

## Simulación Monte Carlo para evaluar diseños de planes de prueba de vida acelerada

Rey David Molina Arredondo<sup>1</sup>, Zaira Y. Castillo Morán<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

### Resumen

Las pruebas de vida acelerada proveen información sobre la “vida” de componentes de manera rápida, esto se logra al correr las pruebas de vida en niveles de esfuerzo más elevados que las condiciones de uso. Las características de vida en el esfuerzo de diseño pueden ser estimadas a través de extrapolación. Para llevar a cabo eficientemente una prueba de vida acelerada algunas variables de decisión como la proporción de unidades a colocar en cada nivel de esfuerzo y la selección de los niveles de esfuerzo deberán ser elegidas cuidadosamente en la etapa de diseño ya que estas variables afectan el costo de la prueba y la precisión en la estimación de los parámetros de interés. En este trabajo se realiza una aplicación en un artículo de la industria automotriz del cual se ha diseñado un plan de prueba que minimiza la varianza asintótica y se validan sus propiedades utilizando simulación Monte Carlo. Los resultados muestran que el plan de prueba comprometido seleccionado tiene buenas propiedades estadísticas y que es adecuado para ser aplicado al sensor de nivel sellado.

**Palabras clave:** Pruebas de vida acelerada, varianza aproximada del percentil, simulación Monte Carlo, distribución log normal.

### Introducción

Las pruebas de vida acelerada (ALT's, Accelerated Life Test) son ampliamente usadas en la industria para reducir los tiempos de prueba y obtener datos de vida de una manera más rápida. En las ALT's los datos de vida son obtenidos bajo condiciones de esfuerzo más severas y los resultados son extrapolados a condiciones normales de uso utilizando un modelo de relación vida-esfuerzo. De esta manera se obtiene una estimación de las características de vida en condiciones normales de uso, para mayor información ver (W. Q. Meeker

& Escobar, 1998), (Bagdonavicius & Nikulin, 2001) y (W. B. Nelson, 2004). Los parámetros de la relación vida-esfuerzo son estimados con gran incertidumbre por lo que se debe poner especial atención en el diseño de la prueba. Para llevar a cabo una ALT de manera eficiente se deben elegir adecuadamente algunas variables como la proporción de unidades a asignar en cada nivel de esfuerzo, el tiempo de censura y los niveles de esfuerzo a aplicar. Estas variables de decisión no solo afectan el costo de la prueba, sino también la precisión en la

estimación de los parámetros de interés, de aquí la razón por la que el diseño del plan de prueba ha recibido mucha atención por parte de los investigadores.

Muchos de los trabajos realizados en el diseño del plan de prueba se han enfocado en la elección de los niveles de esfuerzo y la fracción de unidades a localizar en cada uno de ellos para minimizar la varianza asintótica del estimador de máxima verosimilitud del percentil de interés. Algunos ejemplos se pueden ver en (Chernoff, 1962), (W. Nelson & Kielpinski, 1976), (W. Nelson & Meeker, 1978), (William Q Meeker & Hahn, 1985), (G. B. Yang, 1994) y (L. C. Tang, Tan, & Ong, 2002). Autores como (G. Yang & Jin, 1994) proponen planes compromisos para diferentes tiempos de censura, otros autores han considerado planes de prueba bajo alguna restricción de costo implícita a través de uso de diferentes tiempos de censura en diferentes niveles de esfuerzos (L.-C. Tang & Xu, 2005) y (Han, 2015), un enfoque con restricción en del tiempo esperado de prueba está dado por (Bai, Chun, & Kim, 1995) y planes de prueba para predecir costos de

garantía pueden encontrarse en (G. Yang, 2010). Cuando los tamaños de muestra son pequeños (Ma & Meeker, 2010) presentan un enfoque del uso de simulación Monte Carlo para evaluar planes de pruebas. (Müller & Parmigiani, 1995) presentan un enfoque vía un ajuste de curva para hacer más eficiente la elección de diseño óptimo, y (Erkanli & Soyer, 2000) y (Wang, Zhang, & Chen, 2007) también usan para elegir el diseño óptimo. Para diseños con tamaño de muestras pequeñas la varianza asintótica puede no ser la más adecuada para evaluar planes de prueba, en estos casos el uso de simulación para evaluar los diseños de planes de prueba sería más adecuada. (Ma & Meeker, 2010) presentan un enfoque donde usan simulación para diseñar planes de prueba para muestras pequeñas.

