IGNACIO STAFFORD (1599-1642) Y SUS *ELEMENTOS MATHEMATICOS* (1634)

JUAN NAVARRO LOIDI
Cátedra Sánchez Mazas (UPV-EHU)

Resumen

En este artículo se estudia el libro *Elementos Matemáticos* de Ignacio Stafford, comenzando por presentar la vida de su autor, que nació en Inglaterra y se formó como jesuita en España, para ser posteriormente profesor de matemáticas en el Aula da Esfera de Lisboa. El libro está escrito en castellano, pero lo imprimió Stafford para usarlo en sus clases en Portugal. Es una versión pedagógica de los libros I a VI y XI de los *Elementos* de Euclides, lo que se comprueba comparándola con las ediciones de los *Elementos* publicadas en español, inglés o latín, por Zamorano, Carduchi, Billingsley, Clavius, Tacquet o Simson. Se observa que se inspira principalmente en la versión latina del también jesuita Clavius, pero adaptándola y simplificándola mucho para utilizarla con alumnos sin formación previa. Los cambios introducidos por Stafford en los *Elementos*, quitando los libros sobre aritmética e irracionales, reduciendo la importancia del formalismo y acudiendo a la intuición geométrica para simplificar enunciados y demostraciones, tienen la misma orientación que los que introdujeron más tarde Tacquet, y otros autores de versiones pedagógicas de los *Elementos*.

Abstract

This paper studies *Elementos Matemáticos* by Ignacio Stafford, starting with a description of the life of the author, who was born in England, trained as a Jesuit in Spain, and became professor of mathematics of the Aula da Esfera in Lisbon. The book is written in Spanish, but was printed by Stafford to be used in his courses in Portugal. It is a pedagogical edition of books I to VI and XI of Euclid's *Elements*, what is verified comparing it with the editions of Euclid's *Elements* published in Latin, Spanish or English, by Zamorano, Carduchi, Billingsley, Clavius, Tacquet or Simson. It can be noticed that Stafford followed principally the Latin version of his fellow Jesuit Clavius, but modifying and simplifying a lot to use in elementary teaching. The changes introduced by Stafford, removing books on arithmetic or irrationals, undervaluing formalistic questions and using geometrical intuition to simplify statements and demonstrations, have the same orientation as those introduced later by Tacquet, and other subsequent editors of pedagogical versions of Euclid's *Elements*.

Palabras clave: *Elementos* de Euclides, Geometría, Portugal, España, Jesuitas.

Key words: Euclid's *Elements*, Geometry, Portugal, Spain, Jesuits.

Recibido el 26 de junio de 2018 — Aceptado el 20 de diciembre de 2018

1. Introducción[1]

El jesuita Ignacio Stafford, es un autor ignorado en España, aunque publicó sus obras en castellano. Es más conocido en Portugal donde fue profesor de matemáticas en el "Aula da Esfera" del Colegio de Santo Antão de Lisboa. La primera parte de este artículo se va a dedicar a revisar su vida y su obra, ampliando la información que se tiene sobre su formación en España. En la segunda parte se va a estudiar el libro titulado: *Elementos mathematicos por el Padre Ignacio Stafford de la Compañía de IHS A la Nobleza Lusitana. En la Real Academia Mathematica del Colegio de San Antõ de la Compañía de Iesus de Lisboa. En Lisboa Año de MDCXXXIV.*

Por su división en libros, por el contenido que tiene cada uno de ellos y por la forma en que se razona, se va a constatar que se trata de un manual de geometría inspirado en los *Elementos* de Euclides, pero adaptado para utilizarlo en la enseñanza elemental.

Escrito en español para alumnos portugueses, y publicado poco antes del comienzo de la Guerra de Restauración portuguesa, el libro ha quedado olvidado. Sin embargo, tiene importancia porque es la segunda impresión en español de los *Elementos* y porque sirve para ver la evolución de la didáctica de la geometría durante esos siglos.

2. Vida de Ignacio Stafford[2]

Ignacio Stafford, se llamaba en realidad Robert Badduley. En esa época los jesuitas ingleses usaban a menudo seudónimos por la persecución que sufría el catolicismo en Inglaterra. Stafford también utilizó como alias Ignacio Lee, y a veces su nombre se da latinizado y se le llama Robertus Baduleius [Henson, 1930, p. 521] o castellanizado como Ignacio Leo [AHL, 1619, 1622, 1628]. En este artículo se va a utilizar Ignacio Stafford porque es como firma los *Elementos Mathematicos* y todos los escritos que se conservan.

Era hijo de John y Anne Badduley y nació en Staffordshire (Inglaterra) en 1599. Su familia era católica y la enseñanza del catolicismo estaba prohibida en Inglaterra por lo que abandonó su patria, junto a su hermano William, para venir a España a formarse en sus creencias. Entró el 22 de junio de 1616 en el Colegio Inglés de San Albano de Valladolid [Henson, 1930, p. 521], que estaba regido por los jesuitas y el joven Robert entró en la Compañía el 10 de octubre de 1618, siendo enviado al noviciado de Villagarcía de Campos (Castilla)[3].

Figura 1. Ignacio Stafford (1634) *Elementos Mathematicos*. Lisboa. Mathias Rodrigues.

Acabado el noviciado volvió al Colegio de San Albano donde estuvo de 1620 a 1625 [Leitão y Martins, 2008, p. 137]. En dicho colegio estudió la Teología [AHL, 1622]. Su hermano William dejó el Colegio de Valladolid para ir al colegio inglés de St Omer donde entró también en la Compañía de Jesús en 1622.

Ignacio fue enviado a Lisboa en 1625 [Leitão y Martins, 2008, p. 137] como confesor de angloparlantes de la capital portuguesa. Pero, en 1628 estaba de nuevo en Valladolid. En el Catálogo trienal de ese año aparece en San Albano el padre Ignacio Leo de Stafford (Inglaterra), que había sido ordenado y había terminado los estudios de filosofía y teología [AHL, 1628]. El 6 de mayo de 1630 Ignacio volvió a Lisboa [Henson, 1930, p. XXVII].

En la década, de 1630 a 1640, fue profesor de matemáticas en el Colegio de Santo Antão[4]. Publicó *Elementos Mathematicos* en Lisboa en 1634, y en 1639 *Historia de la celestial vocación, vissiones apostolicas y gloriosa muerte del Padre Marcelo Fran[cis]co Mastrili*, también en Lisboa.[5] Los doce manuscritos suyos que figuran en *Sphaera Mundi* [Leitão y Martins, 2008, p. 138-154] tratan de paralajes, estrellas fijas, globos celestes y terrestres[6], la pantómetra[7], fortificación, aritmética, geometría y logaritmos, y también son de esa década.

Aunque en ese tiempo trabajó principalmente en Lisboa no dejó de estar en contacto estrecho con los jesuitas de Valladolid. Se sabe que envió alumnos a perfeccionarse al Colegio de San Albano porque un alumno suyo, llamado Velez, al que había recomendado para que estudiara teología en San Albano, causó muchos problemas en el Colegio en 1634 [Williams, 1986, p. 44]. Además residió cierto tiempo en Castilla, puesto que en el catálogo trienal de 1636 de la provincia castellana figura el Padre Ignacio Stafford, ya no se le llama Leo, que no está entre los jesuitas de San Albano, sino en el apéndice de ”extravagantes”, es decir de religiosos que no están adscritos a una residencia [AHL, 1636]. Además se le califica de “escolar” por lo que es posible que estuviera en España preparándose para el cuarto voto, que profesó el año 1636.

Volvió a Lisboa y, a comienzos de 1640, salió para Brasil como confesor de *Dom* Jorge Mascarenhas marqués de Montalvão, que había sido nombrado virrey de Brasil por Felipe IV. Ese año se produjo un levantamiento en Portugal y el 1 de diciembre de 1640 João IV fue proclamado rey. El nuevo rey dudaba de la lealtad de Mascarenhas[8] y le destituyó. Ignacio Stafford volvió con él a Lisboa en 1641. Poco después, el 11 de febrero de 1642, murió en la Casa Profesa de S. Roque de Lisboa [Leitão y Martins, 2008, p. 137].

Stafford se formó como religioso en Castilla, por lo que no resulta sorprendente que prefiriera escribir y enseñar en castellano. Sin embargo no es tan razonable que enseñara en castellano matemáticas, porque no parece que aprendiera dicha ciencia en España. Ninguno de los estudios sobre la enseñanza de las matemáticas en los colegios de la Compañía de Jesús en España en el siglo XVII le menciona, ni dice que hubiera en algún momento un profesor de matemáticas en Valladolid, ni en el Colegio inglés de San Albano, ni en el Colegio de San Ambrosio, ni en la casa profesa, ni tampoco en el noviciado de Villagarcía de Campos [DOU, 1997; UDIAS, 2005; UDIAS, 2010]. Por esas fechas enseñó ciencias exactas en el Colegio Imperial de Madrid Hugh Sempil, que fue director del Colegio Escocés de Madrid; pero no se ha encontrado ninguna relación de Stafford con él[9]. Tampoco se han hallado contactos de Stafford con otros matemáticos jesuitas del Colegio Imperial, donde existió en esa época un grupo de profesores prestigiosos como Della Faille o Claude Richard[10]. Por todo ello, lo más probable es que se formara como matemático en Lisboa, en su estancia a partir de 1625. En esas fechas coincidió con el jesuita alemán Johan Chrysostomus Gall, que en 1629 pasó a Goa y con el milanés Cristophoro Borri, que en 1631 estaba en Roma, los dos buenos matemáticos.

3. EL AULA DA ESFERA

Los *Elementos Mathematicos* los dedicó Stafford "A la Nobleza Lusitana en la Real Academia Mathematica del Colegio de S. Antõ de la Compañía de Iesus de Lisboa". A dicha Real Academia se le conoce por el "Aula da Esfera" y fue donde Ignacio Stafford fue profesor de matemáticas durante varios años.

El Aula da Esfera se creó cuando el rey de Portugal encargó a los jesuitas la formación teórica de los marinos y les subvencionó una cátedra especializada en esas materias en el Colegio de Santo Antão de Lisboa [OLIVEIRA, COSTA y MENEZES, 2017]. En esa aula los alumnos no eran jesuitas, ni se seguía la *Ratio Studiorum*, como en los colegios de la Compañía de Jesús [BALDINI, 2004]. Se daba una formación básica en aritmética y geometría y se estudiaba astronomía, geografía y principalmente navegación. El programa dependía mucho de la personalidad del profesor. Después de 1640, con la guerra de Restauración, además de a la navegación comenzó a darse importancia a la fortificación y a otras artes militares.

