Castelnoble Díaz, M. y González Herrera, F. (2015). Cónicas en la Grecia antigua. *Reloj de agua*, 12, 17-31.

Cónicas en la Grecia antigua

Marcela Castelnoble Díaz[1], Facundo González Herrera[2]

RESUMEN

En este trabajo presentamos un recorrido histórico del desarrollo de las cónicas. Repasaremos los problemas que originaron la aparición de tales figuras, su surgimiento como secciones cónicas y, a partir de ellas, el estudio métrico de las condiciones que cumplen los puntos así determinados.

Se plantean también algunas actividades pensadas para estudiantes de bachillerato en las que se ponen en juego estas ideas, apuntando a trazar una conexión métrico analítica que creemos es sumamente valiosa en cuanto a dotar de significado a estos objetos.

PALABRAS CLAVES: historia de la matemática, cónicas, relaciones entre áreas de cuadrado y rectángulo.

ABSTRACT

In this article we pretend to go through the historical development of the conic section. We will go over the problems that gave birth to such figures, their conception as conics and then the study of the euclidean conditions of the points in the conics.

As well we present several tasks for the undergraduate student. The aim of this tasks is to create a connection between euclidean and analytic geometry. This connection will give meaning to conic shapes which we consider to be extremely important.

KEYWORDS: history of maths, conics, relations between square and rectangle areas.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo exploraremos el nacimiento y el desarrollo de las curvas más famosas de la matemática que se estudian en segundo ciclo de la enseñanza media en el Uruguay. Estas curvas están presentes no solo dentro de los cursos sino que cuentan con infinidades de aplicaciones en el mundo actual.

[1] Marcela Castelnoble Díaz. Profesora de Matemática. Docente efectiva del Consejo de Educación Secundaria.

[2] Facundo González Herrera. Profesor de Matemática. Docente efectivo del Consejo de Educación Secundaria.

Este artículo apunta a investigar los orígenes y el desarrollo de las mismas, intentando hacer un abordaje inclusivo de las características sociales de los tiempos en los que se fueron forjando, a fin de dejar en evidencia la íntima relación de las sociedades con las matemáticas que ellas desarrollan.

En el abordaje tradicional de este tema en la enseñanza media se produce un quiebre entre la presentación de las curvas como secciones cónicas y la presentación como lugares geométricos a través de sus elementos, focos y directriz. El objetivo de este trabajo es evidenciar conexiones existentes entre ambas concepciones y lo haremos a través de un análisis histórico.

En este se pretende recorrer desde los problemas que generaron el surgimiento de estas curvas hasta la obtención de las condiciones métricas que cumplen los puntos de ellas, poniendo de manifiesto la relación que dichas condiciones tienen con la etimología de sus nombres.

En última instancia proponemos algunas actividades que apuntan a obtener, mediante argumentos métricos, la relación que deben cumplir los puntos pertenecientes a las cónicas y, posteriormente fijado un sistema de ejes cartesianos, obtener las ecuaciones correspondientes.

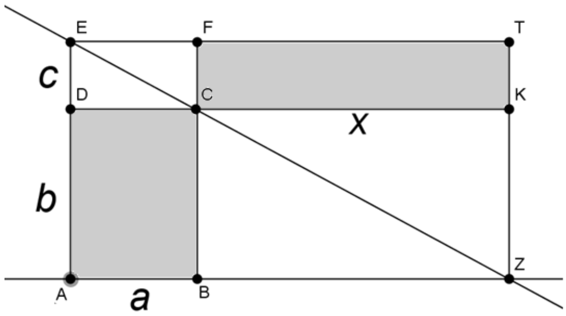
ANTECEDENTES – LOS MÉTODOS PARABÓLICO, ELÍPTICO E HIPERBÓLICO

Las referencias históricas al trabajo sobre cónicas apuntan siempre hacia Apolonio (siglo III a. C.) y su célebre trabajo Cónicas. Consideramos conveniente sin embargo, hacer una introducción sobre los trabajos geométricos previos que de una forma u otra estuvieron relacionados con el de Apolonio.

En el siglo V a. C. se desarrolla la "Escuela de Quíos", cuyos representantes fueron Enópides e Hipócrates, al primero se le atribuye el haber establecido los principios que luego se encontrarían en los Elementos de Euclides (fines del siglo IV a. C.) y fue quien impusiera el uso de la regla y el compás para las construcciones geométricas. A Hipócrates se le atribuye el haber trabajado con la cuadratura de las lúnulas.