El presente trabajo presenta un enfoque para diseñar planes de prueba usando simulación Monte Carlo, el método de superficie de respuesta es usado para encontrar las variables de decisión que minimizan la varianza del percentil 10 estimada por simulación, un ejemplo tomado de la industria maquiladora es presentado.

## El Modelo

El propósito de este artículo es mostrar un enfoque para diseñar un ALT óptimo, para muestras pequeñas, basado en simulación. A continuación se muestran los supuestos del modelo.

### Supuestos del modelo

1. El logaritmo de los tiempos de falla tienen una función de densidad acumulada de acuerdo a una distribución

de escala y localización como se muestra en la ecuación 1.

$$F(Y) = \Phi \left\{ \frac{y - \mu}{\sigma} \right\} \quad (1)$$

2. El parámetro  $\mu$  en la ecuación (1) puede ser expresado en función del nivel de esfuerzo de acuerdo al modelo lineal de la ecuación (2).

$$\mu(x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (2)$$

Donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son parámetros de la relación vida esfuerzo a ser estimados con datos de la ALT y  $x$  es el nivel del esfuerzo transformado, para la relación vida esfuerzo Arrhenius  $x = 11605/(273.15 + T)$ . Alternativamente el modelo en (2) puede ser escrito de acuerdo a la ecuación 3, donde  $\xi_i = (x_i - x_u)/(x_H - x_u)$  es un esfuerzo estandarizado, con  $\xi_U = 0$  en la temperatura de uso y  $\xi_H = 1$  en el nivel alto de temperatura, de esta manera  $0 \leq \xi \leq 1$ .

$$\mu(\xi_i) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_i \quad (3)$$

3. El parámetros  $\sigma$  es una constante, lo que indica que el mecanismo de falla es el mismo en todos los niveles de esfuerzo

### Función objetivo

De acuerdo a los supuestos anteriormente descritos el logaritmo del 100-ésimo cuantil de vida del espécimen a un esfuerzo estandarizado  $\xi$  es:

$$y_p(\xi) = \ln(\tau_p) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi + z_p \hat{\sigma} \quad (4)$$

Donde  $z_p$  depende de la distribución de los tiempos de falla. El objetivo es obtener un estimador preciso de  $y_p$  en el nivel de esfuerzo de uso  $\xi_U = 0$ , esto se logra al elegir adecuadamente los parámetros de diseño de la ALT. En nuestro enfoque, primero simulamos tiempos de falla, estimamos los parámetros de la

relación vida esfuerzo y el cuantil en el esfuerzo de uso, este procedimiento se repite  $M$  veces, la varianza de  $y_p$  es calculada como se muestra en la ecuación 5, el objetivo es encontrar los parámetros de diseño que reduzcan (5).

$$Var(\hat{y}_p) = \frac{\sum_{m=1}^M (\hat{y}_{p_m} - \bar{y}_p)^2}{M} \quad (5)$$

### VARIABLES DE DECISIÓN

El presente trabajo se enfoque en el diseño de un ALT óptimo con esfuerzo constante, las variables de decisión en el de diseño de ALT son:

1. El tamaño de la muestra  $n$
2. Número de niveles de esfuerzo,  $k$  esfuerzos
3. Nivel del esfuerzo acelerado  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$
4. Proporción de la muestra localizada en cada nivel de esfuerzo  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$
5. Tiempo de censura en cada nivel de esfuerzo  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$

Un diseño específico puede ser escrito por  $\mathbf{d} = \{n, k, \xi_i, \pi_i, \tau_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ . Las variables de diseño pueden ser simplificadas de acuerdo a la experiencia del ingeniero o a restricciones en la conducción de ALT, de esta manera el diseño puede ser simplificado como  $\mathbf{d} = \{\xi_i, \pi_i, \tau_i, i = 1, 2, \dots, k\}$  o  $\mathbf{d} = \{\pi_i, \tau_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ .

## Enfoque de Simulación para Encontrar el Diseño Óptimo

Antes de iniciar con el diseño de la prueba ALT, se debe seleccionar el máximo nivel del esfuerzo en nivel alto  $x_H$  para la prueba de vida acelerada como la condición de esfuerzo más severa bajo la cual se asume que el modelo lineal se cumple. Además, es posible tener un conocimiento de la probabilidad de falla en el nivel de esfuerzo de uso  $p_u$  y al nivel alto  $p_H$  al tiempo de censura  $\eta$  y de la desviación estándar  $\sigma$ , estos valores pueden obtenerse de conocimiento de los ingenieros o de pruebas previas. Con el valor de  $p_H$ ,  $p_U$  y  $\sigma$  es sencillo calcular  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  al solucionar el sistema de ecuaciones dado por 6 y 7. Estos valores son usados para la generación de tiempos de fallas MC de acuerdo a la ecuación 4.

$$p_H = \Phi\left(\frac{\log(\eta) - \gamma_0 - \gamma_1}{\sigma}\right) \quad (6)$$

$$p_U = \Phi\left(\frac{\log(\eta) - \gamma_0}{\sigma}\right) \quad (7)$$

Con  $\Phi^{-1}(P) = \ln(-\ln(p))$  para la distribución de valores extremos más pequeños.

### El algoritmo de simulación

La figura 1 muestra el diagrama de flujo del algoritmo de simulación para encontrar el diseño óptimo de un ALT.

### Elección del diseño óptimo

Uno de los principales problemas con que se enfrenta el algoritmo de la Figura 1 es el tiempo que consume realizar las  $M$  simulaciones Monte Carlo para cada diseño  $d$ , este problema aumenta cuando se aumenta el número de variables de diseño, una alternativa para reducir el número de puntos es ajustar la respuesta a una curva como lo propone inicialmente (Muller and y Parmigiani, 1995) y (Wang, Shang y Chen, 2007) en nuestro enfoque usamos un diseño para ajustarlo la varianza a una superficie de respuesta, de esta manera, la optimización se realiza del modelo de respuesta ajustado. El uso de puntos centrales en el diseño nos permite una evaluación del error en la estimación de  $var(\hat{y}_p)$ .

## Diseño del plan de prueba

El diseño del plan de prueba se lleva a cabo para un sensor fabricado en la industria maquiladora de Cd. Juárez, el sensor cuenta con un reóstato el cual manda diferentes lecturas de resistencia dependiendo del nivel en que se encuentre el flotador dentro del tanque de combustible, la señal es traducida por una computadora y refleja el contenido

del líquido en el tanque. El sensor puede ser digital o análogo. El esfuerzo con que se acelera la vida del producto es temperatura, con un rango de 23°C a nivel de uso y de 60°C a nivel alto. De pruebas previas realizadas al sensor se sabe que la probabilidad de falla en el nivel de uso es de  $p_U = 0.05$  y en el nivel alto es  $p_H = 0.89$

con una desviación estándar de  $\sigma = 0.7055$ . Los datos parecen ajustarse a una distribución de valores extremos. El interés principal es tener una idea del valor para la

vida mediana, es decir, el cuantil de interés es de 0.50. El tiempo de censura para la prueba es de  $\eta = 2,000,000$  ciclos. Se considera un tamaño de muestra  $n = 64$ .

