Barboza, N., Molfino, V., Ubal, S. (2015). El problema como recurso de aprendizaje: una propuesta para la enseñanza del concepto de parábola. *Reloj de agua*, 12, 5-16.

El problema como recurso de aprendizaje: una propuesta para la enseñanza del concepto de parábola

Nancy Barboza[1], Verónica Molfino[2], Shirley Ubal[3]

RESUMEN

Existen distintas situaciones de enseñanza de la matemática; cada una establece roles y relaciones específicas entre el saber, el docente y el alumno, y en cada una de ellas el problema es utilizado desde diferentes perspectivas. En este trabajo describimos brevemente los distintos modelos presentados por Charnay relativos a esas situaciones, la *Teoría de Situaciones Didácticas* de Brousseau, así como los vínculos entre esta teoría y uno de los modelos propuestos por Charnay, el *Modelo Aproximativo*. A su vez, presentamos una propuesta para la enseñanza del concepto de parábola enmarcada en el Modelo Aproximativo de Charnay donde el problema es utilizado como *recurso de aprendizaje*. Entendemos que es de esta manera que el estudiante logra construir los conceptos matemáticos de modo significativo.

PALABRAS CLAVE: situación didáctica, modelo aproximativo, resolución de problemas.

ABSTRACT

There are different mathematics teaching situations; each one determines specific roles and relationships between knowledge, the teacher and the student and in each one the problems are used from different perspectives. In this paper we briefly describe the different models presented by Charnay related to those situations, Brousseau's *Theory of Didactical Situations*, as well as the links between this theory and one of the models proposed by Charnay, the *Approximative Model*. Moreover, we present a proposal for teaching the concept of parabola from the view of Charnay's Approximate Model in which problems are used as a *learning source.* We believe this is the way in which students will construct mathematical concepts significantly.

KEYWORDS: didactical situation, approximative model, problem solving.

---

[1] Estudiante de cuarto año de la especialidad matemática del Profesorado Semipresencial del Consejo de Formación en Educación.

[2] Doctora en Matemática Educativa. Docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial del Consejo de Formación en Educación.

[3] Estudiante de cuarto año de la especialidad matemática del Profesorado Semipresencial del Consejo de Formación en Educación.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge a partir de una actividad propuesta en el marco del curso Análisis del Discurso Matemático Escolar del último año del profesorado de matemática en modalidad semipresencial. Dos de las autoras eran estudiantes de ese curso y otra, la profesora a cargo.

La actividad consistió primeramente en argumentar por qué Charnay (1988) utiliza los términos *criterio, móvil* y *recurso de aprendizaje* para hablar de su propuesta de tres modelos distintos de situaciones de enseñanza. Como segunda tarea se pidió vincular la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau con el Modelo Aproximativo de Charnay. Por último, se propuso reflexionar acerca de la enseñanza de un tema a elección, enmarcada en el Modelo Aproximativo de Charnay.

A través de este trabajo deseamos ofrecer una mirada sobre cómo utilizar los *problemas como recurso de aprendizaje,* ya que entendemos que es de este modo que el estudiante logra construir los conocimientos matemáticos de manera significativa. Desde este enfoque expondremos cuál deberá ser el rol que ocuparán el saber, el docente y el alumno.

MODELOS DE SITUACIONES DE ENSEÑANZA PROPUESTOS POR CHARNAY

Según Charnay (1988), toda situación de enseñanza puede ser descripta en función del tipo de relaciones que se establecen entre el saber, el docente y el alumno. Propone tres modelos de referencia que describimos a continuación, prestando especial atención al rol que el docente le asigna a la resolución de problemas en cada uno de ellos.

MODELO NORMATIVO

Este modelo está centrado en el contenido, el foco está puesto en la relación docente-saber mientras el alumno cumple un papel secundario. El docente es portador del saber, su rol es traspasarlo al alumno. El saber ya está construido y el alumno lo incorporará por medio de la atención, la escucha, la imitación y la ejercitación. En este caso los problemas cumplen el rol de *criterio del aprendizaje*, esto es, son utilizados por parte del docente para evaluar si el alumno adquirió el conocimiento que previamente impartió. El modelo de enseñanza provoca que el alumno se limite a buscar problemas similares, que ha resuelto anteriormente, para imitar y ejercitar el procedimiento o estrategia de resolución.