La forma de cálculo utilizada por la civilización griega en este tiempo era geométrica. Una de las causas de esto probablemente fue el descubrimiento por parte de los Pitagóricos de la existencia de los números irracionales, de lo que resultó que las magnitudes geométricas eran más completas que el conjunto de los números racionales (Ribnikov, 1987, pp. 55-58). La suma era interpretada como la adición de segmentos, la resta como la eliminación de una parte del segmento igual al sustraendo. La multiplicación de dos segmentos condujo a una representación bidimensional: daba como resultado el área del rectángulo por ellos determinado. La división solo era posible bajo el requerimiento de que la dimensión del dividendo fuera mayor que la del divisor y la técnica utilizada para resolver esta operación era la de "anexión de áreas".

Para "anexar al segmento *c* un rectángulo *ab*" se procedía de la siguiente forma:



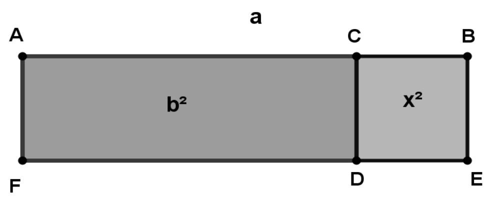
Se construyen dos rectángulos consecutivos *ab* y *ac* (en la figura (*ABCD*) y (*CDEF*)), la intersección de *EC* y *AB* determina el punto *Z* con el cual se construye el rectángulo (*AZTE*), la medida del segmento *BZ* es la longitud *x* buscada.

Lo que se determina es un rectángulo (*CKTF*) de igual área que el (*ABCD*). Esto se cumple ya que: *área* (*EAZ*) = *área* (ETZ), como además *área* (*BCZ*) = *área* (*CKZ*) y *área* (*DCE*) = *área* (*EFC*) entonces deberá cumplirse la igualdad. Esto se puede escribir como *a.b* = *c.x* o $\frac{a.b}{c} = x$.

El método de anexión de áreas visto llevaba el nombre de *parabólico*.

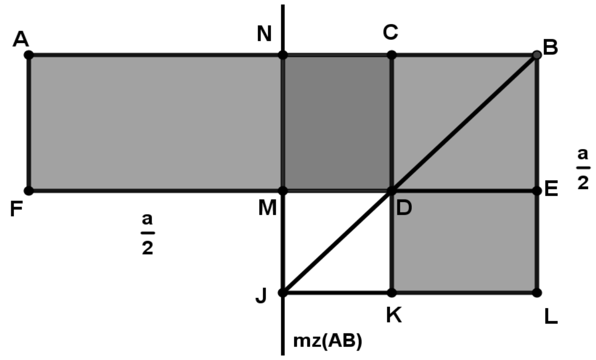
Entre otros problemas de anexión de áreas sobre los que trabajaron comentaremos dos en particular.

1 - *Agregar a un segmento dado* ($AB = a$) *un rectángulo igual a un área dada* (b^2) *de modo que la parte del área que falta para el rectángulo completo sea un cuadrado* (x^2).



El problema se puede plantear como una ecuación de la forma: $(a - x)x = b^2$.

El planteo geométrico para su resolución era el siguiente:



A partir de la figura de análisis anterior se considera la mediatriz de segmento *AB*, siendo *J* el punto de intersección de esta con *BD*, obteniéndose el cuadrado (*NJLB*).
Se deduce que el *área* (*FMNA*) = *área* (*CBLK*) por lo que $b^2 = (a-x)x$ = *área* (*MDCN*) + *área* (*CBLK*) = *área* (*NJLB*) - *área* (*JKDM*). De esto se deduce que $b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$.

Construyendo un triángulo rectángulo de hipotenusa $\frac{a}{2}$ y cateto *b*, el cateto restante tendrá como medida $\frac{a}{2} - x$, con lo cual queda determinado el segmento *x*. Este caso de anexión de áreas se denominaba *elíptico* (defecto).

2- El otro problema es muy similar al primero, *consiste en anexar a un segmento dado un rectángulo igual a un área dada de manera tal que el exceso sobre el rectángulo sea un cuadrado*.