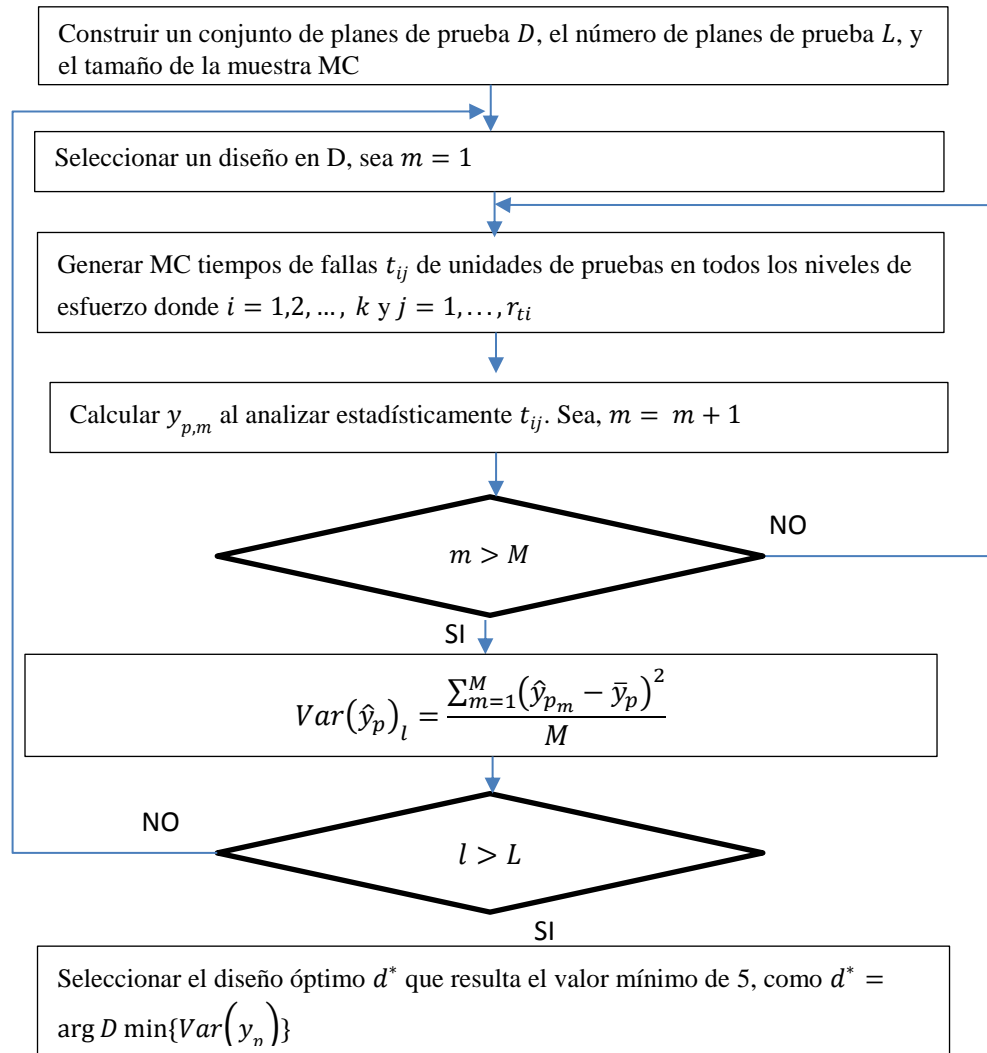


Figura 1. Algoritmo para simular los tiempos de falla, estimar la varianza del percentil y elegir el mejor plan de prueba

Dados los valores de  $p_H$ ,  $p_U$  y  $\sigma$ , de la ecuación 6 y 7 se estiman los valores  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$ . Se ha considerado un plan de prueba compromiso con  $\pi_M = 0.2$ . Con la finalidad de disminuir la probabilidad de obtener cero fallas en el nivel bajo y medio de esfuerzo se

ha considerado como niveles mínimos de esfuerzo y proporción de unidades en los niveles bajos  $\xi_L \geq 0.35$  y  $\pi_L \geq 0.4$ , también se ha considerado el tiempo de censura de 2,000,000 ciclos en los tres niveles de

esfuerzo y una cantidad de  $M = 10,000$  simulaciones en cada punto.