Los jesuitas portugueses no tenían bastantes religiosos con una formación matemática suficiente para impartir esas clases por lo que hasta 1640 muchos profesores del Aula fueron de otros países[11], como Grienberger que procedía de Hall en el Tirol, Lembo que era italiano de Benevento, Gall alemán de Constancia o Borri que era milanés. Los sucesores de Stafford tampoco fueron portugueses: Fallon era irlandés, aunque se formó en Coimbra, Ciermans flamenco, y Uwens holandés de Nimega.

Los libros y manuscritos de los profesores de dicha Aula da Esfera que se enumeran en *Sphaera Mundi: A Ciência na Aula da Esfera* [LEITÃO Y MARTINS, 2008] tratan principalmente de astronomía, o astrología, navegación, arte militar, geografía e hidrografía. El único manual de geometría elemental es este libro de Stafford. Por otra parte, las lecciones eran en portugués, no en latín [BALDINI, 2004, p. 331] y la mayoría de esos textos están escritos en dicha lengua. Es cierto que Grienberger, Gall, Borri o Ciermans escribieron también obras en latín; pero Stafford es una excepción porque sus textos están mayoritariamente en castellano, De las trece entradas, entre libros y manuscritos científicos que figuran en *Sphaera Mundi,* seis están en español, tres manuscritos tienen partes en castellano y en portugués, y los cuatro que están en portugués fueron escritos por un alumno de nombre Francisco Melo. Todo indica que Stafford daba sus clases en castellano.

4. *Elementos Matemáticos*, un libro portugués escrito en castellano por un inglés

Aunque esté en castellano, el libro fue publicado en Lisboa cumpliendo las normas del reino de Portugal. Todas las licencias y permisos de publicación (del provincial de la Compañía de Jesús de Portugal, de la Inquisición portuguesa, del Consejo General, y del Ordinario de la diócesis) están escritas en portugués. Incluso la "Licencia del Rey", que firma el Cosmógrafo Mayor Antonio de Mariz Carneiro está en portugués, aunque el rey de Portugal en esa época viviera en Madrid.

En el libro no se da importancia a que se edite en castellano. Sin embargo en otras versiones en lenguas vernáculas de los *Elementos* de Euclides de la época se consideraba un éxito tenerlo en lengua vulgar. Zamorano contó con el apoyo real por publicar en castellano, como dice el Consejo Real en su aprobación:

> "Auiades passado mucho trabajo en que materia tan difficil y obscura, estuviesse clara en nuestra lengua, pero a la republica se le hauia hecho no pequeño beneficio por la necessidad que de esta obra tenia" [Zamorano, 1576, f. 2 r].

Tanbién Billingsley consideró importante que se publicara en inglés y en el prefacio "The translator to the reader" dice:

> "By meanes wherof, our Englishe tounge shall no lesse be enriched with good Authors, then are other straunge tounges: as the Dutch, French, Italian, and Spanishe" [Billingsley, 1570, s. p.].

También consideró la lengua en que se publicaba reseñable Carduchi, que imprimió su versión poco después de la de Stafford:

> "Y pretendo que a los que no supieren otra lengua que la castellana, animar y enseñar en estos elementos doctrina fácil con claridad, y brevedad" [Carduchi, 1637, s. p.].

En la segunda mitad del siglo XVII, cuando se habían publicado bastantes versiones en lenguas vernáculas dejaron de aparecer este tipo de comentarios. Pero esta versión de Stafford sería la segunda en español y que no tenga ningún comentario sobre el idioma parece una consecuencia de que el autor fuera inglés de nacimiento y publicara en castellano para unos discípulos de habla portuguesa.

Esas mismas circunstancias explican que siendo la segunda edición en español de los *Elementos* no figure en los diferentes estudios publicados sobre las traducciones de Euclides al castellano [VICENTE y ESTEBAN, 1989; VEGA, 1991; NAVARRO, 1996]. Al haber enseñado en Portugal no es extraño que se conozca poco su obra en España. Otros personajes de la época, como los portugueses Antonio de Nájera, Pedro Texeira o Juan Bautista Lavaña que trabajaron en España, también han sufrido en su notoriedad por su doble vinculación.

5. LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES EN EL SIGLO XVII

Stafford no menciona a Euclides en los *Elementos Mathematicos*. Pero, como se va a comprobar, esta obra sigue más de cerca el texto de Euclides que muchas publicaciones de la época que decían ser ediciones de los *Elementos* de Euclides.

Para comprobar que el libro de Stafford es una versión relativamente fiel de los *Elementos* se va a comparar con otros textos de aquella época que se presentaban como ediciones de los *Elementos* de Euclides. La comparación con el texto original no es posible. Los *Elementos* se escribieron hace más de dos mil años y no se conserva ninguna copia del texto primitivo. La redacción que ahora se cree que se ajusta mejor a lo que Euclides escribió es el resultado de investigaciones llevadas a lo largo de los siglos XIX y XX. Las versiones que se consideran más próximas al original siguen con pocas variaciones la publicada por I. Heiberg en 1888 como tomo V de la obra *Euclidis opera omnia*, que editó junto a H. Menge. Pero en este trabajo se va a tomar como referencia la versión inglesa de T. L. Heath *The thirteen books of the Elements* que es más accesible[12].

En los siglos XVI y XVII, la información que había sobre los *Elementos* era más pobre que la que se tiene ahora. Se consideraba que las mejores versiones eran las que se encontraban en algunos manuscritos griegos, que se pensaba, con razón, que eran más fieles al original y que mantenían mejor el rigor matemático que las procedentes de la tradición medieval latina de origen árabe. La edición de Federico Commandino (1509-1575) *Euclidis Elementorum Libri XV* (1572) fue la más correcta de las impresas en esa época; pero aquí se va a utilizar como referencia *Euclidis Elementorum Libri XV. Accesit liber XVI*, que publicó en 1574 el jesuita Christophorus Clavius (1537-1612) y que fue muy influyente, especialmente entre los jesuitas. Clavius sigue la versión de Federico Commandino, completándola con escolios, nuevos corolarios y demostraciones alternativas, propuestos por otros geómetras o encontrados por el propio Clavius.

En el siglo XVI los *Elementos* de Euclides comenzaron a publicarse en lenguas vernáculas para utilizarlos en la formación de profesionales de la navegación, la arquitectura o la milicia, que en muchos casos ignoraban el latín. El libro de Stafford está escrito en castellano para la educación de marinos, y por eso se va a comparar también con las primeras ediciones en lenguas vernáculas. Como Ignacio Stafford nació en Inglaterra se va a cotejar su texto con la primera edición en inglés *The elements of geometrie of the most ancient philosopher Euclide of Megara* (1570) de Henry Billingsley (c. 1538-1606), versión enciclopédica como la de Clavius, que incluye muchas demostraciones alternativas, explicaciones y proposiciones añadidas, que provienen de Campano, Pelletier, Apolonio, Proclus, Tolomeo, Theon, Finé, Candale, Barlaam y Dee entre otros. Aunque se parezca a la edición de Clavius, las dos tienen diferencias notables[13].

Conviene compararla igualmente con la primera edición castellana publicada por Rodrigo Zamorano (1542-1620) *Los seis libros primeros de la Geometria de Euclides* (1576), versión fiel a los textos antiguos, sin añadidos ni explicaciones adicionales. También se va a considerar la versión de Luis Carduchi (m. 1657) *Elementos Geometricos de Euclides Philosopho Megarense* (1637), contemporánea a la de Stafford, menos cuidada que las anteriores, en la que se nota la influencia de la tradición árabe y latina medieval.

Las primeras impresiones en portugués son posteriores a este libro. La de Manoel de Campos (1681-1758) *Elementos de Geometria Plana e sólida segundo a ordem de Euclides* es de 1735 y la traducción de la versión de Simson hecha por João Angelo Brunelli, *Elementos de Euclides dos seis primeiros livros, do undécimo, e duodécimo,* es de 1768.

Finalmente, para tener en cuenta la evolución posterior, se va a considerar la edición del jesuita flamenco Andrea Tacquet (1612-1660) *Elementa Geometriae planae ac solidae. Nec non selecta ex Archimede theoremata* (1654), que fue muy influyente en las ediciones pedagógicas posteriores de los *Elementos*. Tacquet tuvo varios seguidores en la Península Ibérica, como Sebastián Fernández de Medrano (1646-1705), y Jacobo Kresa (1648-1715), en castellano, o Manoel de Campos en portugués. Se va a considerar igualmente el libro de Robert Simson (1687-1768) *Euclidis Elementorum* (1756) que se tradujo al portugués en 1768 y al español en 1774, y que podría ser el paradigma de las versiones posteriores más preocupadas por la fidelidad a Euclides y el rigor matemático que por la utilidad didáctica.

6. El libro de Stafford y el formalismo euclídeo

Para comprobar que la obra de Stafford es una versión de los *Elementos* de Euclides se van a considerar por un lado los aspectos formales, como la presentación o la estructura lógica del libro, y por otro lado su contenido matemático.

Comenzando por su estructura, los *Elementos* de Euclides se dividen en trece partes o capítulos, llamados libros. Las materias que se estudian son la geometría del plano, en los libros I a VI, la aritmética, en los libros del VII al IX, las cantidades irracionales en el libro X, y, finalmente, la geometría del espacio, del XI al XIII. Stafford tiene en su manual los libros I a VI de geometría plana y el libro XI sobre geometría del espacio. En las ediciones de esos siglos no era muy raro que sólo se imprimieran algunos libros. Zamorano y Carduchi sólo incluyeron los seis primeros libros de geometría plana. En el otro extremo, Clavius y Billingsley incluyen 16 libros, porque añadieron tres libros más. En las versiones posteriores fue muy corriente que se incluyeran los seis primeros libros de geometría del plano y los undécimo y duodécimo de geometría del espacio. Sobre esta cuestión se va a discutir más adelante al estudiar la forma en que justifica Stafford publicar sólo siete libros.

Una característica importante de los *Elementos* es la ordenación lógica de cada uno de los libros y de la obra en su conjunto. Se comienza con unas definiciones, en las que se establecen los objetos que se van a estudiar, unos postulados y unas nociones comunes, que son las afirmaciones que se suponen evidentes y de las que se parte para demostrar las proposiciones que son los nuevos conocimientos que se alcanzan en cada libro, y que se utilizan, a su vez, para demostrar las proposiciones posteriores. Además, pueden haber porismas, o corolarios, que son propiedades que tienen interés matemático, pero no son necesarias para el desarrollo del libro, y alguna vez lemas, que son teoremas que se han aceptado como demostrados para facilitar un razonamiento, pero se demuestran posteriormente. Además en las ediciones de estos siglos había explicaciones o escolios, demostraciones alternativas e incluso problemas de aplicación, que no estaban en el original.