Modelo Incitativo

Este modelo está centrado en el alumno, se prioriza la relación entre alumno y docente, pudiendo quedar el saber relegado a un segundo plano. Se le pregunta al alumno sobre sus intereses, motivaciones, necesidades y entorno y en base a ello el docente proporciona las herramientas y fuentes del saber que el alumno luego utilizará para buscar información, estudiar y aprender. El problema es visto en este caso como móvil del aprendizaje ya que su función es proporcionar conocimientos que el alumno desea o necesita saber basado en sus intereses y entorno. Charnay (1988) considera una limitante de este modelo el hecho de que "las situaciones 'naturales' son a menudo demasiado complejas para permitir al alumno construir por sí mismo las herramientas y, sobre todo, demasiado dependientes de 'lo ocasional' para que sea tenida en cuenta la preocupación por la coherencia de los conocimientos" (p. 57).

Modelo Apropiativo - Aproximativo

El centro en este modelo está puesto en la construcción del saber por parte del alumno. El docente juega un papel de guía: propone y organiza distintas situaciones con distintos obstáculos de modo que el alumno pueda investigar y buscar procedimientos y estrategias, discutir e interactuar con sus pares, dar sentido a los saberes, etc., para llegar a una solución y así construir el saber. Es así que el problema es la base de este modelo y visto como un *recurso de aprendizaje*, constituye la herramienta mediante la cual el estudiante construye el saber.

Teoría de Situaciones Didácticas

Por su parte, Guy Brousseau desarrolla la Teoría de situaciones didácticas (TSD) la cual "pretende modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que surgen en el ámbito de un sistema didáctico a partir de la problematización y cuestionamiento de un *conocimiento matemático enseñado*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 213). Según los autores, esta teoría tiene como objetivo encontrar las condiciones para una génesis artificial de los conceptos matemáticos, afirmando que estos no se construyen de forma espontánea. Es así que el rol del docente es primordial ya que será el responsable de crear estas condiciones. Algunas situaciones requieren tener adquiridos ciertos conceptos previos pero otras ofrecen la posibilidad de construir por sí mismo un nuevo conocimiento en un proceso "genético".

Chevallard et al. (1997) realizan un esbozo de las Teorías de las Situaciones Didácticas describiendo las siguientes componentes de las situaciones didácticas:

1. Situación matemática

   Es una situación modelizable mediante un juego formal[4]; y es *específica de un conocimiento* concreto si cumple que:

   > i) es comunicable sin utilizar ese conocimiento y ii) la estrategia óptima del juego formal asociado a la situación matemática se obtiene a partir de estrategias de base (que consiste en jugar al azar, aunque respetando las reglas de juego) utilizando el conocimiento en cuestión. (Chevallard et al., 1997, p. 214).

2. Situación adidáctica

   Es una situación matemática específica de un conocimiento que por sí misma provoca o permite un cambio de estrategia del jugador, sin intervención externa (por ejemplo la del docente).

3. Variable didáctica

   Son elementos del juego formal que pueden adoptar diferentes valores y con ello hacer que se modifique la estrategia óptima para ganar la partida. En particular, una variable es *didáctica* si puede ser manipulada por el docente.

4. Aprendizaje de un conocimiento matemático específico

   Según Chevallard et al. (1997), "es adaptarse a una situación adidáctica específica de dicho conocimiento" (p. 216), logrando mantener estable en el tiempo y respecto a las distintas variables didácticas, la estrategia ganadora del juego. Más específicamente, los autores indican que "un alumno ha aprendido el conocimiento C si se ha adaptado a todas las situaciones adidácticas que constituyen una situación fundamental (correspondiente a C)" (p. 216), considerando *situación fundamental correspondiente a C* a un conjunto de situaciones adidácticas relativas a C.