El primer diseño a evaluar es  $\mathbf{d} = \{\xi_L = 0.43, \pi_L = 0.45 \text{ y } \tau = 2,000,000\}$ , la Figura 2 muestra las líneas de la relación vida esfuerzo para  $M = 100$  simulaciones, la varianza es calculada en el nivel de esfuerzo de uso es 0.5287, el punto

es tomado como un punto medio del diseño de experimentos mostrado en la tabla 1. Aquí el nivel bajo y alto para  $\xi_L$  es 0.38 y 0.48 respectivamente, mientras que los niveles bajo y alto para  $\pi_L$  son 0.4 y 0.5. Se realizan  $M = 10000$  simulaciones Montecarlo para cada punto, la varianza estimada es presentada en la última columna de la Tabla 1.

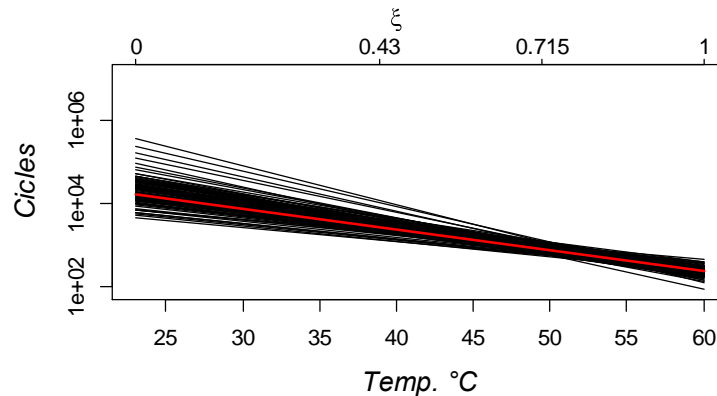


Figura 2. Simulación de 100 líneas para la relación vida

Esfuerzo con  $\xi_L = 0.43, \pi_L = 0.45$

Tabla 1. Diseño  $2^2$  y valores de  $Var(y_p)$

Variables	Diseño	$Var(y_p)$
$\xi_L = 0.38, \pi_L = 0.4$	-1, -1	0.824514
$\xi_L = 0.48, \pi_L = 0.4$	1, -1	0.523399
$\xi_L = 0.38, \pi_L = 0.5$	-1, 1	0.615457
$\xi_L = 0.48, \pi_L = 0.5$	1, 1	0.479761
$\xi_L = 0.43, \pi_L = 0.45$	0, 0	0.519927
$\xi_L = 0.43, \pi_L = 0.45$	0, 0	0.528765
$\xi_L = 0.43, \pi_L = 0.45$	0, 0	0.528229

Al analizar los datos que arroja la simulación de la Tabla 1 se tiene el modelo de respuesta para  $Var(\hat{y}_p)$  que es presentado en la ecuación 8, dado que el objetivo es minimizar, para encontrar el punto mínimo se realizan corridas secuenciales con un incremento en  $\pi_L$  de 0.578 por cada 0.1 de

incremento en  $\xi_L$ . Utilizando en método de descenso acelerado se corre la simulación de los siguientes diseños  $\mathbf{d}$ , hasta llegar a la región donde se encuentra el óptimo.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\widehat{y}_p) = & 0.61078 - 0.10920\xi_L \\ & - 0.06317\pi_L \\ & + 0.04135\xi_L\pi_L \end{aligned} \quad (8)$$

Las Figura 3 y Figura 4 muestran la gráfica de superficie de respuesta y la gráfica de contornos para  $\text{Var}(\widehat{y}_p)$ . El ajuste

es obtenido con un diseño cuadrático en la región  $0.48 < \xi_L < 0.58$  y  $0.47 < \pi_L < 0.57$ , en ellas se puede observar que el punto mínimo se localiza en  $\xi_L = 0.53$  y  $\pi_M = 0.52$ , en este punto se espera una  $\text{Var}(\widehat{y}_p) = 0.43$ , el diseño de plan de prueba queda resumido en la Tabla 2.