Actualmente se considera que en la obra escrita por Euclides esos apartados se distribuían de la siguiente forma:

Libro	*Definiciones*	*Proposiciones*	*Porismas*	*Lemas*	*Postulados*	*Nociones Comunes*
I	23	48	0	0	5	5
II	2	14	0	0	0	0
III	11	37	1	0	0	0
IV	7	16	1	0	0	0
V	18	25	2	0	0	0
VI	3	33	3	0	0	0
VII	22	39	1	0	0	0
VIII	0	27	1	0	0	0
IX	0	36	1	0	0	0
X	16	115	6	11	0	0
XI	28	39	2	1	0	0
XII	0	18	3	2	0	0
XIII	0	18	2	3	0	0

En los *Elementos de Mathematicas* de Stafford los apartados tienen una distribución similar, sin ser exactamente la misma:

Libro	*Definiciones*	*Proposiciones*	*Corolarios*	*Axiomas*
I	23	48	20	9
II	2	14	2	0
III	9	37	11	0

IV	7	16	1	0
V	18	34	2	0
VI	7	33	8	0
XI	30	40	3	0

Tampoco coinciden exactamente con la distribución de Euclides las otras versiones de los *Elementos* que se ha propuesto comparar con la de Stafford. Tomando solamente el libro primero y excluyendo los escolios se tiene:

Autor	*Definiciones*	*Proposiciones*	*Porismas*	*Postulados*	*Nociones Comunes*
Billingsley	35	48	10	6	9
Clavius	36	48	13	4	20
Zamorano	35	48	0	5	10
Carduchi	29	48	0	7	9
Tacquet	39	48	18	3	14
Simson	35	48	18	3	12

La diferencia más importante entre la redacción de Stafford y las restantes es que agrupa todas las afirmaciones que se suponen evidentes en un apartado de "axiomas", mientras que en la mayoría de las versiones se diferenciaban dos tipos de principios supuestos verdaderos: los "postulados" y las "nociones comunes", como se cree que se hacía en el texto primitivo [Heath, 1956, vol. 1, 221-240]. Esta cuestión se va a analizar con más detalle al estudiar el libro primero.

Stafford divide las proposiciones en teoremas y problemas, según se trate de demostrar una afirmación o de realizar una construcción. Se cree que Euclides no las diferenciaba, pero en el siglo XVII era habitual hacerlo y lo hacen todas las versiones con las que se compara esta de Stafford.

En cuanto a la presentación de las proposiciones, Euclides las dividía en seis partes: *Enunciado* en el que se dice lo que se quiere demostrar o lo que se quiere construir; *Exposición*, en la que se concretan los datos del enunciado en un dibujo o se dan los objetos que van a intervenir; *Especificación*, que precisa las condiciones que deben cumplir los datos del enunciado, cuando existen condiciones a cumplir; *Construcción* en la que se completa el dibujo añadiendo las líneas, o números necesarios para poder demostrar el enunciado; *Prueba* en la que se justifican las construcciones realizadas y se dan los pasos lógicos precisos para obtener a partir de las hipótesis la tesis o la construcción deseada; *Conclusión* en la que se repite la parte del enunciado que indica lo que se quería lograr y se termina diciendo "Como queríamos demostrar" o "Como queríamos hacer". Stafford es menos formal y lo reduce prácticamente a dos pasos: el enunciado y la demostración o construcción. En el enunciado se muestra ya en un dibujo lo que se quiere demostrar o construir, por lo que incluye la exposición. En la demostración se hacen también las construcciones necesarias y se dan las condiciones a cumplir por los datos, cuando es preciso, por lo que van juntas especificación, construcción y demostración. La proposición se acaba cuando se llega al resultado o a la construcción buscada. No hay conclusión y nunca escribe "lo que se quería demostrar" o "lo que se quería hacer".

En el prólogo al lector Stafford justifica esta forma de abreviar diciendo que su manual es un "breve compendio" y quiere evitar las repeticiones que tienen la mayoría de los autores porque "desmayan al principiante y enfadan al perito" [STAFFORD, 1634, s.p.]. Los recortes dice que los realiza principalmente "en el quinto Elemento: porque muchos de sus Theoremas no necessitan mas prueva que el cotejo con los antecedentes" [STAFFORD, 1634, s.p.]. Pero al estudiar el contenido de los libros se va a ver que los cambios son más importantes en el undécimo, aunque los del quinto son más significativos.

Para entender la forma de presentar los *Elementos* de Stafford se debe tener en cuenta que el libro fue escrito como ayuda en la enseñanza de la geometría en el Colegio de Santo Antão de Lisboa. En consecuencia, aunque no lo diga, Stafford estaba más preocupado por cuestiones didácticas que por el rigor. Además en esa época había disminuido el respeto renacentista por los libros de la Antigüedad y estaba aceptado cambiar el texto de los *Elementos* para intentar mejorarlos.

Las otras ediciones con las que se está comparando el libro de Stafford son en general más fieles al formalismo de Euclides. Clavius y Billingsley dan las demostraciones completas sin abreviar ni cambiar el orden, aunque añadan muchas explicaciones, lo que Euclides no hacía. Zamorano es quien más se acerca a lo que ahora se cree que proponía Euclides, dando las demostraciones completas, pero sin añadir explicaciones "porque el auctor fue en esto tan ingenioso que el que quisiere, con facilidad puede, atendiendo bien a la letra, percebir el sentido y demonstracion de lo que el enseña." [ZAMORANO, 1576, f. 7 r.]. De los autores posteriores CARDUCHI [1637, s.p.] dice en el prólogo que quiere enseñar "con claridad y brevedad", pero no abrevia en las demostraciones, y añade explicaciones no siempre claras. Tacquet es quien más se aparta de Euclides, buscando facilitar la comprensión de los puntos más delicados, mientras que Simson por el contario pretendía volver a la perfección del texto primitivo de Euclides "quitando las cosas falsas, y nada exactas, que dieron por legítimos y verdaderos escritos del más diligente de los geómetras sus ignorantes Editores" [SIMSON, 1774, p. (20)].

7. EL CONTENIDO MATEMÁTICO DE LOS *ELEMENTOS* DE STAFFORD

Continuando con el contenido matemático del manual de Stafford se van a estudiar las materias que se tratan en cada uno de los libros de esta obra, viendo si se introducen variaciones respecto al texto de Euclides, y si los cambios son parecidos a los de las otras ediciones de referencia.

7.1. Libro Primero

Definiciones

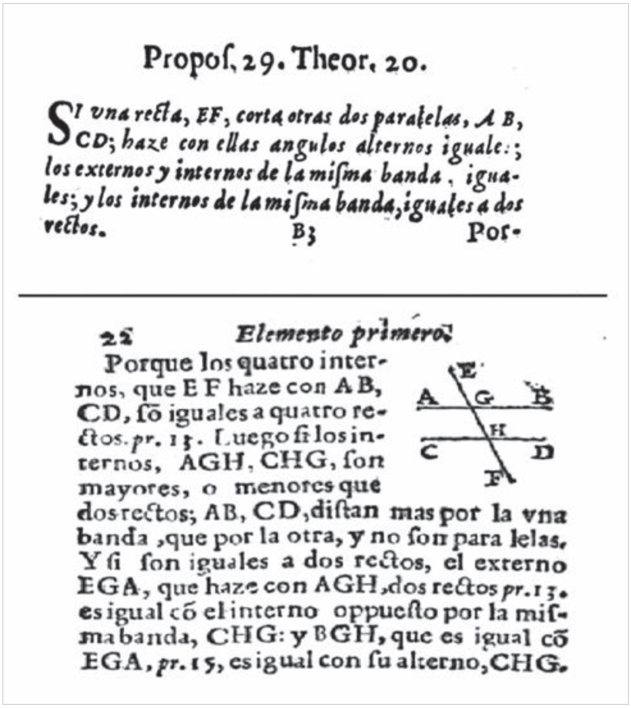
Stafford presenta 23 definiciones en las que introduce punto, línea, superficie, ángulo, tipos de ángulos, figura, círculo, triángulo y clases de triángulos, cuadriláteros y sus clases, y líneas paralelas. El número de definiciones coincide con el que se cree que tenía el texto original [Heath, 1956, vol. 1, p. 155-194], y es inferior al habitual en las ediciones de la época, como se ha visto. Pero los conceptos definidos vienen a ser prácticamente los mismos en todas ellas, y la diferencia en el número proviene de las distintas formas de agrupar las definiciones. Stafford define paralelogramo o figuras alrededor del diámetro que generalmente no están en otras versiones, aunque también los definen Tacquet y Clavius.

Stafford no explica las definiciones y en pocos casos ofrece dos redacciones distintas para un mismo concepto, en lo que se parece a Zamorano. Simson tampoco da explicaciones en las definiciones, pero al final del libro incluye un apéndice de "Notas" [Simson, 1774, p. 295-369] en el que critica algunas definiciones y proposiciones que juzga defectuosas y da alternativas que considera más correctas y conformes con la redacción de Euclides. Billingsley y Clavius ponen largas explicaciones en varias definiciones, lo que también hacen más brevemente Tacquet, y Carduchi.

Stafford utiliza para designar algunos conceptos términos que han caído en desuso, como "ysopluro o equilatero", "orthogonio", "ambligonio" u "oxigonio". Esas expresiones u otros semejantes se pueden encontrar también en Zamorano o Carduchi. Sin embargo, Stafford no introduce, como Carduchi, voces que proceden de Campano o de la tradición latina árabe, como "Rombo o Helmuayn" o "Trapecia o helmuaerife" [Carduchi, 1637, f. 7 v.]. La terminología matemática castellana no estaba completamente fijada en esas fechas.

Axiomas

Como se ha dicho Stafford pone nueve axiomas. Hoy en día se cree que Euclides enunciaba cinco postulados y cinco nociones comunes en el libro primero [Heath, 1956, vol. 1, 195-240] y que esa cantidad es muy insuficiente para desarrollar la geometría. Se piensa que la razón de esa división fue que los postulados se referían a cuestiones propias de la geometría, mientras que las nociones comunes eran reglas generales de la lógica. Stafford es el único que los unifica entre los autores que se están comentando, pero en otras ediciones de los *Elementos* también se hizo. Por ejemplo, el jesuita español José Zaragoza en su libro *Euclides nuevo-antiguo* (1678) comienza con un apartado titulado "Proemiales" [Zaragoza, 1678, p. 1-20] donde van cuatro axiomas y veinte apartados en los que se introducen los objetos de todos los libros de los *Elementos*, o a finales del siglo XVIII Legendre en su *Eléments de géométrie* (1794), en el que todavía se defiende el método de Euclides para introducir la geometría, comienza con definiciones y axiomas, como Stafford [Legendre, 1817, p. 6].



