(P) : P \in P_{\triangle}\}$ al conjunto formado por los baricentros de los triángulos $P \in P_{\triangle}$. Luego, trazamos el segmento de recta $\gamma(P, P')$ con extremos los baricentros $b(P)$ y $b(P')$ si y solo si los triángulos equiláteros P y P' tienen una arista en común, para cada $P, P' \in P_{\triangle}$. Véase Figura **8**-a. Denotaremos mediante G al conjunto formado por los segmentos de recta $\gamma(P, P')$.

Observación 2. *Cada segmento de recta $\gamma(P, P') \in G$ tiene longitud uno. Además, cada baricentro $b(P) \in B$ es extremo de exactamente tres segmentos de línea recta pertenecientes a G (véase Figura **8**-a). La intersección de dos elementos diferentes $\gamma; \hat{\gamma} \in G$ es vacía o un baricentro.*

Ahora, consideramos la unión $B \cup G$, el cual es un subconjunto conexo y cerrado del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^2$. Finalmente, denotamos mediante P_* al conjunto formado por la cerradura de cada componente



a. Tres segmentos de recta que tiene como extremo el punto $b(f(a,b))$. *b. Segmento de recta $\gamma(P,P')$ con extremos los baricentros $b(P)$ y $b(P')$.*

Figura 8: *Elementos que conforman los conjuntos B y G.*

conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus (B \cup G)$ i.e.,

$$P_* := \{\overline{C} : C \text{ es una componente conexa de } \mathbb{R}^2 \setminus (B \cup G)\}. \tag{2}$$

Probaremos que el conjunto P_* es una teselación regular-isométrica del plano Euclidiano mediante hexágonos regulares.

Por construcción, P_* es una teselación del plano Euclidiano y además, se satisface la condición (3) de la definición **2**. Entonces solo es necesario probar que P satisface las condiciones (1), (2) y (4) de la defininción **2**.

Veamos que se verifica la condición (1). Recordemos que en el punto coordenado $f(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es vértice de los seis triángulos equiláteros $P_{f(a+1,b)}$, $P_{f(a-1,b)}$, $P_{f(a,b+1)}$, $P_{f(a-1,b+1)}$,

$P_{f(a+1,b+1)}$ y $P_{f(a+1,b-1)}$ de $P_{\vartriangle}$, para cada $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. El punto $f(a,b)$ equidista a los baricentros $b(P_{f(a+1,b)})$, $b(P_{f(a-1,b)})$, $b(P_{f(a,b+1)})$, $b(P_{f(a-1,b+1)})$, $b(P_{f(a+1,b+1)})$ y $b(P_{f(a+1,b-1)})$ de los seis triángulos equiláteros, anteriormente mencionados, entonces existen exactamente seis segmentos de líneas rectas $\gamma_1, \ldots, \gamma_6 \in G$ y una componente conexa $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus (B \cup G)$ tal que:

(1) El punto $f(a,b)$ está en el interior de C.

(2) La frontera de C está compuesta por los segmentos de línea recta $\gamma_1, \ldots, \gamma_6$ (véase Figura **8**-b).

(3) La cerradura $\overline{C}$ es un hexágono regular de lado uno.

Por otro lado, como la intersección $G \cap \{f(a,b) : (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} = \emptyset$; es claro que si consideramos la componente conexa $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus (B \cup G)$ existe un único elemento $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tal que el punto coordenado $f(a,b)$ está en el interior de C. Debido a esta relación biunívoca a la única componente conexa $C \subset \mathbb{R}^2 \setminus (B \cup G)$ que contienen al punto $f(a,b)$ la podemos denotar mediante $C_{f(a,b)}$, entonces la teselación P_* se reescribe como

$$P_* := \{\overline{C}_{f(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}.$$

Estos hechos muestran que los elementos de P_* son hexágonos regulares y, por tanto, se verifica (1). En efecto, se cumple (2) i.e., los elementos de P_* son isométricos, pues si consideramos los hexágonos $\overline{C}_{f(a,b)}, \overline{C}_{f(c,d)} \in P^*_{\vartriangle}$ estos difieren por una translación, en otras palabras, la translación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$(x,y) \mapsto (x,y) + f(c,d) - f(a,b),$$

envía el hexágono regular $\overline{C}_{f(a,b)}$ sobre el hexágono regular $\overline{C}_{f(c,d)}$.
Finalmente, probaremos que se satisface la propiedad (4). El conjunto B está formado por todos los vértices de los hexágonos que conforman al conjunto P_*, entonces el punto coordenado $b(f(a,b))$ para algún $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es el baricentro de un triángulo equilátero $P \in P_{\vartriangle}$ y de la observación **2** es inmediato que existen exactamente tres segmentos de línea recta pertenecientes al conjunto G que tienen como extremo al punto $b(f(a,b))$, ello implica que $b(f(a,b))$ es un vértice de exactamente tres hexágonos de P_*, es decir, en cada vértice de cada hexágono de P_* inciden exactamente 3 hexágonos de P_*. De este modo, concluimos que el conjunto P_* es una teselación regular-isométrica en el plano Euclidiano mediante hexágonos regulares. $\square$

Referencias

[1] Arredondo J., Ramírez C., Valdez F. On the topology of infinite regular and chiral maps.*Discrete Math.* 2017; 340(6), 1180–1186. 17

[2] Boyer C. A history of mathematics. Second edition. Edited and with a preface by Uta C. Merzbach. John Wiley Sons, Inc., New York.1989. 16

[3] Coulbois T., Pellicer D., Raggi M., Ramírez C., Valdez F. The topology of the minimal regular covers of the Archimedean tessellations. *Adv. Geom.* 2015; 15(1), 77–91. 17

[4] Conder M., Dobcsányi P. Determination of all regular maps of small genus. *J. Combin. Theory Ser.* B. 2001; 81(2), 224–242. 17

[5] Coxeter H., Moser, W. Generators and relations for discrete groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]. 14. Fourth edition. Springer-Verlag, Berlin-New York. 1980. 17

[6] Darst R., Palagallo J., Price T. Fractal tilings in the plane. *Math*. Mag. 1998; 71(1), 12–23. 17

[7] Hubard I., Orbanic A., Pellicer D., Weiss A. Symmetries of equivelar 4-toroids. *Discrete Comput. Geom*. 2012; 48(4), 1110–1136. 17

[8] Grünbaum, B., Shephard, G. Tilings and patterns. W. H. Freeman and Company, New York. 1987. 18

[9] McMullen P., Schulte E. Abstract regular polytopes. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. 92. Cambridge University Press, Cambridge. 2002. 16, 17

[10] Schulte E., Weiss A. Chirality and projective linear groups. *Discrete Math*. 1994; 131(1-3), 221–261. 17