La resolución de este problema también es similar a la anterior mencionada, este caso se denominaba *hiperbólico* (exceso, sobrante)

MENECMO Y LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

Si buscamos el origen de las cónicas debemos ir a los tres problemas clásicos de la Geometría[3], de los cuales tenemos como antecedente de las cónicas el problema de la duplicación del cubo. Del mismo se conoce una leyenda, trasmitida por Eratóstenes (siglo III a. C.), que lo relaciona con la peste del año 429 a. C. en Atenas. Dice que los atenienses enviaron una comisión al Oráculo de Apolo de Delos para preguntar cómo podría conjurarse

[3] Estos problemas a los que se hace referencia son: la duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo, problemas que surgieron durante la Grecia antigua y cuya solución fue perseguida durante cientos de años, en una búsqueda que abonó varias ramas de la matemática.

la peste y la respuesta fue que era necesario duplicar el volumen del altar cúbico dedicado a Apolo sin variar su forma. Fue así que los atenienses construyeron otro altar cúbico duplicando la arista, con lo cual el volumen aumentó ocho veces, entonces no pudieron detener la peste.

Los matemáticos atenienses de la época dominaban las transformaciones de áreas y proporciones. Sabían trabajar con un rectángulo de lados a y b y construir un cuadrado con igual área (cuadratura del rectángulo), se debe verificar la proporción $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ y los geómetras de la época ya conocían una construcción.

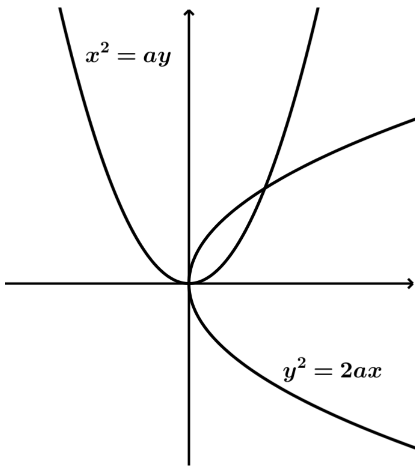
Estos intentaron generalizar el problema de interpolar dos medias entre dos magnitudes dadas a y b, es decir encontrar dos segmentos de medidas x e y tales que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$.

Hipócrates fue el primero en reconocer que este problema es equivalente a resolver la duplicación del cubo si tomamos $b = 2a$.

En términos actuales deberíamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases}$$

cuya representación gráfica es la siguiente:



Menecmo (siglo IV a. C.), discípulo de Platón, descubrió que las secciones planas de un cono podían resolver el problema de la duplicación del cubo. En esta época solo admitían dos maneras de definir curvas, por medio de composiciones de movimientos o como intersección de superficies geométricas conocidas como planos, esferas, cilindros, conos y poliedros.

Menecmo creó la elipse, la parábola y la hipérbola, seccionando conos acutángulos, rectos y obtusángulos respectivamente, con planos perpendiculares a una de las generatrices del cono.

En esta época estas curvas recibían el nombre de *oxitoma*, sección con el cono agudo, *amblitoma* con el obtuso y *ortotoma* con el recto. A pesar de que la elipse es la que aparece más veces en la vida cotidiana por su "cercanía" con la circunferencia, Menecmo la descubrió como consecuencia de las otras dos que eran las buscadas por él para solucionar el problema de Delos.

EUCLIDES Y PAPPUS

De la vida de Euclides se sabe poco. Algunas de sus obras se han perdido, entre ellas figura *Cónicas*, un tratado en cuatro libros y otra obra llamada *Lugares geométricos superficiales*, que no llegaron a nuestros días. Sin embargo, esto permite afirmar que Euclides profundizó más en la geometría que lo trabajado en los *Elementos*.

Otros de los matemáticos que trabajó con cónicas fue Aristeo (siglo IV a. C.), considerado por Euclides como un gran geómetra por haber escrito un tratado sobre lugares sólidos que era el nombre griego que utilizaban para las secciones cónicas. Los tratados sobre cónicas de estos dos matemáticos se perdieron.

En los *Elementos* no se estudian los lugares geométricos pues eran considerados matemáticamente superiores, a pesar de que en esta obra se encuentran las propiedades que caracterizan a los lugares geométricos elementales. Los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres categorías: lugares geométricos planos, que abarcaban rectas y circunferencias, los lugares sólidos que incluyen las cónicas y los lugares lineales que contenían curvas como el espiral. Esta clasificación es heredada por los problemas, por ejemplo: la determinación del lugar de los puntos del plano que equidistan de dos rectas fijas es un problema plano, utilizamos regla y compás; la duplicación del cubo es un problema sólido ya que es resuelto como intersección de dos parábolas; la cuadratura del círculo es lineal; la trisección del ángulo fue considerado un problema lineal pero Pappus (siglo III) logró una solución empleando una circunferencia y una hipérbola con lo cual, según ésta clasificación, pasó a considerarse un problema sólido.

