

Concepciones de los futuros docentes sobre la aleatoriedad.

Un estudio en el profesorado de matemática

Federico De Olivera¹, Luciana Olesker², Daniela Pagés³

RESUMEN

En este artículo presentamos una investigación en curso sobre las concepciones que tienen los estudiantes de profesorado de matemática acerca de la aleatoriedad. Reportamos un estudio bibliográfico sobre la problemática que nos ocupa, así como el análisis de un cuestionario realizado a estudiantes de Didáctica III del profesorado de matemática del país. Este cuestionario indaga las distintas concepciones presentes en los futuros profesores, en especial el significado subjetivo de la aleatoriedad.

PALABRAS CLAVE: aleatoriedad, probabilidad subjetiva, formación de profesores de matemática

ABSTRACT

We present an ongoing research about prospective mathematics teachers' conceptions of randomness. We report some research results focused in this topic, as well as the analysis of a questionnaire we applied to prospective mathematics teachers studying Didáctica III in their teacher education. This questionnaire inquires the different conceptions those students have, specially the subjective meaning of randomness.

KEYWORDS: randomness, subjective probability, mathematics teacher education

INTRODUCCIÓN

Presentamos una investigación en curso sobre las concepciones de la aleatoriedad que tienen los estudiantes de profesorado de matemática. La misma ha sido motivada por las dificultades que se detectan en relación a este concepto, en los cursos de Probabilidad y Estadística del profesorado de matemática. Se realizó un estudio de investigaciones que reportan estas problemáticas, así como las distintas concepciones de aleatoriedad, desde el punto de vista histórico, que acompañan los diferentes enfoques de la probabilidad. Como primera fase de esta investigación se elaboró un cuestionario que fue propuesto a los estudiantes de Didáctica III de todo el país, para ser completado en línea. En este documento presentamos un análisis preliminar de las respuestas obtenidas, así como futuras líneas de trabajo.

SIGNIFICADOS DE LA ALEATORIEDAD

En este apartado analizamos distintas acepciones y significados del concepto de *aleatoriedad*, a través de la revisión de algunos documentos.

En Batanero (2001) encontramos la siguiente definición de *aleatorio*, del diccionario de Moliner (1983): “Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar”. Y para *azar*: “la

¹ Doctor en Matemática (PEDECIBA-UDELAR). Consejo de Formación en Educación.

² Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática (UNCOMA). Consejo de Formación en Educación.

³ Magíster en Matemática Educativa (CICATA-IPN). Consejo de Formación en Educación.

supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina”.

Estas definiciones plantean que lo *aleatorio* tiene causas desconocidas, y el *azar* representaría esas causas (Batanero, 2001). Esta interpretación corresponde a la primera fase histórica del desarrollo de la probabilidad, que finaliza a inicios de la Edad Media. Se establecía una diferencia entre los fenómenos que obedecían a leyes conocidas y aquellos que no (*aleatorios*), y la propiedad de aleatorio de un fenómeno era objetiva (Poincaré, 1936, citado en Batanero, 2001).

Otro posible significado es el de establecer que todo fenómeno tiene una causa, y que el *azar* se debe a nuestra ignorancia, siendo esta una interpretación subjetiva, ya que la propiedad de ser aleatorio depende de nuestro conocimiento. Esta interpretación, sin embargo, no es correcta, ya que existen fenómenos deterministas con causas desconocidas (por ejemplo, la muerte).

Actualmente se consideran aleatorios aquellos fenómenos a los que se les puede aplicar el cálculo de probabilidades (Batanero, 2001), conozcamos o no sus reglas.

Si seguimos el desarrollo histórico del cálculo de probabilidades para rastrear el concepto de aleatoriedad ligado a este, encontramos distintos enfoques. Inicialmente la aleatoriedad se asociaba con la equiprobabilidad de los distintos resultados de un fenómeno (Liber de Ludo Aleae, de Cardano). En esta etapa la probabilidad se vinculaba fundamentalmente con los juegos de azar. Así, en una concepción *clásica*, la probabilidad de un suceso es el “cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles, siempre que todos sean equiprobables”. (Batanero, 2001, p. 13). Esta idea tiene el problema de una cierta circularidad, que hace difícil discriminar un miembro aleatorio de uno no aleatorio, de una clase dada de sucesos. Además, solo podríamos decir si un suceso es aleatorio, si estamos ante una clase finita. También quedan fuera de este significado los fenómenos cuyos resultados no son equiprobables. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se consideran situaciones del mundo físico o natural (fenómenos meteorológicos, accidentes, resultados electorales, etcétera).