5. Situación didáctica

   La situación didáctica está compuesta por las relaciones entre los estudiantes, el medio y las intervenciones docentes sobre los alumnos y el medio, "destinadas a hacer funcionar las situaciones adidácticas y los aprendizajes que ellas provocan" (Chevallard et al, 1997, p. 217). Las intervenciones se dan mayormente en las instancias de devolución (el

[4] Con juego formal Brousseau (1986) se refiere a una estructura definida por: un conjunto de posiciones distintas, un conjunto de posiciones permitidas dentro de las reglas del juego, un estado inicial y uno o más estados finales, un conjunto de jugadores y relaciones específicas entre los conjuntos mencionados que describen las estrategias ganadoras en el juego.

profesor busca que el estudiante se apropie de la situación adidáctica) e institucionalización (el profesor relaciona el conocimiento construido en clase mediante la resolución de la situación didáctica con el conocimiento aceptado por la comunidad matemática).

El problema como recurso de aprendizaje: punto de encuentro entre la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau y el modelo aproximativo de Charnay

Encontramos varias similitudes entre el Modelo Aproximativo de Charnay y la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau.

La primera gran semejanza a destacar se refiere al rol y la acción docente, la cual es esencial en ambas perspectivas. Comparten la idea de que es tarea del docente proponer las situaciones matemáticas en las cuales el conocimiento lo construyan los alumnos. Para que los alumnos puedan resolver esas situaciones, es necesario partir de conocimientos preexistentes en los alumnos, por lo que el docente también deberá organizar y dar coherencia a los conocimientos aprendidos. Además, también se comparte la idea de que es tarea del docente considerar los obstáculos y variables didácticas en estas situaciones matemáticas que provoquen cambios en las estrategias utilizadas por los alumnos de modo de ponerlos a prueba para modificarlas, mejorarlas y así seguir construyendo el conocimiento matemático que se desea enseñar. Ambas teorías entienden también, que queda a cargo del docente la formalización e institucionalización de los saberes y de notaciones, terminología, etc.

Otra de las semejanzas entre el Modelo Aproximativo de Charnay (1988) y la TSD se refiere al rol que le asignan al estudiante. Para Chevallard et al. (1997) el estudiante debe intervenir en la actividad matemática aplicando sus conocimientos previos, formulando enunciados, planteando preguntas, probando proposiciones, construyendo modelos, lenguajes, conceptos y teorías, intercambiando con otros, tomando decisiones, reconociendo y optando por aquellos conceptos que puedan ser útiles para continuar su actividad. Es de la misma manera que se concibe la acción del alumno en el Modelo Aproximativo, centrado en el estudiante para que sea este el que investigue en compañía de sus pares, buscando estrategias para dar con la solución del problema, construyendo el conocimiento matemático significativamente.

Más aún, ambas perspectivas coinciden en las distintas fases que se dan durante la situación de enseñanza, las cuales deben ser organizadas por el docente: de acción, formulación, validación e institucionalización.

La primera fase se denomina de acción ya que el alumno debe actuar sobre la situación problema que ha sido planteada por el docente, investigando y tomando decisiones para organizar su actividad y buscando procedimientos y estrategias de resolución, las cuales implican el uso del conocimiento específico a enseñar.

La segunda fase, de formulación, consta de obtener un resultado por medio del intercambio de información entre una o más personas. El estudiante comunica lo que ha trabajado a sus pares y estos le devuelven información, por medio de mensajes escritos u orales redactados en lenguaje matemático. Esto permite crear un modelo explícito que puede ser formulado con signos y reglas conocidos o nuevos.

La tercera fase es la de validación donde el alumno demuestra por qué el modelo que ha creado es válido e intenta convencer a otra persona. La situación de validación es el momento donde el estudiante propone el modelo, utilizando el mensaje matemático como una aseveración para comunicarse con otra persona. Debe probar la exactitud y la pertinencia de su modelo usando la validación semántica y la sintáctica. Los pares pueden complementar lo expresado, pedir explicaciones, rechazar las que no están de acuerdo.

La última fase, la institucionalización, "consiste en dar un estatuto cultural a las producciones de los estudiantes: actividades, lenguajes y conocimientos expresados en proposiciones" (Chevallard et al., 1997, p. 219). Estudiantes y profesor extraen conclusiones teniendo en cuenta lo realizado por los estudiantes, sintetizan, ordenan y realizan los vínculos pertinentes entre lo desarrollado en cada fase por los alumnos y el saber científico.