Arquímedes y Apolonio

Arquímedes fue uno de los matemáticos más importantes del mundo griego. Nació en el 287 a. C. en Siracusa y si bien no hay mucha información sobre su vida, se sabe que se destacó como matemático e inventor. Se le atribuye haber diseñado máquinas para defender la ciudad así como el descubrimiento de varias leyes físicas. Entre sus diez obras conocidas encontramos un tratado sobre la cuadratura de la parábola donde se encuentra el cálculo del área de un segmento parabólico: demuestra que el área de un segmento parabólico es 4/3 del área del triángulo inscripto que tiene la misma base y el vértice opuesto en el punto en que la tangente es paralela a la base (Eves, 1985).

A pesar de que las cónicas se conocían hacía casi un siglo, no se había estudiado lo que se refiere al cálculo de áreas relacionadas con ellas. Apolonio completa con Euclides y Arquímedes lo que se denomina el triunvirato del Siglo de Oro de la matemática griega. Poco se sabe de su vida, se supone que además de matemático fue un astrónomo famoso, creador de un modelo para explicar el movimiento de los planetas, él crea la teoría de los epiciclos.

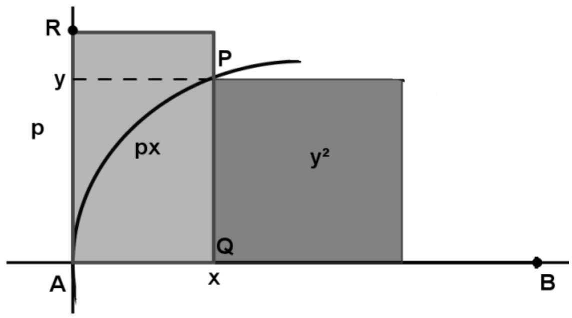
Apolonio estudió en su obra *Lugares Planos* (obra reconstruida en el siglo XVII) la determinación de varios lugares geométricos, como por ejemplo el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es una constante distinta de la unidad. Varias obras de Apolonio se han perdido pero se ha conservado casi completa su obra *Las Cónicas* gracias a una traducción árabe realizada en el siglo IX por Thabit Ibn- Qurra. El tratado cuenta de ocho libros con un total de 400 proposiciones en las que se estudian las cónicas en detalle, superando lo que se había escrito hasta el momento por Menecmo, Aristeo y Euclides.

A diferencia de Menecmo, Apolonio demostró por primera vez que las cónicas se obtienen utilizando un cono circular cualquiera, variando la inclinación del plano secante. La definición dada por Apolonio sobre cono circular es la siguiente:

> Si una línea recta de longitud indefinida y que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble. (Boyer, 2007, p. 195)

Con esta definición sustituyó el cono de una sola hoja por uno de dos hojas, dando a la hipérbola sus dos ramas.

Apolonio fue quien utilizo por primera vez los nombres de parábola, elipse e hipérbola en el sentido que le damos actualmente. La razón de esta elección probablemente se debió a un criterio de clasificación de cónicas que descubre el geómetra de Pérgamo que estaba relacionado con el problema de las áreas de los pitagóricos mencionado al principio: Si consideremos AB como el eje principal de la cónica, P es un punto perteneciente a ella y Q el pie de la perpendicular de P a AB. En A que es un vértice de la cónica se considera la perpendicular a AB y en ella R tal que $AR = p$ (parámetro o lado recto) de la cónica.



Se considera un rectángulo con un lado AQ y área igual a PQ^2, si la altura es menor, igual o mayor que AR, la cónica será una elipse, parábola o hipérbola respectivamente. Ahora bien, si consideramos un sistema de coordenadas cuyos ejes son AB y AR y $P(x, y)$ un punto de la cónica, entonces la curva será una elipse, parábola o hipérbola según se cumpla: $y^2 < px$, $y^2 = px$ o $y^2 > px$ (Eves, 1985).