Tabla 2. Diseño del plan de prueba para el ejemplo de prueba con  $\pi_M = 0.2$

Temperatura °C	Esfuerzo Estandarizado	Proporción de Unidades	Unidades de Prueba	Probabilidad de falla	Número esperado de unidades fallando
23	0	-	-	0.005	-
28	0.53	0.52	50		13
43	0.765	0.2	19		15
60	1	0.28	27		23

Una corrida de confirmación fue realizada con los valores  $\xi_L = 0.53$  y  $\pi_M = 0.52$  donde se obtuvo una  $\text{Var}(\widehat{y}_p) = 0.4324$ . La Figura 5 muestra las primeras 100 líneas simuladas de la relación vida esfuerzo y la Figura 6 muestra los gráficos de cajas para las fallas observadas en los

10,000 tiempos de falla MC, en cada nivel de esfuerzo. Es posible notar que en los niveles de esfuerzo bajo y medio la distribución de fallas es parecido y la probabilidad de obtener cero falla en cada uno de estos niveles es muy pequeña (0.002 en el nivel bajo  $\xi_L$ ).

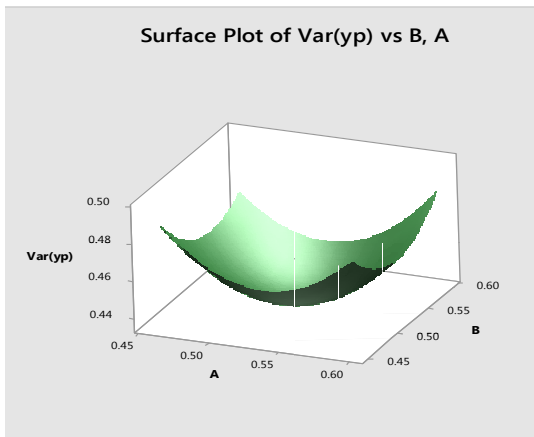


Figura 3. Superficie de respuesta para  $\text{Var}(\widehat{y}_p)$  donde A es  $\xi_L$  y B es  $\pi_M$

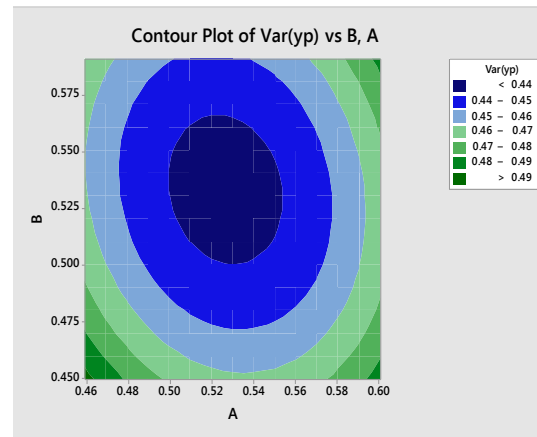


Figura 4. Superficie de respuesta para  $\text{Var}(\widehat{y}_p)$ , donde A es  $\xi_L$  y B es  $\pi_M$

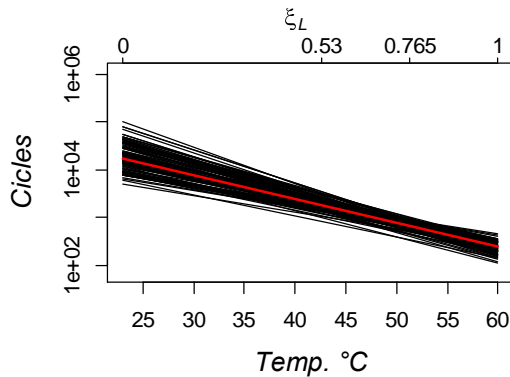


Figura 5. Simulación de 100 líneas para la relación vida esfuerzo con  $\xi_L = 0.53$  y  $\pi_M = 0.52$