Propoſ. 29. Theor. 20.

SI vna recta, EF, corta otras dos paralelas, A B, CD; haze con ellas angulos alternos iguales; los externos y internos de la miſma banda, iguales; y los internos de la miſma banda, iguales a dos rectos. B3 Por-

22 *Elemento primero.*

Porque los quatro internos, que E F haze con A B, CD, ſõ iguales a quatro rectos. *pr.* 13. Luego ſi los internos, AGH, CHG, ſon mayores, o menores que dos rectos; AB, CD, diſtan mas por la vna banda, que por la otra, y no ſon para lelas. Y ſi ſon iguales a dos rectos, el externo EGA, que haze con AGH, dos rectos *pr.* 13. es igual cõ el interno oppueſto por la miſma banda, CHG: y BGH, que es igual cõ EGA, *pr.* 15, es igual con ſu alterno, CHG.

Figura 2. Forma de soslayar el 5º postulado en la proposición I.29 [STAFFORD, 1634, p. 21-22].

Entre los axiomas que enumera Stafford se encuentran las nociones comunes de las versiones antiguas y alguna más de las que se añadían en el siglo XVII. Sin embargo le faltan varios de los postulados habituales, por ejemplo el famoso quinto postulado, o de las paralelas. Los demás autores con los que se está comparando lo ponen dando el enunciado usual, aunque Clavius y Simson lo discuten. Esta cuestión se plantea de forma diferente en Tacquet porque define paralelas como líneas equidistantes [TACQUET, 1683, p. 9]. En general, Stafford tiene tendencia a no explicitar las nociones geométricas que le parecen intuitivamente evidentes, tanto en este apartado al enumerar los axiomas como luego en varias proposiciones al dar las justificaciones.

Proposiciones

Stafford trae 48 proposiciones. En ellas se explica cómo trasladar un segmento o un ángulo de un punto a otro, cómo construir triángulos equiláteros, isósceles o escalenos, la relación entre lados y ángulos en los triángulos o la igualdad entre ellos; se explica cómo trazar perpendiculares y paralelas a una recta, bisectrices a un ángulo o mediatrices a un segmento; se encuentra cómo son entre sí los ángulos formados al cortar una recta a dos paralelas, y las condiciones para que sean iguales las áreas de dos triángulos o cuadriláteros, acabando con el teorema de Pitágoras.

El número de proposiciones y sus enunciados son los mismos en todas las versiones consideradas. Las demostraciones de Stafford son más breves y menos formalistas que las de los restantes autores, salvo Tacquet. Así, por ejemplo, la demostración de la proposición 38 la da en dos líneas, o la de la 37 en tres. Esa parquedad crea algunas dificultades, sobre todo en las demostraciones por reducción al absurdo en las que no añade que el resultado es absurdo y tiene que ser cierto lo opuesto[14].

Aunque sean cortas, Stafford pone una demostración en todas las proposiciones. No dice, como Tacquet [1683, p. 15] en la proposición segunda (pasar un segmento de un punto a otro), que basta con trasladarlo con un compás, sin dar una demostración.

Cuando dos proposiciones tienen el mismo dibujo, Stafford las junta, dando primero los dos enunciados usando el dibujo común, y luego sus dos demostraciones, dibujando así menos figuras[15]. Tacquet y sus seguidores también lo hacen.

Finalmente, tiene más corolarios que los restantes autores; pero los corolarios de Stafford se pueden encontrar en el texto de Clavius, algunos como tales corolarios y otros como explicaciones de las proposiciones.

Una cuestión polémica de este primer libro fue el postulado de las paralelas. Como Stafford no lo incluye entre los axiomas, cuando se necesita en la demostración de la proposición 29 no puede citarlo y en su lugar razona "Luego si los internos AGH, CHG son mayores o menores que dos rectos; AB, CD distan más por la una banda que por la otra y no son paralelas" [Stafford, 1634, p. 22], lo que no es muy riguroso, y parece indicar que para Stafford era equivalente la definición de rectas paralelas como aquellas que por mucho que se prolonguen nunca se cortan y la de rectas equidistantes. Esa idea está también detrás de la demostración de Clavius[16] del postulado de las paralelas, que da en un escolio a la proposición 28 [Clavius, 1608, vol. 1, p. 89-98] después de haber criticado la demostración de Proclo de dicho postulado [Clavius, 1608, vol. 1, p. 84-89]. Pese a esa demostración, Clavius mantiene el quinto postulado, noción común 13 en su versión, con la redacción tradicional. En las versiones de Zamorano, Billingsley o Carduchi, se enuncia el postulado y en la proposición 29 se da la demostración de Euclides sin entrar en discusiones. Tacquet enuncia el 5º postulado de Euclides entre las nociones comunes, pero añade que a él, como a Proclo, no le parece un postulado y que en su lugar propone dos que dicen que una línea en la que todos los puntos equidistan de una recta es también una recta y que la perpendicular a una recta lo es también a sus paralelas [Tacquet, 1683, p. 11-12]. Simson no es muy riguroso en esta cuestión y define las paralelas como "XXXV Paralelas o equidistantes son las rectas que estando en un mismo plano prolongadas por ambas partes al infinito, jamás se encontraran." [Simson, 1774, p. 5] y en las nociones comunes enuncia el 5º postulado como axioma 12 sin alejarse de la redacción de Euclides; pero añade "véase las notas a la proposición 29 del Libro 1"

[SIMSON, 1774, p. 6]. En dicha nota al final del libro, se dice que "La Proposicion llamada vulgarmente Postulado V [...] no parece que debía colocarse entre las sentencias comunes o Axiomas no siendo por sí manifiesto; pero tampoco hablando en rigor admite demostración lo que necesita es alguna explicación" [SIMSON, 1774, p. 299] lo que es coherente con la doble definición de paralelas que ha adoptado, en la que indirectamente se acepta el 5º postulado.

7.2. Libro Segundo

Definiciones

En el libro segundo Stafford pone dos definiciones, las de rectángulo y gnomon, que son las que aparecen en todas las versiones estudiadas.

Proposiciones

Tiene catorce proposiciones, de las que las diez primeras tratan sobre las igualdades o diferencias que hay entre un rectángulo o cuadrado dado, y los que se obtienen dividiendo sus lados en partes o añadiendo o quitando segmentos a dichos lados. De las restantes proposiciones dos equivalen a lo que ahora se conoce por el teorema del coseno y las otras dos equivalen a la resolución de algunas ecuaciones de segundo grado, pero planteadas geométricamente. Los enunciados y las demostraciones de Stafford son similares a los que ahora se cree que puso Euclides [HEATH, 1956, vol. 1, p. 370-410] y a los de las otras versiones de la época con las que se están comparando los *Elementos Mathematicos*.

Un tema que surge en este libro es la posible interpretación algebraica de las diez primeras proposiciones. Stafford hace en todas ellas un planteamiento puramente geométrico, como Euclides. Pero, pone ejemplos con números detrás de cada una de dichas proposiciones y dice que lo hace porque: "quiero illustrar las demostraciones de los diez primeros theoremas deste elemento, explicandolas en numeros; pues lo admiten" [STAFFORD, 1634, p. 35]. En las versiones antiguas no están esos ejemplos y Zamorano y Carduchi tampoco los ponen; pero Clavius y Billingsley sí lo hacen. En las versiones pedagógicas posteriores, por el contrario, era habitual poner esos ejemplos, "porque da mucha luz à los principiantes el ver cada demostracion executada por la practica de los números", como dice FERNÁNDEZ DE MEDRANO [1728, p. 73]. Tacquet no los pone pero advierte: "Decem prima hujus libri theoremata etiam vera sunt in numeris" [TACQUET, 1683, p. 58].

Pese a que Stafford pone ejemplos con números, no introduce símbolos para simplificar la escritura. Posteriormente, Tacquet sí lo hace, por ejemplo usa "Æ" para indicar igual, y en castellano Zaragoza y Kresa usan "+" y "–". Más tarde aún, LEGENDRE [1817, p. 5] dedica una página a explicar los símbolos "+", "-", "=" etc… Simson, preocupado por la fidelidad a Euclides, no pone signos ni ejemplos numéricos.

7.3. Libro Tercero

Definiciones

En el libro tercero Stafford ofrece nueve definiciones, referidas a círculos, tangentes, cuerdas, sectores y ángulos en una circunferencia, y al ángulo de un segmento. Zamorano, Carduchi y Billingsley ponen diez porque dan la definición de segmento en el libro tercero, mientras que Stafford la incluyó en el libro primero. Tacquet tiene ocho, y Clavius y Simson tienen once definiciones, que según Heath [1956, vol. 2, p. 1-5] son las que tenía Euclides. Pero los objetos definidos son parecidos en todos ellos.

Proposiciones

Stafford tiene 37 proposiciones en este libro. En ellas se estudian las circunferencias, sus centros, diámetros y cuerdas, las circunferencias secantes o tangentes y la distancia de un punto interior a la circunferencia. También se demuestran propiedades de las tangentes a una circunferencia, y de los ángulos y los cuadriláteros inscritos en un círculo, se exponen las relaciones entre cuerdas y segmentos de dos círculos diferentes y se dice cómo se inscribe un ángulo en una circunferencia. Las últimas proposiciones tratan de la potencia de un punto respecto a una circunferencia. Son las proposiciones que se cree que tenía el original de Euclides y no se diferencia de las que tienen las otras versiones que se están manejando.

Como en los libros anteriores, Stafford tiene unas demostraciones más breves, y no da explicaciones ni escolios detrás de ellas, pero incluye 9 corolarios, que generalmente coinciden con los que pone Clavius. Se diferencia de nuevo por unir proposiciones, dándolas con un solo dibujo. En este libro junta las proposiciones 18 y 19, y las 28 y 29. Tacquet también lo hace, pero él junta las 5 y 6; 23 y 24; 26 y 27; y 28 y 29 y además no explica, por considerarlas innecesarias o ya demostradas, las 9, 23 y 24 lo que Stafford no hace.

7.4. Libro Cuarto

Definiciones

En este libro Stafford da siete definiciones sobre figuras inscritas o circunscritas en un círculo y círculos inscritos o circunscritos en una figura. Las otras versiones con las que se está comparando tienen las mismas definiciones, salvo Tacquet, o Fernández de Medrano, que las reduce a tres, pero los conceptos definidos son los mismos.