Apolonio no trabaja con los focos como lo hacemos nosotros en nuestros cursos, ni siquiera les da nombres especiales a los mismos, sino que se refiere a ellos de manera indirecta. Se supone que, al igual que Euclides y Aristeo, estaba familiarizado con la directriz pero no hay mención en su tratado. Además se supone que conocía un método para determinar una cónica por cinco puntos.

Desde el año 415 que tuvo lugar la destrucción de la Biblioteca de Alejandría hasta el siglo XVI en que se produce el Renacimiento europeo, el pensamiento matemático sufre un largo estancamiento. Según varios historiadores por dos motivos principales, los intereses pragmáticos de los romanos y las imposiciones de la teología cristiana.

CONDICIÓN QUE CUMPLEN LOS PUNTOS PERTENECIENTES A LA PARÁBOLA

Presentamos a continuación algunas actividades pensadas para estudiantes de bachillerato para trabajar en el tema cónicas.

Actividad 1

No se conserva la demostración dada por Menecmo sobre el problema de la duplicación del cubo, pero en el libro Lugares Geométricos. Cónicas (del Río, 1996, p. 14) aparece una posible demostración, que pudo haber sido elaborada por él.

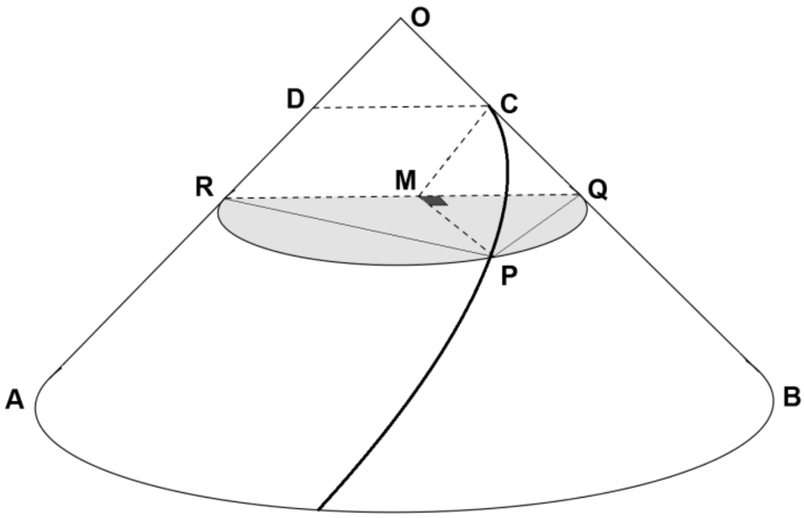


Figura 1

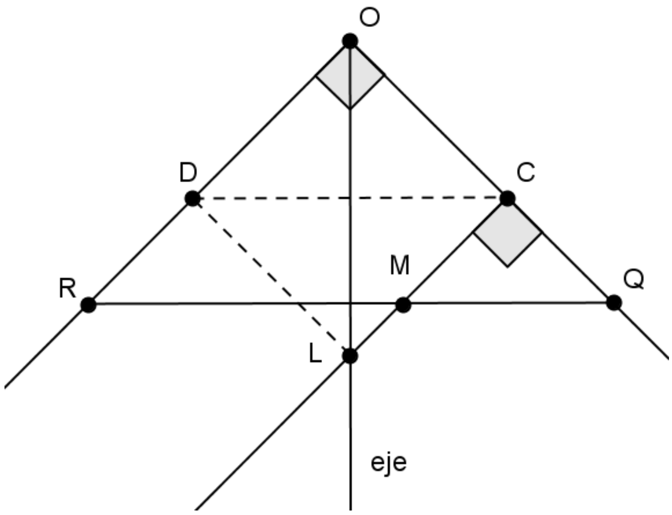


Figura 2

En la figura 1 se visualiza la situación en el espacio según la interpretación de Menecmo, el plano de sección es perpendicular a la recta OB. La curva obtenida será una parábola, sobre la misma se considera un punto P cualquiera perteneciente a ella y el plano perpendicular al eje por P que determinará una circunferencia de diámetro RQ al seccionar al cono. En el segundo dibujo aparece la sección del cono con el plano ORQ.

a. Responde utilizando la figura 1.

Clasificar el triángulo (PQR) y justificar.

Si M es el pie de la altura respecto de P entonces PM^2 = ________. *¿Por qué?*

b. Responde utilizando la figura 2.

Se considera el punto L intersección del eje del cono y la recta CM.