Surge entonces la concepción *frecuencial*, por la cual un objeto es considerado un miembro aleatorio de una clase si podemos elegirlo por un método que asigne a cada miembro de esa clase, una frecuencia relativa *a priori*, luego de un *gran* número de casos. Aquí la dificultad radica en determinar cuántos casos son necesarios, para asignar a un fenómeno la propiedad de aleatorio. Además, se obtiene una estimación de la probabilidad.

Kyburg (1974, citado en Batanero, 2001) critica estas dos concepciones, y plantea que la aleatoriedad está compuesta de cuatro elementos: el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase; el conjunto del que el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo); la propiedad con respecto a la que el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada; el conocimiento de la persona que decide si el objeto es aleatorio, o que asigna una probabilidad (Batanero, 2001).

Bajo esta concepción, la aleatoriedad ya no es una propiedad objetiva, sino que lo que es aleatorio para alguien puede no serlo para otras personas. Como ejemplifica Esteban (2015): “... al

lanzar un dado, si una persona ve el resultado, este resultado ya no es aleatorio para ella, pero sí es aleatorio para otra persona que no lo ha visto” (p. 15). Esta es una concepción *subjetiva* de la probabilidad, que desarrollamos más adelante. Finalmente tenemos la formalización del concepto de aleatoriedad. Esta surge a partir del estudio de las tablas de números aleatorios, y la preocupación por la calidad de estas.

Todo lo anterior nos muestra la diversidad de significados del concepto de aleatoriedad. Esta diversidad se refleja también en las concepciones que presentan los estudiantes cuando se enfrentan a la resolución de problemas o cuestiones vinculadas con lo aleatorio. Dado el énfasis que tiene este trabajo en relación con la formación de profesores, y la dependencia entre las concepciones de los futuros docentes y aquellas que pueden promover o dejar de lado en sus clases, creemos que no es conveniente dar una definición del concepto de aleatoriedad, sino que, al contrario, es esencial ser conscientes de los distintos significados que pueden presentarse. De todos modos nos focalizaremos, en lo que sigue, en el desarrollo de la concepción subjetiva de la probabilidad, partiendo de la hipótesis de que es el que está presente en menor grado en los futuros profesores de matemática.

ENFOQUE SUBJETIVO DE LA PROBABILIDAD

Desde este enfoque, la decisión sobre si consideramos que un objeto es o no aleatorio, depende, como dijimos antes, de nuestro conocimiento sobre el mismo. Vinculado a esta concepción de la aleatoriedad, aparece la de probabilidad subjetiva.

Desde la interpretación subjetiva o personal, la probabilidad que una persona asigna a uno de los posibles resultados depende de su propio juicio sobre la probabilidad de que se obtenga el resultado. Este juicio estará basado en las opiniones e información que tenga acerca del proceso. Cuando una persona asigna probabilidades subjetivas a los resultados de un fenómeno, está expresando su grado de creencia en términos numéricos. Así es que Keynes (1921), Ramsey (1931) y De Finetti (1974), citados en Batanero y Díaz (2007), describen la probabilidad como grado de creencia personal basado en el conocimiento y experiencia personal.

A pesar de las críticas recibidas sobre su estatus científico, el análisis de las creencias y la valoración de sus grados, este enfoque suscitó mucho interés al inicio del siglo XX. El primer trabajo sobre probabilidad subjetiva fue realizado por Borel (1924), en este aparece una definición bastante concreta de lo que es la probabilidad subjetiva, y además está el germen del método para medir grados de creencia, el llamado *método de la apuesta*. Un elemento a destacar es que, desde la interpretación subjetiva de la probabilidad, se imponen ciertas restricciones a la formulación de creencias, estas deben estar dotadas de una racionalidad. Para ser aptas para definir probabilidades, las creencias subjetivas deben tener dos cualidades fundamentales: *consistencia* y *coherencia*. La primera tiene que ver con la no contradicción de la lógica deductiva. Mientras que la segunda viene asociada a que la

persona no quedará perjudicada cualquiera sea el resultado del suceso. La coherencia llevaría a la persona a *no apostar en su contra*.