Por último, destacamos el lugar primordial que ambas teorías le dan a la resolución de problemas. En ambas teorías, se entiende que el saber lo construye el propio alumno a través de la resolución de genuinos problemas propuestos por el docente: aquellos que provoquen que los estudiantes se involucren y tales que el conocimiento a enseñar sea una solución adecuada al problema planteado.

UN EJEMPLO RELATIVO A LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA

A continuación presentamos a modo de ejemplo una actividad pensada para introducir el concepto de parábola que consideramos se ajusta al modelo aproximativo que propone Charnay (1988). En particular, está diseñada para introducir el concepto de parábola como lugar geométrico por medio del método sintético en un grupo de tercer año de bachillerato de la asignatura Matemática II, en la unidad Cónicas. Pensamos que puede ser llevada a cabo en una clase de 45 minutos.

Para abordar el tema es necesario que los estudiantes posean como conceptos previos distancia de un punto a una recta, y conjunto unión de paralelas y circunferencia como lugares geométricos. Además, será necesario que los estudiantes manejen herramientas básicas de GeoGebra y que dispongan de al menos una computadora cada dos o tres estudiantes ya que se usará dicho programa como recurso didáctico básico. Asimismo, es fundamental el uso por parte del docente del cañón para realizar la puesta en común.

FASE DE ACCIÓN

Se presenta el siguiente problema a los estudiantes y se les pide que lo resuelvan en grupos de dos o tres alumnos como máximo, utilizando el programa GeoGebra como herramienta.

Mientras los alumnos comienzan a trabajar, el docente instala el cañón y la computadora.

Problema

r es una recta y P un punto exterior a r. Construye una circunferencia que sea tangente a r y pase por P. ¿Es única? Justifica tu respuesta.

Se espera que los estudiantes lean el problema y comiencen a generar ideas de cómo comenzar a abordarlo de manera de actuar sobre la situación propuesta, intercambiando esas ideas con sus pares, buscando posibles caminos para resolver el problema, sin la intervención docente.

El docente pasa por los equipos para observar el trabajo de los grupos. En el caso en que lo considere necesario, y con el fin de que los estudiantes se apropien del problema (instancia de devolución), ofrece una guía a aquellos alumnos que lo necesiten mediante algunas de las siguientes preguntas:

- Considera una posible circunferencia. ¿Qué elementos necesito para trazar la circunferencia?
- ¿Puedes determinar el centro de la circunferencia? ¿Y el radio?
- ¿Qué quiere decir que la circunferencia es tangente a la recta? ¿Qué deducciones puedes realizar a partir de este dato?
- ¿Qué relación existe entre la distancia entre el centro de la circunferencia y uno de los puntos de ella, y la distancia entre el centro y la recta?
- ¿Qué condiciones debe cumplir el centro de la circunferencia?

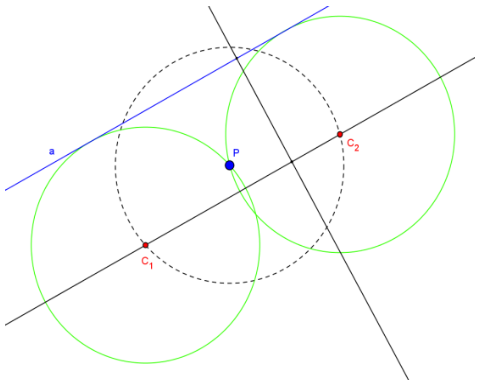
FASE DE FORMULACIÓN

En una segunda instancia el docente pide a los estudiantes que se separen en dos grupos (puede ser respetando la agrupación anterior de manera que los estudiantes del mismo subgrupo queden juntos en esta nueva agrupación). Cada grupo debe ponerse de acuerdo en una estrategia óptima de resolución y elegir a uno de sus integrantes para que pase adelante a explicarla, utilizando para ello la computadora conectada a cañón y mediante el lenguaje matemático que consideren adecuado.