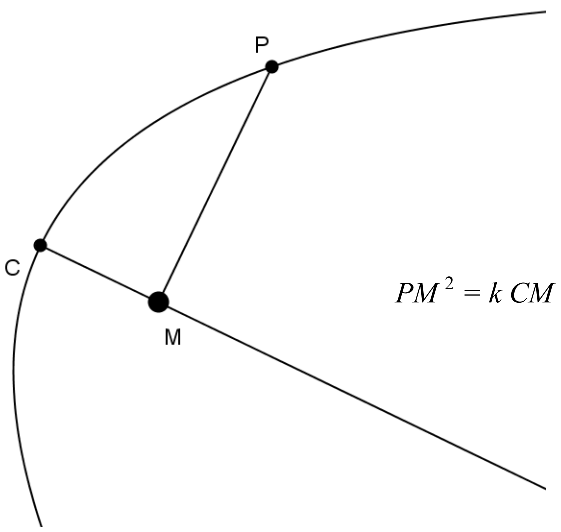
Como (RMCD) es un paralelogramo entonces RM = ________.

Como (LCOD) es un cuadrado entonces DC = ______ *LC.*

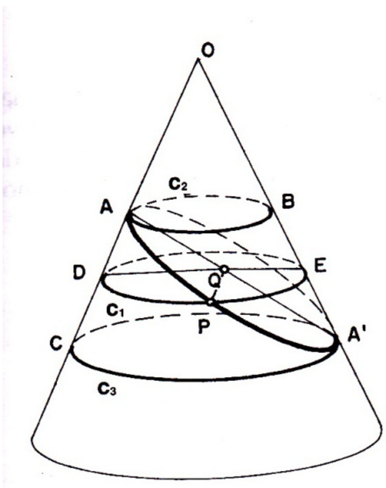
Como (CMQ) es un triángulo rectángulo e isósceles entonces MQ = ______ *CM.*

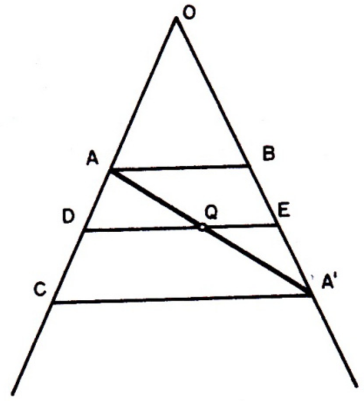
Se deduce que $PM^2 = MR.MQ$ = ______________________________ $= 2\ .CM.CL$.

Si se analiza la situación planteada tenemos que el punto *P* es un punto cualquiera sobre la parábola, quedando *M* determinado en función de este, sin embargo, el punto *L* es un punto fijo por lo que *CL* es una constante, también será constante *2CL*, de aquí en adelante llamaremos *k* a este valor.



La condición que cumplen los puntos de la parábola entonces es que $PM^2 = k\ CM$.



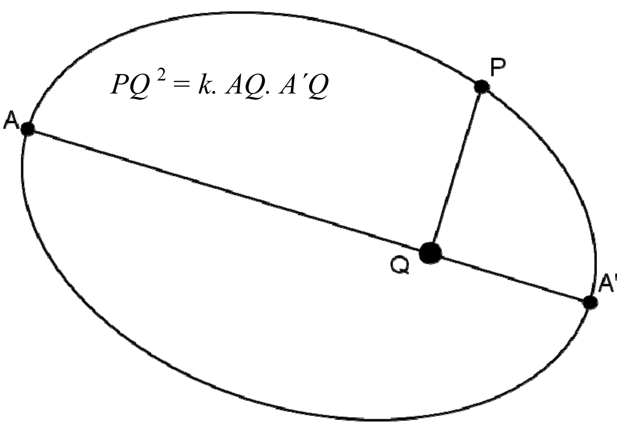


Seccionamos el cono con un plano, obteniendo la elipse que se observa en la figura. Sea P un punto cualquiera de la elipse y C_1, C_2 y C_3 secciones circulares por P, A y A’ respectivamente, generadas por planos perpendiculares al eje del cono. El punto Q es la proyección ortogonal de P sobre la recta DE (se puede probar que $Q \in AA'$).

En triángulo DPE es rectángulo P pues DE es diámetro de C_1, entonces, por el teorema de la altura, se cumple que $PQ^2 = DQ.QE$ (*).

Los triángulos ADQ y $AA'C$ son semejantes entonces $\frac{DQ}{AQ} = \frac{CA'}{AA'} \Rightarrow DQ = \frac{AQ.CA'}{AA'}$.