Es la regla de Bayes la que ha proporcionado una doctrina que permite la interpretación de las creencias, asignándoles una medida precisa. Esta permitió que la interpretación subjetiva de la probabilidad cambiara de naturaleza y status. Este razonamiento está basado en el conocimiento de la verosimilitud $P(E/H)$, donde E es la evidencia que me suministran los datos, cuando se supone cierta la hipótesis H. La decisión se apoya en la distribución *a posteriori*.

PERTINENCIA DEL ENFOQUE SUBJETIVO EN LA ENSEÑANZA

Hace varias décadas en los curriculum de matemática en enseñanza media se plantea la importancia de brindar a nuestros estudiantes una buena educación estocástica. Acordamos con este planteo, cuyos fundamentos encontramos, por ejemplo, en Chernoff y Sriraman (2014):

Las ideas equivocadas sobre probabilidad son legión. Después de todo, es una noción diabólicamente compleja y elusiva para nuestra mente. Y al mismo tiempo, como el único medio confiable que tenemos para predecir - y planificar - el futuro, juega un rol fundamental en nuestras vidas, por lo que no podemos ignorarla, y debemos enseñarla a todos los futuros ciudadanos. (p. ix)

Estamos convencidos de que en la actualidad, cuando se plantea la importancia de la probabilidad en los currículos, los significados trabajados no pueden prescindir del aspecto subjetivo que hay en lo que es aleatorio y lo que no.

Por otra parte, la importancia de la probabilidad en la enseñanza media tiene que ver con su pertinencia en la toma de decisiones, y aquí la probabilidad subjetiva tiene muchas respuestas para aportar. Creemos que es más coherente, para abordar muchos de los problemas de la vida cotidiana, hacerlo desde un enfoque subjetivo que desde un enfoque clásico o frecuencial. Pensamos que dar lugar a este enfoque en la enseñanza media, no como único pero sí como importante, hará que los estudiantes tengan un significado más amplio de lo que es la aleatoriedad y amplíen el espectro de problemas que pueden resolver.

De lo anterior se desprende la importancia de trabajar en formación docente con la diversidad de significados de la aleatoriedad, dando lugar al enfoque subjetivo, y trabajar problemas en los que se aplique directamente la definición subjetiva.

LA EXPERIMENTACIÓN

Nuestro grupo de trabajo se planteó el objetivo de realizar una investigación sobre la noción de aleatoriedad de los estudiantes de profesorado de matemática, indagando sobre la presencia del componente subjetivo en las respuestas de los estudiantes. Para comenzar, nos propusimos una fase inicial de carácter exploratorio, con el objetivo de tener una primera aproximación a los significados

de aleatoriedad presentes en los estudiantes y, por otro lado, con el fin de diseñar una herramienta metodológica para una futura investigación, apta para el contexto de nuestro estudio.

En la primera fase de este estudio se solicitó a todos los estudiantes de Didáctica III del profesorado de matemática que dedicaran un tiempo para completar un formulario. El mismo fue diseñado con cinco secciones de preguntas (ver en <https://sites.google.com/view/grupopye/trabajos>). En agosto de 2017, se encontraban cursando Didáctica III, 104 estudiantes en todos los centros y en las dos modalidades (presencial y semipresencial), de los cuales completaron el cuestionario 38. Y en base a estas respuestas se hizo un análisis descriptivo.

Elegimos a los estudiantes de Didáctica III porque consideramos que ellos forman una muestra razonable de estudiantes avanzados. Somos conscientes que muchos de ellos podrán aún no haber cursado o aprobado asignaturas de tercer año, incluso Probabilidad y Estadística.

La primera sección del formulario corresponde a datos de seguimiento, como la institución en la que estudian, y si han cursado y/o aprobado la asignatura Probabilidad y Estadística.

En la segunda sección se plantean una serie de preguntas que suelen encontrarse en investigaciones de este tipo (por ejemplo, Azcárate, Cardeñoso y Porlán, 1998; Moreno, Cardeñoso y González, 2014). Aquí se busca obtener de forma casi explícita la concepción de aleatoriedad presente en los estudiantes y, de ser posible, analizar si conviven más de una.

La tercera sección cuenta con una única pregunta en la que se plantea una situación usual vinculada a apuestas en el deporte.