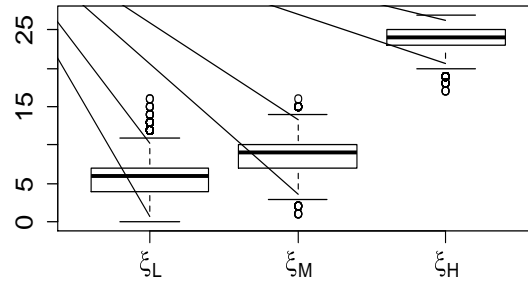


Figura 6. Boxplot para las fallas observadas en

## Conclusiones

La correcta elección del diseño empleado para conducir un ALT aumenta la certeza en la estimación del cuantil de interés. Nosotros utilizamos un enfoque basado en simulación para la elección del nivel de esfuerzo bajo y el número de especímenes a localizar en cada nivel de esfuerzo con la restricción en el número de unidades a probar (96 unidades), por lo que se decide utilizar la simulación en vez de la

varianza asintótica. Los resultados son mostrados en la Tabla 2, la varianza del logaritmo del percentil 10 óptimo fue de 0.4324 logrando una reducción del valor obtenido en el punto medio 0.5287 (ver Tabla 1). El número de puntos a evaluar en la optimización es reducido al usar un ajuste de una curva reduciendo, de esta manera, el tiempo total de simulación.

## Referencias

Bagdonavicius, V., & Nikulin, M. (2001). *Accelerated life models: modeling and statistical analysis*: CRC Press.

Bai, D. S., Chun, Y. R., & Kim, J. G. (1995). Failure-censored accelerated life test sampling plans for Weibull distribution under expected test time constraint. *Reliability Engineering & System Safety*. doi: 10.1016/0951-8320(95)00067-C

Chernoff, H. (1962). Optimal accelerated life designs for estimation. *Technometrics*. doi: 10.1080/00401706.1962.10490020

Erkanli, A., & Soyer, R. (2000). Simulation-based designs for accelerated life tests. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 90(2), 335-348. doi: 10.1016/S0378-3758(00)00126-9

Han, D. (2015). Time and cost constrained optimal designs of constant-stress and step-stress accelerated life tests. *Reliability Engineering & System Safety*, 140, 1-14.

Ma, H., & Meeker, W. Q. (2010). Strategy for planning accelerated life tests with small sample sizes. *Reliability*. doi: 10.1109/TR.2010.2083251



Meeker, W. Q., & Escobar, L. A. (1998). *Statistical methods for reliability data*.

Meeker, W. Q., & Hahn, G. J. (1985). *How to plan an accelerated life test: Some practical guidelines*: ASQC Statistics Division.

Müller, P., & Parmigiani, G. (1995). Optimal Design via Curve Fitting of Monte Carlo Experiments. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432), 1322-1330. doi: 10.2307/2291522

Nelson, W., & Kielpinski, T. J. (1976). Theory for optimum censored accelerated life tests for normal and lognormal life distributions. *Technometrics*. doi: 10.1080/00401706.1976.10489407

Nelson, W., & Meeker, W. Q. (1978). Theory for optimum accelerated censored life tests for Weibull and extreme value distributions. *Technometrics*. doi: 10.1080/00401706.1978.10489643

Nelson, W. B. (2004). *Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analysis*.

Tang, L.-C., & Xu, K. (2005). A multiple objective framework for planning accelerated life tests. *Reliability, IEEE Transactions on*, 54(1), 58-63. doi: 10.1109/TR.2004.841731

Tang, L. C., Tan, A. P., & Ong, S. H. (2002). Planning accelerated life tests with three constant stress levels. *Computers & industrial engineering*. doi: 10.1016/S0360-8352(02)00040-2

Wang, Y., Zhang, C., & Chen, X. (2007). Simulation-based optimal design for accelerated life testing. *European Safety & Reliability ...*

Yang, G. (2010). Accelerated life test plans for predicting warranty cost. *Reliability, IEEE Transactions on*, 59(4), 628-634. doi: 10.1109/TR.2010.2085550

Yang, G., & Jin, L. (1994). Best compromise test plans for weibull distributions with different censoring times. *Quality and Reliability Engineering International*, 10(5), 411-415. doi: 10.1002/qre.4680100507

Yang, G. B. (1994). Optimum constant-stress accelerated life-test plans. *Reliability*. doi: 10.1109/24.370223