Proposiciones

Las proposiciones que tiene son 16. En ellas se estudia cómo inscribir o circunscribir triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos, hexágonos y pentadecágonos en un círculo. Las mismas construcciones se dan en las restantes versiones.

Stafford añade una explicación final sobre la posibilidad de inscribir o circunscribir otras figuras regulares con más lados, por ejemplo trazando las bisectrices de los ángulos, y añade que podría inscribirse cualquier figura si se pudiera generalizar el método de los triángulos isósceles con los ángulos de la base dobles al del vértice, utilizado para inscribir el pentágono; pero "hasta aora no se ha hallado geométrica construcción destos tales isosceles" [STAFFORD, 1634, p. 92] y critica a Oronce Finé por el método para hallarlos "que erradamente fabrico".

CLAVIUS [1608, vol. 1, p. 336-350] pone también un largo escolio en el que discute sobre la posibilidad de generalizar la inscripción o circunscripción a polígonos regulares con más lados, del que la explicación de Safford es un resumen. Sorprende que éste último no diga en su síntesis, dirigida a portugueses, que quien criticó el método de Finé fue el portugués Pedro Nunes[17], como hace CLAVIUS [1608, vol. 1, p. 346].

BILLINGSLEY [1570, f. 124 v.] añade igualmente un comentario final sobre la inscripción y circunscripción de otros polígonos, diferente al de Clavius, diciendo que es "An addition of Flussates"[18].

Tacquet pone también un escolio diciendo que no se ha encontrado la forma de inscribir esos polígonos; pero añade que se puede hacer de modo "mecánico" dividiendo 360º entre el número de lados.

Otra cuestión relacionada con el libro IV es que, a partir de la segunda mitad del siglo XVII, varios autores de versiones pedagógicas dividían los Elementos en dos partes, en una iban los teoremas y la llamaban Geometría Especulativa, y en la otra iban los problemas y la llamaban Geometría Práctica. Este libro iba entero en la geometría práctica, porque como dice ZARAGOZA [1678, p. 71] "Todo el libro 4 de Euclides es práctico, y todas sus proposiciones son problemas, que tienen su lugar en la Geometria Practica." Ni Stafford ni los otros autores con los que se está comparando lo hacen.

7.5. Libro Quinto

Definiciones

Las definiciones que pone Stafford son 18 y tratan de partes, múltiplos, proporciones, antecedentes y consecuentes, igualdad y desigualdad entre proporciones, proporciones continuas, y proporciones que se obtienen a partir de otras permutando, invirtiendo, componiendo, dividiendo o convirtiendo las cantidades que intervienen. Las dos últimas definiciones son de igualdad ordenada e igualdad perturbada entre dos sucesiones de magnitudes.

En la introducción planteaba Stafford que el libro quinto es problemático y de acuerdo con esa idea introduce en él muchas explicaciones. En particular añade explicaciones a las definiciones, lo que no hacía en los cuatro anteriores. En esas aclaraciones Stafford pone ejemplos numéricos de lo definido, advirtiendo que, aunque las proporciones se hacen “principalmente entre cantidades continuas; se estiende a las discretas; y a las demas cosas que retienen algún ressabio de cantidad; como son vozes, lugares, movimientos, pesos, medidas, potencias &c.” [Stafford, 1634, p. 95]. Euclides en este libro define razones entre magnitudes sin pedir que sean medibles y, menos todavía, que tengan una unidad común y se puedan expresar como cociente de números enteros positivos. Stafford sigue el planteamiento de Euclides, pero los ejemplos numéricos muestran que le parecía más fácil explicar esta materia con fracciones que con las más abstractas razones de magnitudes.

Introduce la definición de proporcionalidad o analogía, que según Heath [1956, vol. 2, p. 109] era una interpolación habitual que estaba en Campano y en muchos manuscritos medievales. En ella se define semejanza en proporción como “mutua habitud en cantidad de dos magnitudes de la misma especie” [Stafford, 1634, p. 94]. Con esa definición se puede suponer que la proporción es una cantidad aunque sea en “habitud”, concepto que no se define, lo que acercaría las proporciones de magnitudes a los números fraccionarios. Pero en Euclides son dos conceptos distintos y Stafford mantiene esa diferencia dando la definición de igualdad de proporciones de Euclides:

> “8. Quatro o mas magnitudes son proporcionales: que es la primera 6, tiene con la segunda 3; la misma proporción que la tercera 8 con la quarta 4; quando los equimultiplices (qualesquier que sean) 12, 16 (o qualesquier otros) de la primera y tercera 6, 8 son de la misma suerte mayores, menores o iguales con los equimultiplices (qualesquier que sean) 9, 12 (o qualesquier otros) de la segunda y cuarta, 3, 4” [Stafford, 1634, p. 96].

Los ejemplos numéricos son de Stafford. Esta definición permite comparar razones de cantidades irracionales entre sí[19]. Pero, su aplicación es difícil.

Las definiciones que pone Stafford no son muy diferentes a las que según Heath [1956, vol. 2, p. 113-137] tenía la versión original. Stafford incluye además una definición de igualdad de proporciones para dos sucesiones de magnitudes, que está también en Clavius. Zamorano, Carduchi y Billingsley tienen 21 definiciones, a las que tiene la versión de Stafford añaden las de razón duplicada y triplicada y las de proporciones extendidas ordenadas y perturbadas, que agregó Zamberti [Billingsley, 1570, f. 136 r]. Simson pone además de las definiciones, cuatro axiomas.

La definición de igualdad de razones está con una redacción parecida en Zamorano, Clavius o Billingsley; pero no en Carduchi [1637, f. 76 v.] que da una definición incomprensible[20].

Andrea Tacquet no reduce el cambio a poner ejemplos con números. En su versión se dan tres redacciones diferentes para el libro V. En la primera, se dice que hay igualdad entre dos proporciones cuando el antecedente contiene o es contenido de la misma forma por el consecuente en las dos[21], suponiendo que existe alguna manera de medir la forma en que una magnitud contiene a otra, lo que reduce el libro V a una variante de la parte del libro VII de los *Elementos* que trata de fracciones numéricas. Con ese planteamiento muchas proposiciones resultan evidentes[22]. Tacquet da luego una segunda redacción[23] del quinto libro en la que propone la definición de igualdad de Euclides usando los equimúltiplos, pero no desarrolla todo el libro con ella. En la tercera exposición[24] llama "denominator" a la proporción entre dos cantidades y opera con esos "denominadores" como si fueran nuevas cantidades resultado de la división entre antecedente y consecuente, tanto para proporciones racionales como irracionales, estudiando luego las propiedades de las operaciones entre ellas.

Estas alternativas tuvieron seguidores. En español, Fernández de Medrano, después de dar la definición de igualdad de proporciones utilizando equimúltiplos, afirma que: "no tiene fuerza suficiente" y añade una segunda definición que dice: "Supóngase que A […] es a B, como C a D; digo que A ha de contener de necessidad tantas vezes qualquiera alicota o alicotas de B como C una semejante de D." [FERNÁNDEZ DE MEDRANO, 1728, 183]. Con esta definición las razones geométricas las toma como fracciones y su exposición es parecida a la primera forma de enfocar este libro de Tacquet. Kresa [1689] en su edición de los *Elementos* incluyó dos redacciones de este libro V. La primera es una traducción del libro de Euclides, y la segunda es una traducción adaptada de la tercera manera, la más algorítmica, que presenta Tacquet. Zaragoza en su versión de los *Elementos* define: "La razon es el respeto, o relacion de una quantidad a otra del mesmo genero" [ZARAGOZA, 1678, p. 12] y considera que "Todas las proposiciones de este libro son puros axiomas, que solo necessitan de explicacion, como lo advierte Pedro Ramo en sus Escuelas Mathematicas, y el P. Andrés Tacquet en su Geometria." [ZARAGOZA, 1678, p. 72].

Detrás de sus definiciones Stafford dice: "Hasta aqui las definiciones ordinarias deste elemento. Pero añadiré dos palabras de las varias especies de proporción" [STAFFORD, 1634, p. 100-106], y explica lo que son las proporciones racionales e irracionales, la proporción doble, triple..., y otras cuyos nombres han caído en desuso como las superparticulares (1 ½ a 1 ó 1 ¼ a 1), superparciente (como 1 ¾ a 1) o múltiples superpaticular (2 ½ a 1) etc. También define en esa explicación las progresiones aritmética (4, 7, 10…) geométrica (2, 6, 18…) y harmónica (3, 4, 6…). Estas explicaciones parecen más propias de un libro de aritmética.

Clavius también comenta detrás de las definiciones los nombres de diversas razones particulares, y explica las progresiones aritméticas, geométricas y armónicas como Stafford, pero dando a la materia mucha más amplitud [CLAVIUS, 1607, vol. 1, p. 354-444]. BILLINGSLEY [1570, f. 126 v.-128 r.], TACQUET [1683, p.164-165] y KRESA [1689, p. 149] sólo explican lo que son las razones dobles, superparticulares, etc….

Proposiciones

Stafford pone 34 proposiciones. Los enunciados expresan propiedades de las razones entre segmentos. Las seis primeras tratan de razones entre cantidades que tienen una unidad común y son equivalentes a propiedades de las fracciones. Las restantes proposiciones tratan de razones de magnitudes en general y podrían tener una interpretación algebraica sencilla como fracciones de números reales positivos[25]; pero esa interpretación no era posible con el desarrollo de las matemáticas del siglo XVII.

En las proposiciones en las que se debe demostrar la igualdad entre dos proporciones, Stafford debería comparar los equimúltiplos de antecedentes y consecuente de los dos lados de la igualdad, y lo mismo cuando se trata de desigualdades porque son las definiciones de Euclides que él ha recogido entre las suyas. Pero dicho método es difícil de aplicar y trata de evitarlo. De las seis proposiciones en las que, según Heath, Euclides utiliza esas definiciones en la demostración, Stafford sólo la usa en una, la proposición 22. En algunas la sustituye por una mención genérica sobre la proporción como "habitud" entre cantidades. Por ejemplo, en las proposiciones 8 y 10, que van juntas dice que "Entrambos theoremas constan claramente de la definicion de mayor proporcion que es mayor habitud en cantidad" [Stafford, 1634, p. 113]. Aunque Stafford no reduzca las proposiciones de este libro a propiedades de fracciones, como propone Tacquet en su primera redacción o hace Fernández de Medrano en su versión, las utiliza como referencia para facilitar la comprensión y evitar demostraciones difíciles. En las figuras pone números encima de los segmentos, para que el lector recurra a la interpretación aritmética en los enunciados o en los pasos que se dan.