En la cuarta sección planteamos una serie de preguntas con respuesta de múltiple opción para que los estudiantes manifiesten la probabilidad que le asignan a los resultados de diferentes experimentos. Estos están asociados a tirar una moneda pero en distintas situaciones que buscan dejar en evidencia la noción evocada de aleatoriedad, ahora sin llamarla de tal forma, sino por medio de asignación de probabilidades.

Por último, en la quinta sección buscamos directamente enfrenar al estudiante a una situación de apuestas. Aquí queremos indagar si la definición subjetiva de probabilidad dada por Borel (1924), se encuentra presente al momento de tener que decidir el valor a apostar en distintas situaciones. Nuevamente las distintas preguntas recorren situaciones asociadas a una noción objetiva y/o subjetiva.

EL ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

De los 38 estudiantes que respondieron la encuesta, 24 declararon haber cursado Probabilidad y Estadística, 2 se encontraban cursando y los restantes 12 aún no la habían cursado. Habían aprobado la asignatura 13 estudiantes.

Iniciamos la segunda sección con una pregunta de calibración: *2. a. Se lanza una moneda al aire y se observa la cara superior al caer.*

Luego del análisis de las respuestas obtenemos que dos estudiantes afirman de forma sostenida que no se trata de un experimento aleatorio. Otro estudiante plantea la no aleatoriedad, pero pensamos que en este caso fue producto de interpretar *observa* como algo pasado y por ende no lo considera aleatorio: “*No ya veo el resultado. No es aleatorio. Otra cosa a priori*”.

En relación a la pregunta: 2. b. *Se dobla una moneda un poco, se lanza al aire y se observa la cara superior al caer*, el 50% de los encuestados afirma que no es aleatorio. Entendemos que en las respuestas de estos estudiantes predomina la concepción clásica de la aleatoriedad. El solo hecho de doblar un poco la moneda, lo que posiblemente altere las probabilidades de obtener cara o cruz, lleva a que 19 de los 38 estudiantes no lo consideren un experimento aleatorio. Esta pregunta nos deja clara evidencia de que es necesario trabajar más profundamente en el concepto de aleatoriedad y sus distintas concepciones.

En la siguiente pregunta: 2.c. *Se germina una semilla de naranjo. El experimento consiste en la obtención, algún día, de naranjas*, casi dos tercios de los encuestados afirman que el fenómeno natural no es aleatorio. Esto se encuentra estrechamente vinculado con la investigación realizada en Moreno, Cardeñoso y González (2014), quienes constataron que a diferencia de los estudiantes de profesorado de biología, a los estudiantes de profesorado en matemática les cuesta significativamente más reconocer la aleatoriedad en situaciones cotidianas, es decir, no vinculadas a los juegos de azar.

En lo que respecta a las preguntas: 2.d. *El experimento es si el primero de enero de 2020 lloverá* y 2.e. *El experimento es si el primero de enero de 1500 llovió*, tratamos de buscar un mismo fenómeno, en este caso asociado a una situación climática, formulado en futuro y en pasado, respectivamente para cada ítem. En el primer caso, cuando se le pregunta por la posibilidad de lluvia en un tiempo futuro la gran mayoría (más del 81%) responde que es aleatorio, no obstante, cuando se les pregunta por un tiempo pasado, por más que no haya información, solo es considerado aleatorio por un poco más del 13% de los estudiantes. Esta diferencia marca una gran tendencia a no reconocer un fenómeno aleatorio en términos de la información que se posea, es decir, un experimento pasado en general no es considerado aleatorio y esto va en directa relación con la falta del concepto subjetivo de aleatoriedad.

En la tercera sección introdujimos una situación de las apuestas deportivas que se suele dar en la vida cotidiana: *Hay varias empresas que hacen apuestas sobre resultados de eventos deportivos. Consideremos dos de ellas: Supermatch y Bet365. Cada empresa paga en función de la probabilidad que le asignan al resultado. En un partido de fútbol entre Nacional y Peñarol, Supermatch pagaba más que Bet365 a que empataban. Explica en tus palabras si esto tiene sentido y de tenerlo a qué se debe*. En este caso, el 84,21% de los encuestados afirmaron que sí tiene sentido. Las argumentaciones a favor muestran un reconocimiento del carácter subjetivo. Veamos algunas de ellas:

- *Sí puede tener sentido. Deberá ser porque evalúan diferentes datos sobre resultados en partidos pasados.*
- *Tiene sentido. Hay una percepción subjetiva de la probabilidad.*

- *La probabilidad es subjetiva en este caso. Se tienen en cuenta diversos factores para asignar una probabilidad a cada resultado. Esos factores pueden variar y por ese motivo asignan distintas probabilidades al mismo suceso.*

Por otro lado, los que responden de forma negativa, muestran en sus justificaciones que solo atribuyen a la probabilidad el significado clásico. Algunos ejemplos de estas respuestas son:

- *El cálculo de probabilidad teórico no debería tener diferencias.*
- *No tiene mucho sentido, a mi parecer la probabilidad de empate es similar a la de victoria o derrota (por no decir igual).*

En esta sección, creemos que la gran mayoría de los estudiantes pudo reconocer el carácter subjetivo del experimento, dado que aceptaron que un mismo fenómeno podría tener distintas probabilidades dependiendo de la entidad que emita el juicio. En conjunto con las respuestas a 2d y 2e, tenemos indicios para creer que la dificultad en reconocer la aleatoriedad subjetiva está más bien vinculada a que los fenómenos ya hayan ocurrido.

En la cuarta sección tratamos de salir del contexto de ver si el fenómeno es aleatorio o no, y preguntamos al estudiante directamente sobre la probabilidad que le asignaría a determinado suceso. El enunciado del problema era el siguiente: *Responde a tu criterio, la probabilidad que le asignarías a los siguientes ítems (opciones: 0, en (0, 1/2), 1/2, en (1/2, 1), 1)*. En esta sección obtuvimos información rica sobre la asignación de probabilidades que hacen los estudiantes participantes.

En la pregunta: *4.a. Obtener cara al tirar una moneda no cargada*, nuevamente como pregunta de prueba, todos los estudiantes salvo uno asignan probabilidad $\frac{1}{2}$ a obtener cara al tirar una moneda no cargada.

En la pregunta: *4.b. Obtener cara en una moneda que se tiró hace una hora pero nadie ha visto el resultado*, la mayoría de los estudiantes (más del 92%) asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ al experimento, por más que haya sucedido hace una hora atrás. Esto contrasta con las respuestas a la pregunta 2.e, en que la información de que el fenómeno ya hubiera ocurrido hacía pensar a muchos estudiantes que el mismo no era aleatorio. Pensamos que estaríamos ante un problema con el uso del término *aleatorio*, más allá del reconocimiento de la aleatoriedad en un experimento.

La pregunta: *4.c. Obtener cara al tirar una moneda no cargada, pero en los primeros 10 lanzamientos se obtuvo cara*, busca explorar el reconocimiento o no de la equiprobabilidad, cuando por caso fortuito se han obtenido una serie de resultados *desfavorables*. La gran mayoría de los encuestados (más del 84%) toma en cuenta que la moneda no está cargada, dato fundamental, y si bien el suceso de que haya salido 10 veces cara es *poco* probable, eso no afecta la probabilidad para la siguiente tirada. No obstante, un estudiante consideró que no corresponde y otros 5 asignaron una probabilidad distinta de $\frac{1}{2}$, interpretamos que por el hecho de tener esa información adicional.

En estos estudiantes parece estar presente el problema que surge por la mala interpretación de la Ley de los Grandes Números. Simplificando podemos decir que la Ley de los Grandes Números establece que la frecuencia relativa de un suceso converge a la probabilidad teórica del mismo. Es

común mal interpretar este resultado cuando se aplica a repeticiones de experimentos, esperando que los próximos experimentos sean *forzados a modificar su resultado* para que se mantenga la frecuencia deseada.

La última pregunta de esta sección: *4.d. Obtener cara al tirar una moneda que no se sabe si está cargada, pero en los primeros 10 lanzamientos se obtuvo cara*, introduce la subjetividad de forma más directa. En este caso no se sabe si la moneda está o no cargada. Un poco más del 31% de los encuestados asigna una probabilidad mayor a $\frac{1}{2}$ y menor a 1. En general, bajo la aplicación de la fórmula de Bayes, cualquier distribución a priori que asignemos a la probabilidad de obtener cara, dentro de lo estándar, nos conduce a que la probabilidad a posteriori esté fuertemente volcada hacia ese intervalo.