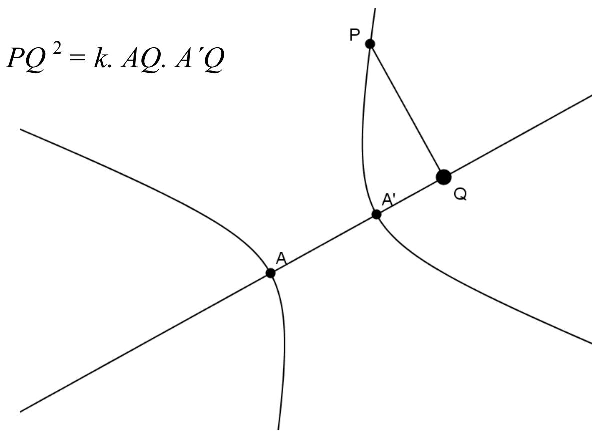
Los triángulos EQA' y BAA' son semejantes entonces $\frac{QE}{A'Q} = \frac{AB}{AA'} \Rightarrow QE = \frac{AB.QA'}{AA'}$.



Sustituyendo en (*) tenemos que $PQ^2 = \frac{AQ.CA'}{AA'} . \frac{AB.QA'}{AA'}$ entonces $PQ^2 = \frac{AB.CA'}{AA'^2} .AQ.A'Q$.

Tenemos que $\frac{AB.CA'}{AA'^2} = k$ pues no depende del punto P elegido, entonces se puede decir que si P pertenece a la elipse se cumple que: $PQ^2 = k.AQ.A'Q$.

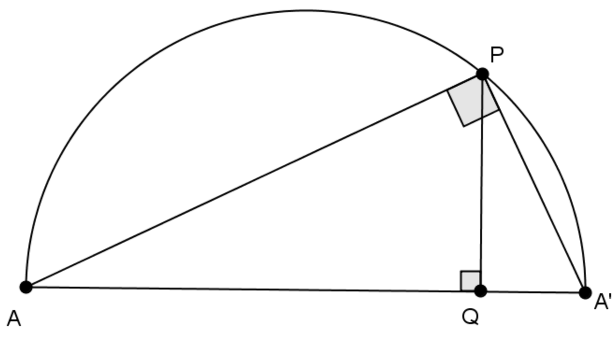
Análogamente se puede decir que todo punto que pertenece a una hipérbola cumple la condición: $PQ^2 = k.AQ.A'Q$.



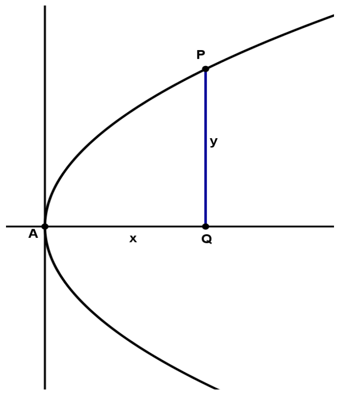
Actividad 2

Desde la antigüedad se sabía que todo triángulo inscripto en una semicircunferencia era rectángulo y que se cumplía: $PQ^2 = AQ.A'Q$. Se supone que Apolonio intuyó que algo similar ocurría con las cónicas llegando a determinar las constantes obtenidas anteriormente

A partir de las igualdades anteriores vistas para la parábola, elipse e hipérbola escribe las ecuaciones en función de a, x e y.

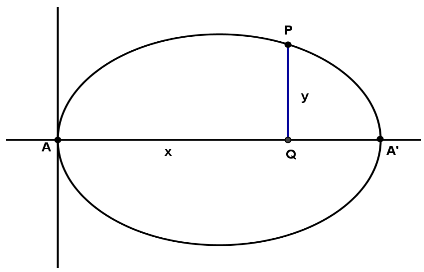


Parábola



$$PQ^2 = k.AQ$$

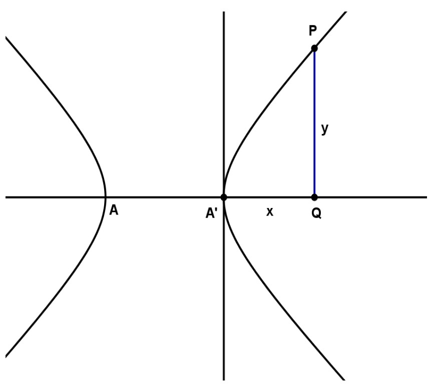
Elipse



Con $AA' = 2a$

$$PQ^2 = k.AQ.A'Q$$

Hipérbola



Con $AA' = 2a$

$$PQ^2 = k.AQ.A'Q$$

Se espera que los estudiantes arriben a las siguientes ecuaciones:

a) Parábola: $PQ^2 = k.AQ$ por lo que $y^2 = kx$.