Comparando con otras versiones de la época, se observa que Carduchi y Zamorano sólo tienen las 25 primeras proposiciones de Stafford, que son las que se cree estaban en las vesiones originales [Heath, 1956, vol. 2, p. 186]. Clavius y Billingsley ponen 34, como Stafford, pero explicando que las nueve últimas las añadió Campano. Simson pone 25 proposiciones, pero añade otras 9 más numerándolas de la A a la K. El desarrollo de Tacquet y de sus seguidores se aparta más del original y no demuestran muchas proposiciones porque las consideran evidentes.

Stafford hace un desarrollo del quinto libro intermedio entre los autores anteriores que mantenían el planteamiento de Euclides y los posteriores como Fernández de Medrano que lo reducen a un libro sobre fracciones para hacerlo más sencillo. Al final del quinto libro Stafford tiene un párrafo en el que se defiende de posibles acusaciones de reducir las proposiciones a propiedades de las fracciones numéricas, afirmando que "Si con ocasión de los numeros que añado en las figuras, uviere quien imagine que estrecho sus teoremas a un solo genero de proporcion, hallará el desengaño en sus demostraciones que son / universalissimas" [Stafford, 1634, p. 127-128]. Además se excusa por eludir los razonamientos con equimúltiplos diciendo "Quien quisiere rodear por los laberinthos de los equimultiplices podrá buscar el empleo de su antojo, en los excelentes Comentarios del Padre Christoval Clavio". Añade que quien lo haga podrá "de camino reconocer en los Escolios de las proposiciones 14, y 16, como este insigne Geometra confiessa que muchos de los teoremas que reuisten del aparato de los equimultiplices no necessitan de demonstracion alguna por ser, per se nota, los primeros principios; y más axiomas que theoremas" [Stafford, 1634, p. 128]. Pero Clavius, aunque diga que las proposiciones parecen axiomas, utiliza la definición de igualdad con equimúltiplos en las demostraciones, manteniendo el rigor de Euclides[26].

En la segunda mitad del siglo XVIII Simson volvió a defender el planteamiento original de este quinto libro, criticando la falta de rigor de los conceptos de "razón" y de "semejanza" de razones [SIMSON, 1774, p. 308] y citando a Barrow que decía: "nada hay en toda la Obra de los Elementos inventado con mayor sutileza, establecido con más solidez, ni tratado con más exactitud que la doctrina de los proporcionales" [SIMSON, 1774, p. 322].

7.6. Libro Sexto

Definiciones

En el libro sexto Stafford pone siete definiciones, en las que se dice lo que son figuras semejantes, y recíprocas, se explica en qué consiste cortar un segmento en media y extrema razón, lo que es la altura de una figura, la proporción compuesta y continuada, las proporciones dupla y tripla, y finalmente se definen paralelogramos excedentes o deficientes de otro paralelogramo.

HEATH [1956, vol. 2, p. 188-190] duda que en la versión original hubiera tantas definiciones, inclinándose porque sólo son primitivas las de figuras semejantes y media y extrema razón, y todas las demás fueron añadidas por matemáticos posteriores. Pero las versiones publicadas en esa época tienen todas esas definiciones, excepto las de proporción dupla y tripla, que suelen ponerla en el libro quinto. Zamorano y Carduchi tampoco incluyen las definiciones de proporción continuada, y la de paralelogramos excedentes y deficientes. De los autores posteriores Tacquet pone cuatro definiciones, las tres primeras de Stafford y la de sectores semejantes, y Simson pone las cuatro primeras de Stafford, aunque, en su opinión, la de figuras recíprocas es un añadido de algún ignorante.

Tiene interés la definición quinta de Stafford porque supone otro paso adelante en la interpretación algebraica de las proporciones:

> "5. Una proporción se dize compuesta de otras, quando su cantidad (que es el denominador que muestra la proporción que su antecedente tiene con el consecuente) consta de las de las otras multiplicada entre sí" [STAFFORD, 1634, p. 130].

Es decir, la composición de proporciones se define como un producto de cantidades. HEATH [1956, vol. 2, p. 189-190] duda que esta definición estuviera en el texto de Euclides, y hace notar que oculta un paso de proporciones geométricas a números. Esa definición la tienen Zamorano y Carduchi. CLAVIUS [1607, vol. 1, p. 532], como Stafford, da el nombre de "denominator" al valor de una proporción. BILLINGSLEY [1570, f. 154 r] lo llama "denominations of proportions" o "denominator". Esta tendencia a considerar las razones de magnitudes como una nueva magnitud aparece ya en autores anteriores como Regiomontano [MALET, 2006, p. 71].

Entre los autores posteriores Fernández de Medrano [1728, p. 225] también define razón compuesta como la obtenida por la multiplicación de las "denominaciones" de las razones. Tacquet había definido denominador de una proporción en el libro quinto[27] y en el libro sexto no incluye la definición de composición de proporciones. Kresa también define "denominador" en su segunda versión del libro quinto, sin embargo, en el libro sexto define la composición de razones como un producto de "cantidades" [Kresa, 1689, p. 224]. Simson no incluye la composición de proporciones.

Proposiciones

Stafford tiene en este libro 33 proposiciones. En las primeras se dice que el área de un triángulo es proporcional a su base y a su altura, y se demuestra el teorema de Thales, luego se trata de semejanza de triángulos y se enuncian los teoremas que ahora se llaman de la altura y del cateto. Se sigue con la división de una recta en partes proporcionales y la forma de hallar la tercera, cuarta y media proporcional de varios segmentos. Las proposiciones sucesivas tratan de la construcción y las propiedades de figuras semejantes. En la proposición 30 se explica cómo dividir un segmento en la razón áurea y en la siguiente se generaliza el teorema de Pitágoras. Las últimas proposiciones son sobre la proporcionalidad entre sectores y arcos.

Los enunciados y las demostraciones de las proposiciones que da Stafford son parecidos a los que se hacen en las otras versiones con las que se está comparando ésta. Tacquet y Simson tienen también 33 proposiciones. Pero Tacquet y sus segidores no demuestran varias proposiciones porque dicen que no tienen uso, mientras que Simson añade tres teoremas más. Billingsley añade también, detrás de la proposición 33, cinco proposiciones más tomadas de Candale. Ni Stafford ni ningún otro autor las incluye.

7.7. Libros Séptimo a Décimo, Décimo segundo a Décimo quinto.

Antes de empezar el libro XI Stafford explica por qué incluye solamente algunos libros de los *Elementos*:

> "En los seis elementos precedentes, he recogido lo que la geometría disputa principalmente de líneas, angulos; y figuras planas […/] Para lo qual era necessario ingerir lo que el quinto trata en terminos generales de la proporción. Menos necessarios son los elementos 7, 8 y 9 que tratan de números. Menos el 10 que trata de las magnitudes comensurables, y incomensurables; racionales, y irracionales" [Stafford, 1634, p. 159-160].

Sobre los libros que tratan de la geometría del espacio dice que:

> "Ni el 12, 13, 14 y 15 que tratan de los cuerpos solidos en particular, son de usos tan frequentes o importantes como el undécimo que disputa de ellos en terminos mas generales y comprehende en breve suma la Stereometria toda" [Stafford, 1634, p. 160].

Por todo ello concluye que sólo va a añadir a los ya expuestos el libro undécimo.

De las versiones con las que se está comparando, Zamorano y Carduchi sólo incluyen los seis primeros libros. Clavius y Billingsley, por su parte, tienen 16 libros en sus ediciones porque añadieron a los libros de Euclides otros tres, que Clavius consideraba que provenían el XIV y XV de Hipsicles y el XVI de François de Foix de Candale, mientras que Billingsley dudaba entre Hipsicles y Apolonio para los dos primeros[28]. En las versiones posteriores lo habitual fue incluir los seis primeros de geometría del plano y los XI y el XII de geometría del espacio. FERNÁNDEZ DE MEDRANO [1728, p. 254] lo justificaba así:

> "Pasando à tratar del Libro onzeno, advirtiendo aqui como el septimo y los demas dexo, porque es cosa que pertenece a los grandores incommensurables que requieren la Algebra, la qual se halla hoy en estilo mas claro y comprensible y por mas breve camino, à que llaman la Algebra Speciosa ó Analitica."

Su explicación parece válida. Se habían encontrado formas mejores para introducir la aritmética y el álgebra que la propuesta en los *Elementos* de Euclides. Tacquet también evita esos libros que tratan de aritmética y Simson tampoco los incluye. Manoel de Campos es menos crítico con esa parte de los *Elementos.* Pone el libro XIII porque, aunque "A materia não he muito necesaria aos Practicos; porem para os Theoricos, eu a julgo de summa importancia" [CAMPOS, 1735, p. 229], pero los libros aritméticos los deja para otro manual que trate sólo de esa materia. Los *Elementos* de Euclides se habían convertido en un manual de geometría, aunque Stafford lo titule *Elementos Mathematicos*.

Sorprende que Stafford no incluyera el libro XII, que contiene el cálculo del área del círculo, y de los volúmenes de cilindros, conos, pirámides y esferas, materias de mucha aplicación práctica. Tal vez no quiso hacer más difícil la obra con la introducción del método de exhausción utilizado por Euclides para demostrar varias proposiciones en el libro XII y difícil para principiantes. En las versiones posteriores es corriente que en lugar de la exhausción se use el método de las figuras que degeneran o terminan en otras, especie de límite con una definición más intuitiva que rigurosa, que propuso Tacquet y que simplifica las demostraciones del libro XII [NAVARRO, 2001].

7.8. Libro Undécimo

Definiciones

En este libro Stafford ofrece 30 definiciones en las que introduce las ideas de sólido, superficie, recta, plano, perpendicularidad, ángulo entre planos y entre recta y plano, figuras iguales o semejantes, ángulo sólido, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, y finalmente los cinco sólidos platónicos (cubo, tetraedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Las definiciones están menos cuidadas en este libro que en los anteriores. Por ejemplo, entre la definición 15 y 17, olvida la 16, que es la de centro de una esfera. HEATH [1956, vol. 3, p. 260-271] considera que en la versión primitiva había 28 definiciones, y de los objetos introducidos por Stafford no incluye el paralelepípedo. Billingsley pone 25 definiciones pero los objetos definidos coinciden con los de Stafford. Clavius añade dos definiciones sobre figuras inscritas y circunscritas que no incluyó Stafford.