Nos llama la atención que casi un cuarto de los estudiantes (23,68%) hayan considerado que no corresponde calcular la probabilidad, estas respuestas ameritan investigar más en este punto pero el diseño de esta primera encuesta no lo permite.

Por otro lado, 11 de los 38 estudiantes (28,95%) no alteró la probabilidad de obtener cara dada la información adicional, a pesar de haber sido declarado de forma explícita que no se sabe si la moneda está o no cargada.

En general, las respuestas a estas preguntas nos hacen pensar que si bien la fórmula de Bayes es trabajada en los cursos de probabilidad, la concepción bayesiana en sí, mediante la adaptación de las probabilidades con la información adicional, parece no haber sido interiorizada significativamente por un conjunto importante de estudiantes.

Luego de analizar las respuestas en esta sección consideramos que para dar continuidad a esta investigación, sería de suma relevancia complementar con estudios de caso, indagando personalmente las opiniones que motivan a dar la respuesta seleccionada.

En la quinta sección, finalmente, trabajamos directamente con el concepto de probabilidad subjetiva, la cual es definida mediante una apuesta de un individuo racional. Se propuso a los estudiantes tres situaciones en las que debían decidir cuánto estaban dispuestos a apostar para, en caso de ganar, obtener un premio de 100 pesos. En este caso el premio es fijo y por ende es razonable, según la propia definición subjetiva de probabilidad, que se estaría dispuesto a apostar un monto directamente proporcional a la probabilidad que se le asigna al suceso.

En todos los ítems que se presentaron, son cerca de la mitad de las respuestas que no se aproximan al valor del premio por la probabilidad, lo cual deja una clara evidencia del no manejo de la definición subjetiva de probabilidad.

Por último, en esta sección preguntamos: *¿Crees que tus compañeros están dispuestos a apostar lo mismo que tú?* De forma resumida, un 28,95% de los estudiantes respondieron que no, un 44,74% respondieron que sí y el 26,32% restante respondió que dependería. La gran mayoría de las respuestas son muy escuetas, no obstante algunas de ellas son justificadas mediante el haber cursado o no Probabilidad y Estadística, y otras haciendo hincapié en la aversión o no al riesgo.

CONCLUSIONES

En muchas de las respuestas de estos estudiantes predomina la concepción clásica de la aleatoriedad, muchas veces cuando el contexto no es adecuado para aplicarlo. Esto no llama la atención debido al carácter prioritario que se le da a este enfoque en la enseñanza.

De este estudio preliminar se concluye que, en general, gran parte de los estudiantes no ven un fenómeno aleatorio vinculado a la información que se posea, lo que muestra una falta del significado subjetivo de la aleatoriedad. Incluso cuando explícitamente se agrega nueva información, esta no es tomada en cuenta para modificar la probabilidad. Esto podría dar cuenta de que no se ha interiorizado significativamente la fórmula de Bayes.

Finalmente queremos destacar que cuando se propuso un problema en el contexto de la probabilidad subjetiva, la gran mayoría de los estudiantes no lograron resolverlo con solvencia. Esto nos lleva a reafirmar la pertinencia del problema de investigación que nos planteamos y a comprometernos con realizar futuras investigaciones que profundicen este estudio. Además, nos planteamos la necesidad de elaborar secuencias de enseñanza para el curso de Probabilidad y Estadística, que permitan el abordaje de los múltiples significados de la aleatoriedad en la formación de profesores.

REFERENCIAS

- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias*, 16(1), 85-97.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de investigación en Educación Estadística. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>
- Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *Ponencia invitada en las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (JAEM)*, Granada, España.
- Borel, É. (1924). À propos d'un traité de Probabilités. *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, 98, 321-326.
- Chernoff, E. J. y Sriraman, B. (eds.) (2014). *Probabilistic Thinking. Presenting Plural Perspectives*. Dordrecht: Springer.
- Esteban, R. (2015). *Concepciones sobre la aleatoriedad de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de: <http://www.ugr.es/~batanero/documentos/Esteban.pdf>

Moreno A., Cardeñoso J. M. y González, F. (2014). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de Matemática y de Biología en formación. *Eureka*. Recuperado de: <<http://rodin.uca.es/xmlui/bitstream/handle/10498/15975/06-583-Moreno.pdf>>