b) Elipse: $PQ^2 = k.AQ.A\'Q$ por lo que $y^2 = k(2a - x)x$ siendo entonces $y^2 = 2akx - kx^2$.

c) Hipérbola: $PQ^2 = k.AQ.A\'Q$ por lo que $y^2 = k(2a + x)x$ siendo entonces $y^2 = 2akx + kx^2$.

LADO RECTO

Se denomina lado recto (l) al coeficiente de x en las expresiones anteriores. Obtenemos de esta forma las siguientes igualdades:

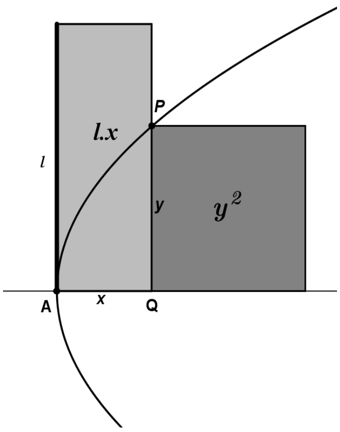
a) Parábola: $y^2 = lx$ (siendo $l = k$)

b) Elipse: $y^2 = lx - kx^2$ (siendo $l = 2ak$)

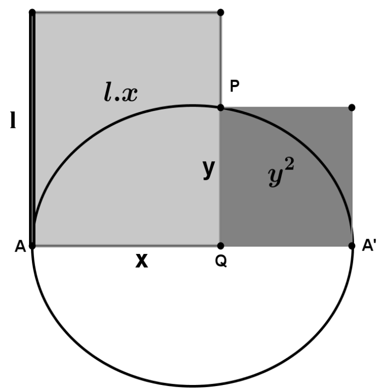
c) Hipérbola: $y^2 = lx + kx^2$ (siendo $l = 2ak$)

Observando las ecuaciones se puede deducir que:

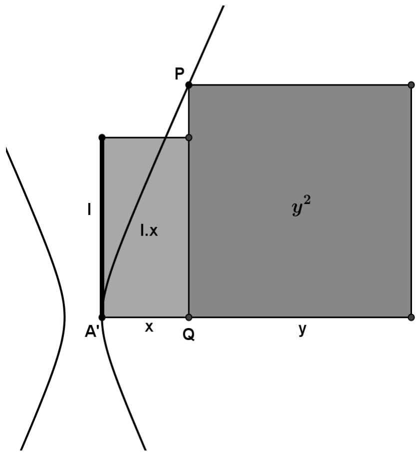
En la parábola $y^2 = lx$



En la elipse $y^2 < lx$



En la hipérbola $y^2 > lx$



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berlinski, D. (2006). *Ascenso Infinito. Breve historia de las Matemáticas*. Barcelona: Debate.

Boyer, C. (2007). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Casanova, G. (2009). Cónicas por siempre. *Revista Argentina de psicopedagogía*, 62, 20-32.

Contreras, A., Contreras, M., García, M. (2002). Sobre la geometría sintética y analítica: la elipse y sus construcciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5 (2), 111-132.

Crombie, A. (1995). Grandes matemáticos. Temas 1. *Ciencia e investigación*, 1, 18-24.

Cyrulies, E. (2011). Generación de cónicas con luz láser. *Revista Eureka*, 8 (2), 196-200.

Del Río Sánchez, J. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Editorial Síntesis.

Eves, H. (1985). *Estudio de las Geometrías. Tomo 1*. México: Editorial Hispanoamericana.

Ibañez Torres, R. (2002). Secciones Cónicas. *Revista Sigma*, 20, 12-38.

Montesinos Sirera, J. (1996). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo 2*. Madrid: Euler Editorial.

Rooney, A. (2009). *Historia de las matemáticas*. Barcelona: Ediciones Oniro.

Vera, F. (1948). *Breve historia de la geometría*. Buenos Aires: Editorial Losada.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* Moscú: Editorial Mir.