Euclides agrupó en este libro todas las definiciones precisas para los tres libros de geometría del espacio, Stafford, que sólo incluyó uno, podría haber quitado las definiciones correspondientes al libro XII como esfera o cilindro, y al libro XIII como dodecaedro o icosaedro, pero no lo hizo. De los autores posteriores, Tacquet reparte las definiciones poniendo en cada libro las que le corresponden, así tiene 14 definiciones, en el libro XI, 6 en el XII y no da las de los sólidos platónicos que se estudian en el libro XIII, que no incluye. De los autores de versiones en castellano del siglo XVII, Fernández de Medrano da 32 definiciones en el libro XI y ninguna en el XII, como Clavius, mientras que Kresa sigue a Tacquet. Simson tiene trece libros y pone veintinueve definiciones, que considera que estaban en la redacción primitiva y agrega la de paralelepípedo como "Definición A".

Proposiciones

Stafford considera que en este libro debe haber 40 proposiciones. Las dos primeras tratan de la imposibilidad de que una recta, o triángulo, repose en más de un plano y la tercera dice que dos planos se cortan según una recta. Las proposiciones posteriores tratan del paralelismo y perpendicularidad entre planos, entre rectas y planos y entre rectas. De la 20 a la 26 se estudian los ángulos sólidos y desde la 27 hasta la última, se discurre sobre paralelepípedos y prismas y sobre sus volúmenes. Pero Stafford no da todas las proposiciones; las 11, 12, 22, 23, 26, 27, 30, 35 y 39 no figuran en su libro. No dice que falten ni por qué no las incluye; pero mantiene la numeración de las proposiciones por lo que es fácil deducir su ausencia.

Clavius o Billingsley también ponen 40 proposiciones en este libro, pero en su caso dan el enunciado y la demostración de todas. Lo mismo sucede en la versión de Simson, quien además añade tres proposiciones más. La manera de redactar este libro de Stafford es más parecida a la que adoptaron Tacquet, y sus seguidores, que también prescindían de varias proposiciones, aunque no siempre coinciden con las que no incluye Stafford[29]. Pero esos autores avisan y justifican el no poner esas proposiciones. Por ejemplo Fernández de Medrano [1728, p. 279] dice que "La proposicion 22, y 23 no son essenciales".

8. La influencia de los *Elementos de Mathematicas* de Ignacio Stafford

Posteriormente, la obra influyó en autores portugueses[30], mientras que en España fue desconocida[31]. El jesuita Manoel de Campos, que también fue profesor del Aula da Esfera, dice en el "Prologo ao leitor" de sus *Elementos de Geometria* que necesitaba una edición de los *Elementos* de Euclides para utilizarla en sus clases y por eso imprimía el libro, aunque hubiera podido "estampar segunda vez os *Elementos* do Padre Stafford, o qual sendo Mestre da mesma Aula estampou huns *Elementos* em lingua catelhana" pero "aquella obra foy feita com muita presa" [Campos, 1735, s.p.], y prefiere seguir los *Elementos* del Padre Tacquet, que eran los usados ordinariamente en la Compañía de Jesús, y sumamente estimados en todas las naciones, introduciéndoles pocos cambios "salvo a da língua, que por servirem a todos, me soy aconselhado, ou mandado, que fosse na Portugueza" [Campos, 1735, s.p.].

9. Conclusión

Ignacio Stafford fue un jesuita inglés que se formó en España, y que fue enviado a Lisboa donde trabajó como profesor preparando a futuros navegantes y otros profesionales. Aunque durante buena parte de su vida residió en Castilla su actividad científica se desarrolló en Portugal, y eso explica que sea desconocido como matemático en España. No se ha podido determinar con quién aprendió matemáticas.

Imprimió *Elementos Matemáticos* (1634) para usarlo como manual en sus clases en el Aula da Esfera de Lisboa. La obra es una versión pedagógica de los libros I a VI y XI de los *Elementos* de Euclides, en la que se tratan las materias de esos libros con el método propio de Euclides, pero buscando en primer lugar su utilidad pedagógica. No es una versión ampliada con explicaciones o nuevos teoremas, como podían ser las de Clavius y Billingssley, ni una traducción fiel al original como la de Zamorano. Se basa principalmente en *Euclidis Elementorum Libri XV. Accesit liber XVI,* de Christophorus Clavius, como se puede deducir de que Clavius es el único autor recomendado a los lectores, de que las explicaciones añadidas en los libros IV y V son un resumen de las que pone Clavius, o de que los corolarios que incorpora Stafford coinciden muy a menudo con los que trae Clavius. Pero los dos libros tienen orientaciones muy diferentes.

Stafford es menos fiel al texto de Euclides que otros autores de su tiempo. Introduce muchos cambios en la obra, simplificando demostraciones, evitando las cuestiones difíciles y rebajando el rigor lógico de Euclides para facilitar la comprensión. Pone ejemplos numéricos en los libros II y V, acude a la semejanza entre las razones de magnitudes y de números para facilitar la comprensión y simplificar las proposiciones en los libros V y VI, junta proposiciones que utilizan figuras semejantes en todos los libros y omite varias proposiciones en el libro XI.

La forma en que Stafford simplifica el texto es un precedente de la manera que luego utilizaría Tacquet. Pero en el tratado de Stafford los cambios son menores, y se justifican menos que en el de Tacquet. En particular, profundiza menos en la interpretación algebraica de las proposiciones, especialmente en el libro V.

Finalmente, no se ha encontrado el motivo que le llevó a publicar el libro en castellano.

Notas

1. Agradezco a la profesora Mª Rosa Massa por la información que me ha dado sobre este libro, al profesor Javier Burrieza por ayudarme con los archivos del Colegio San Albano de Valladolid y a la bibliotecaria Olatz Berasategi por guiarme en los archivos del Santuario de Loyola.
2. Se puede encontrar información sobre su vida en Sommervogel [1896, vol.7, col. 1472], Gillow [1885, vol. 5, p. 521-522], *Grande Enciclopedia* [1936, vol. 30, p. 81], Henson [1930, p. 521]; Leitão y Martins [2008, p. 137]; Pereira [2011, p. 244-249] y Gessner [2011, p. 211].
3. En el Catálogo Trienal Primero de la provincia de Castilla [AHL, 1619] aparece un hermano novicio llamado Ignacio Leo, nacido en Stafford en 1599, de buena salud, que había entrado en la Compañía el 10 de octubre de 1618 y que estaba estudiando segundo de filosofía en el noviciado de Villagarcía de Campos (actualmente provincia de Valladolid). Se confunden Leitão y Martins [2008, p. 137]; y Gessner [2011, p. 215] cuando dicen que estudió en Villagarcía de Galicia.
4. Henson [1930, p. 521] dice que dio clases en Santo Antão de 1630 hasta 1639, Gessner [2011, p. 216], Leitão y Martins [2008, p. 137] y Pereira [2011, p. 244] dicen que fue profesor de 1630 a 1636; *Grande Enciclopedia* [1936, vol. 30, p. 81] dice que fue profesor 9 años; y Sommervogel [1896, vol. 7, col. 1472] que dio clases en Lisboa ocho años.
5. Este segundo libro no se relaciona con las matemáticas. Refiere la vida del misionero jesuita napolitano Marcelo Francisco Mastrili, martirizado el 17 de octubre de 1637 en Nagasaki.
6. Los escritos sobre astronomía y navegación están estudiados en Pereira [2011, p. 244-249], y la discusión sobre esas materias con Fallon, su sucesor en el Aula da Esfera, en Pereira [2011, p 256-265].
7. Ese manuscrito está estudiado en Gessner [2011].
8. Jorge Mascarenhas apoyó a João IV, pero sus hijos Jerónimo y Pedro se mantuvieron fieles a Felipe IV, y Jerónimo llegó a ser obispo de Segovia.
9. Algún conocimiento de la obra de Sempil hubo en el Aula da Esfera de Lisboa porque se conserva un manuscrito en el que se comenta un capítulo de su libro *De Mathematicis Disciplinis* (1635) [Leitão y Martins, 2008, p. 65].
10. No se ha encontrado ninguna referencia a Ignacio Stafford en la correspondencia de los jesuitas de 1634 a 1648 editada por la Academia de Historia, que cita, sin embargo, varias veces a su protector Mascarenhas [RAH, 1861-1865]. Tampoco aparece mencionado en la correspondencia entre Della Faille y Van Langren [Van Vyver, 1977].
11. Profesores de la cátedra fueron "João Delgado (1590-1593); João Delgado (1595-1597); António Leitão (1597-1598); João Delgado (1598-1599); Cristoph Grienberger (1599-1602); Francisco da Costa (1602-1602); Francisco Machado (1604-1605); João Delgado (1605-1608); Sebastião Dias (1610-1614); G. Paolo Lembo (1615-1617); Dionísio Lopes (1617-1619); J. Chrysostomus Gall (1620-1625); Cristoforo Borri (1627-1628); Ignace Stafford (1630-1636); Simon Fallon (1638-1641); Jan Cierman (1641-1642); Hendrick Uwens (1642-1646); Thomas Barton (1648- 1649); John Riston (1651-1652); João da Costa (1654-1655); e Bartolomeu Duarte (1655-1658)." [Oliveira, Costa y Menezes 2017, p. 250].
12. Para la redacción en castellano véase Puertas [1991-1996].
13. Billingsley utilizó para su versión inglesa una edición latina de los *Elementos* de 1558 que era una traducción de la versión griega de Zamberti con aportaciones de la versión latina de Campano y de la edición griega prínceps de 1533 [Archibald, 1950]. Las fuentes de Clavius fueron más numerosas, véase Knobloch [1995]. Las dos versiones también tienen similitudes, véase Malet [2006].