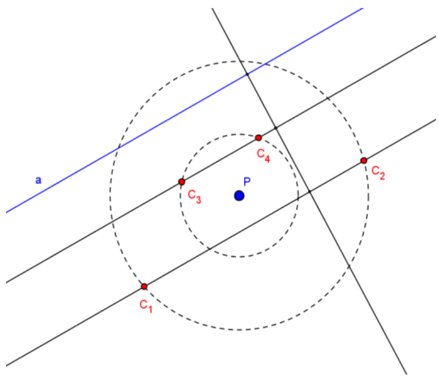
Si bien existen muchas maneras posibles de resolver la primera parte del problema, exponemos a continuación una de ellas para poder ejemplificar la formulación esperada.

Un posible trazado

Se toma una recta paralela a la recta dada a una distancia x. Luego se traza una circunferencia de centro el punto dado y radio x (este procedimiento también podría realizarse a la inversa). La intersección de la recta trazada y la circunferencia es un posible centro para la circunferencia buscada. El radio es x.

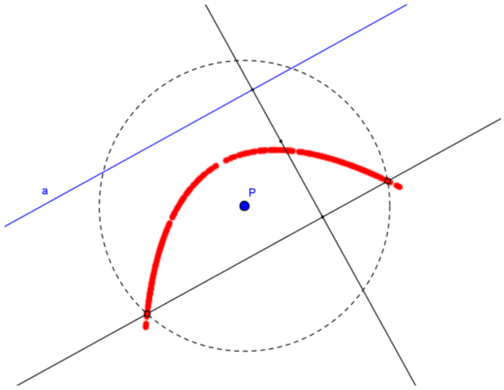


Los estudiantes posiblemente encuentren dos soluciones, las circunferencias de centro C_1 y C_2. Deberán ahora indagar si es posible que existan más soluciones. Podrán repetir este procedimiento para otros valores de x encontrando varios puntos, pudiéndose divisar que pertenecen a una curva que no es una circunferencia ni un arco de ella.



Se le puede sugerir al estudiante activar el rastro del punto encontrado e ir variando *x* o utilizar la herramienta Lugar Geométrico.

También podría tomarse la distancia *x* con la herramienta deslizador.



FASE DE VALIDACIÓN

Consiste en una puesta en común, donde los estudiantes presentan los distintos trazados posibles (además de los ya expuestos), discuten su validez y justifican los procedimientos y estrategias de solución.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN

En esta fase el docente recoge los procedimientos y argumentos brindados por los estudiantes para relacionarlos con el conocimiento establecido por la comunidad matemática. En particular se centra en encontrar todos los posibles centros de las circunferencias solución. Se espera que los estudiantes intuyan que la figura que se forma es una parábola. En conjunto con los estudiantes, se formalizará la definición de parábola como lugar geométrico, distinguiendo la recta directriz y el foco; conceptos que deberá introducir el docente.

"Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta fija a la que llamaremos directriz y un punto fijo al que llamaremos foco".

FUNDAMENTACIÓN

Entendemos que la situación propuesta se enmarca dentro de lo que Charnay (1988) denomina Modelo Aproximativo ya que el problema es usado como recurso de aprendizaje de manera que es el estudiante quien construye el conocimiento mediante la resolución óptima a dicho problema.

A su vez, la situación diseñada y la manera en que proponemos implementarla se ajusta a las características comunes que observamos tiene el modelo aproximativo con la TSD. El rol del docente es el de proponer, organizar y guiar la tarea interviniendo solo en aquellos momentos que considera adecuado, y luego formalizar los conceptos y terminología del nuevo conocimiento matemático construido por los alumnos, en este caso el concepto de parábola como lugar geométrico. El rol del alumno es el de investigar y buscar estrategias de solución al problema propuesto por el docente, recurriendo a sus conceptos previos y discutiendo y validando sus ideas entre pares.

Además, se pueden divisar las distintas fases propuestas por Charnay: la de acción donde el estudiante debe investigar para poder encontrar un procedimiento y estrategia de solución a la situación problema propuesto por el docente pero sin su intervención; la de formulación donde el estudiante en el intercambio con sus pares y por medio de conocimientos matemáticos previos, formula la estrategia encontrada; la de validación en la cual se realiza la puesta en común y los estudiantes deben validar los procedimientos y estrategias de solución encontradas y la de institucionalización donde el docente propone formalizar junto con los estudiantes el nuevo concepto construido, expresando matemáticamente los nuevos conceptos hallados (parábola como lugar geométrico, foco y directriz).

Se les pide a los estudiantes resolver el problema usando GeoGebra, como forma de agilizar las construcciones y favorecer la visualización de la situación problema y su resolución. Plantear esta situación en el contexto de la Geometría Dinámica permite abordar el problema desde diferentes niveles de habilidad. Por ejemplo, habrá quienes construyan la recta y el punto, después una circunferencia cualquiera y mediante el arrastre del centro o del punto que define el radio, ir "acercando" la circunferencia para que cumpla la condición pedida (construcción que no sería posible con lápiz y papel). Mientras habrá otros que para construir una circunferencia "solución", presenten algunos de los trazados considerados como válidos. Esta construcción es posible con regla y compás, para encontrar una solución, ahora, la construcción dinámica habilita a explorar la existencia de otras posibles soluciones, incluso pudiendo obtener un vistazo rápido de todas las posibles ubicaciones para el centro de la circunferencia solución.

Como objetivos generales de la unidad Cónicas, se pide definir cada una, utilizar distintos métodos de trabajo geométrico (sintético y analítico), enunciar sus propiedades y aplicaciones dentro de distintas disciplinas. Es así que se introduce a la parábola vista como un lugar geométrico, ya que de esta manera se pueden deducir o interpretar sus propiedades, y sus consecuentes aplicaciones (antenas, telescopios, radiotelescopios, focos, etc.) y la ecuación de la misma.

Además, se intenta ofrecer al alumno, dentro de la geometría, distintas estrategias de resolución e incentivar el análisis previo del problema y la elección de una estrategia que pueda ser igual de eficaz pero más económica. Mostrando que aunque este es un curso básicamente de Geometría Analítica y que el método sintético puede tener determinadas limitaciones[5], puede resultar igualmente eficaz pero más económico en algunos casos y, en otros, hasta podría ser necesario utilizar ambos métodos para resolver un problema.

La elección de que los alumnos trabajen en grupos se debe a que se intenta fomentar el trabajo colaborativo, promoviendo la discusión y el diálogo, disminuyendo las ansiedades y fortaleciendo la autoestima.

Pensamos que de esta manera se estimula positivamente a los estudiantes pues vivencian la resolución de un problema al que finalmente ellos mismos dan respuesta en lugar de venir dada por el docente.

REFLEXIONES FINALES

Hemos visto que aunque las propuestas de Charnay y Brousseau son distintas, existen grandes coincidencias entre ambas perspectivas. Destacamos el lugar primordial que se le da al problema como recurso para la construcción del conocimiento por parte del alumno y el rol protagónico del estudiante como aquel que investiga y busca estrategias de resolución; también el papel secundario pero no menos importante del docente que es quien organiza, guía de la tarea e institucionaliza los saberes. La opción didáctica de utilizar los problemas como recurso en el aula, delimita los mismos roles y relaciones entre saber, docente y alumno.

Consideramos que este trabajo brinda una mirada concreta acerca de cómo utilizar los problemas como herramienta de enseñanza y aprendizaje en el aula, ya que entendemos que es de esta manera que los estudiantes logran construir conceptos matemáticos de forma

[5] En la Grecia antigua existieron tres problemas (duplicación del cubo, trisección del ángulo, cuadratura del círculo) que resultaron irresolubles mediante el método sintético que figura en los *Elementos* de Euclides y que hace uso exclusivo de regla griega (una regla sin marcas) y compás griego (un compás colapsable, que no permite transportar una medida como el compás actual). Estos problemas dominaron el interés de los matemáticos por siglos y en la búsqueda de una solución a los mismos, se desarrollaron nuevos conocimientos matemáticos. En la misma Grecia antigua, la búsqueda de solución al problema de la duplicación del cubo, sin limitarse al uso exclusivo de regla griega y compás griego, dio lugar a la creación de las Cónicas.

significativa, especificando claramente los roles tanto del docente como del estudiante en cada momento de una situación de enseñanza, aportando a nuestros colegas docentes una posible forma de trabajo por medio de problemas en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7 (2), 33-115.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comp.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*, 2002, pp. 51-63. Buenos Aires: Paidós Educador.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Cuadernos de Educación No. 22. Institut de Ciències de l' Educació (Universitat de Barcelona). Barcelona: Editorial Horsori.