14. Por ejemplo, en la proposición 6, que dice que en un triángulo a dos ángulos iguales les corresponden dos lados opuestos iguales, termina la demostración diciendo "el triangulo, ABC, sea igual a su parte, ADC" [STAFFORD 1634, p. 8], sin indicar que eso es absurdo y que por lo tanto los lados no pueden ser desiguales.
15. En este libro junta las proposiciones 10 y 11; 13 y 14; 18 y 19; 24 y 25; 27 y 28; y 33 y 34.
16. Sobre el paralelismo en Clavius y Tacquet véase MIR [2011, p. 590-592].
17. Sin embargo Stafford menciona a Pedro Nunes en sus escritos de náutica [PEREIRA, 2011, p. 245-248].
18. Flussates o Candale es François de Foix de Candale (1502-1594) obispo y noble francés autor de *Euclidis Megarensis mathematici clarissimi elementa, libris XV* (1578).
19. La definición 9, que es parecida, sirve para definir la relación de mayor o menor entre razones.
20. En su versión: "Definición VII Las cantidades, que se dize tener una proporcion, que la primera a la segunda sea como la tercera a la quarta, son aquellas de las cuales las multiplices ygualmente quitadas a la primera y tercera, comparadas a las multíplices ygualmente quitadas de la segunda y la cuarta sean semejantes o en sobrar o en faltar o en ygualarse". También es errónea su definición de proporción continúa [CARDUCHI, 1637, f. 76 v.].
21. "Prima pars. Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur […/] 5. Duæ rationes (A ad B & C ad F) sunt similes, æquales, eædem; cum unius antecedens (A) aequè seu eodem modo (hoc est nec magis nec minus) continent suum consequens (B) quo alterius antecedens (C) continent suum consequens (F)" [TACQUET, 1683, p. 131-132].
22. Por ejemplo, "Propositio 1.2.3.4.5.6. In nostra methodo sunt superfluæ." [TAQUET, 1683, p. 139] o "Propositio VII […] Hæc propositio, uti & sequentes quatuor, sunt merissima axiomata, ac proinde nullo modo demostrari debent" [TAQUET, 1683, p. 139].
23. "Pars Secunda. Euclidæa per multiplices definitio æqualium rationum, demonstratur exhibeturque ac demonstratur aliud magis inmediatum & facilium indicium æqualitatis rationum" [TAQUET, 1683, p. 154].
24. "Tertia Pars. De proportionum denominatoribus, algorythmo compositione" [TAQUET, 1683, p. 164].
25. Por ejemplo las proposiciones 8 y 9 de Stafford dicen que si dos magnitudes A y B tienen la misma proporción con otra C son iguales y si la C tiene la misma proporción con dos A y B, también son iguales [STAFFORD, 1634, p. 112] lo que puede interpretarse fácilmente por: a/c=b/c -> a=b y c/a=c/b -> a=b.
26. En las demostraciones acude a las definiciones de igualdad o desigualdad por medio de equimúltiplos en las mismas proposiciones que, según Heath, lo hacía Euclides, salvo en la 16, pero en cambio la emplea en la 10 y Heath no lo hace.
27. En la tercera forma de enfocar el libro quinto [TAQUET, 1683, p. 164-168].
28. Ahora se atribuyen a Hypsicles (s. II a. C.) e Isidoro (s. VI).
29. Por ejemplo, Tacquet y Fernández de Medrano demuestran las proposiciones 11 y12, y Stafford no lo hace, mientras que Stafford incluye la proposición 38 que Tacquet y Medrano no presentan.
30. Stafford fue profesor del Ingeniero Mayor y Cosmógrafo Real de Portugal Luis Serrão Pimentel [FIALHO CONDE y MASSA-ESTEVE, 2018, p. 4].
31. Es posible que no lo fuera totalmente. En 1665 el arquitecto agustino descalzo San Nicolas [1665, p. 10] mencionaba entre las traducciones de obras famosas al castellano "Sobre Euclides, el Zamorano, el P. Estafor, y Luis Carduchi".

ARCHIVOS

AHL, Archivo Histórico de Loyola, *Catálogos Trienales Primeros. Provincia de Castilla*. Copia existente en el monasterio de Loyola elaborada a partir de fotocopias del documento en el *Archivum Romanum Societatis Iesu*.

Bibliografía

Versiones de los Elementos de Euclides

Billingsley, H. (1570) *The elements of geometrie of the most ancient philosopher Euclide of Megara faithfully (now first) translated into the Englishe*. London, Iohn Daye.

Campos, M. de (1735) *Elementos de Geometria plana e sólida segundo a ordem de Euclide*s. Lisboa, Rita Cassiana.

Carduchi, L. (1637) *Elementos Geometricos de Euclides Philosopho Megarense sus seys primeros libros*. Alcala, Anton Duplast.

Clavius (1607) *Euclidis Elementorum libri XV. Accesit liber XVI*. Francfort, Nicolas Hoffman, 2 vols. [1ª edición en 1576].

Fernández de Medrano, S. (1728) L*os seis primeros libros, onze, y doze, de los Elementos Geometricos del famoso philosopho Euclides Megarense*. Amberes, Viuda de Henrico Verdussen. [1ª edición 1688].

Heath, T. L. (1956) *Euclid. The thirteen books of the Elements translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath*. New York, Dover, 3 vols. [Reedición facsímil de la 2ª edición de 1926, 1ª edición en 1908].

Kresa, J. (1689) *Elementos Geometricos de Euclides, los seis primeros libros de los planos, y los onzeno, y dozeno de los solidos. Con algunos selectos teoremas de Archimedes*. Bruselas, Francisco Foppens.

Legendre, A. M. (1817) *Eléments de géométrie*. Paris, Firmin Didot. [1ª edición 1794].

Puertas, M. L. (1991, 1994, 1996) *Elementos Libros I-IV; Libros V-IX; Libros X-XIII*. Madrid, Gredos, 3 vol.

Simson, R. (1774) *Los seis primeros libros, y el undecimo, y duodecimo de los Elementos de Euclides traducidos de nuevo sobre la version latina de Federico Comandino*. Madrid, Ibarra.

Stafford, I. (1634) *Elementos mathematicos*. Lisboa, Mathias Rodrigues.

Tacquet, A. (1683) *Elementa Geometriae planae ac solidae. Nec non selecta ex Archimede theoremata*. Amsterdam, Wetstenium. 1ª edición en 1654.

Zamorano, R. (1576) *Los seis libros primeros de la Geometria de Euclides. Traduzidos en l gua Española*. Sevilla, Alonso de la Barrera.

Zaragoza, J. (1678) *Euclides Nuevo-Antiguo. Geometria especulativa, y practica de los planos, y solidos*. Madrid, Antonio Francisco de Zafra.

Otras fuentes

Archibald, R. C. (1950) "The First Translation of Euclid's Elements into English and its Source". *The American Mathematical Monthly, 57(7)*, 443-452.

Baldini, U. (2004) "The teaching of Mathematics in the Jesuit Colleges of Portugal, from 1640 to Pombal". En: L. Saraiva y H. Leitão (eds.) *The practice of Mathematics in Portugal*. Coimbra, Universidad de Coimbra, 293-465.

Conde, A. Fialho y Massa-Esteve, M. R. (2018) "Teaching engineers in the seventeenth century: european influences in Portugal". *Engineering Studies*, *10(2-3)*, 115-132. <doi: 10.1080/19378629.2018.1480627>

Dou, A. (1997) "Matemáticos españoles jesuitas de los siglos XVI y XVII". *Archivum Historicum Societatis Iesu, LXVI*, 301-321.

Gillow, J. (1885) *Bibliographical Dictionary of English Catholics*. London, Burns and Oates, 5 vol.

Gessner, S., (2011). "The conception of a mathematical instrument and its distance from the material world: the 'Pantometra' in Lisbon, 1638". *Studium, 4*, 210–227.

Grande enciclopédia portuguesa e brasileira (1935-1960). Lisboa - Rio de Janeiro, Editorial Enciclopédia, 40 vol.

HENSON, C. E. (ed.) (1930) *Catholic Record Society Registers of the English College at Valladolid 1589-1862*. London, Catholic Record Society.

KNOBLOCH E. (1995) "L´oeuvre de Clavius et ses sources scientifiques". En: L. Giard (ed.) *Les jésuites à la Renaissance. System educaatif et production du savoir.* París, P.U.F., 263-285.

LEITÃO, H. y MARTINS, L. (coord.) (2008) *Sphaera Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos científicos do Colégio de Santo Antão nas coleções da BNP*. Lisboa, Biblioteca Nacional de Portugal.

MALET, A. (2006) "Renaissance notions of number and magnitude". *Historia Mathematica, 33*, 63–81.

MIR SABATÉ, F. (2011) "La Teoría de las Paralelas de André Tacquet. Entre Clavius y Saccheri". *Cuaderno de Materiales, 23*, 575-600.

NAVARRO LOIDI J. (1996) "Les différentes versions des Eléments d'Euclide publiées en espagnol aux XVIè., XVIIè, et XVIIIè siècles". En: E. Ausejo y M. Hormigón (eds.) *Paradigms and Mathematics.* Madrid, Siglo XXI de España, 427-500.

NAVARRO LOIDI J. (2001) "Las figuras que degeneran en otras: la idea de límite en los libros de geometría en castellano a finales del siglo XVII". En: M.M. Álvarez Lires et al. (ed.) *Estudios de Historia das Ciencias e das Técnicas, Actas do VII Congreso de la SEHCYT.* Vigo, Servicio de Publicaciones Diputación, vol. 2, 747-760.

OLIVEIRA, N.C. de; COSTA, C.J. y MENEZES, S.L. (2017) "Ciência moderna em Portugal: a 'aula da esfera' no colégio de Santo Antão". *Acta Scientiarum. Education Maringá*, *39(3)*, 243-253.

PEREIRA DE ALMEIDA, B. J. M. G. (2011) *A influência da obra de Pedro Nunes na náutica dos séculos XVI e XVII: um estudo de transmissão de conhecimento.* Lisboa, Universidad de Lisboa. Tesis de doctorado.

REAL ACADEMIA DE HISTORIA (1861-1865) *Memorial histórico español […] Cartas de algunos PP. de la Compañía de Jesús sobre los sucesos de la monarquía entre los años de 1634 y 1648*. Madrid, Imprenta Nacional, 7 vol.

SAN NICOLAS, L. (1665) *Segunda Parte del Arte y Uso de la Arquitectura*. Madrid, Plácido Barco López.

SOMMERVOGEL, C. (1896) *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*. Bruselas, Oscar Schepens y París, Alphonse Picard, 12 vol.

UDÍAS, A. (2005) "Los libros y manuscritos de los profesores de matemáticas del Colegio Imperial". *Archivum Historicum Societatis Iesu, 74*, 369-448.

UDÍAS, A (2010) "Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañía en España, 1620-1767". *Archivum Historicum Societatis Iesu*, *79*, 3-27.

VAN DE VYVER, O. (1977) "Lettres de Jean Charles de La Faille Cosmographe du Roi à Madrid, à M. F. Van Langren Cosmographe du Roi à Bruxelles 1634- 1645". *Archivum Historicum Societatis Iesu*, *46*, 73-183.

VEGA, L.(1991) "Introducción General". En: M.L. Puertas, *Elementos Libros I-IV; Libros V-IX; Libros X-XIII*. Madrid, Gredos, vol. 1, 7-184.

VICENTE, M.L; ESTEBAN, M. (1989) "Primeras versiones castellanas (1570-1640) de las obras de Euclides: su finalidad y sus autores". *Asclepio, XLI(1),* 203-231.

WILLIAMS, M. E. (1986) *St. Alban's College Valladolid. Four centuries of English Catholics presence in Spain*. London, C Hurst & Co Publishers.