Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 05(01): 102 - 120 (2018)

Series de Fourier: Una Perspectiva Histórica

The Fourier Series: A Historical Perspective

Alejandro Ortiz Fernández*

Received, Set. 24, 2017 *Accepted, May. 02, 2018*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2018.01.11

Resumen

El objetivo de este escrito es dar una visión sobre una fundamental área del análisis moderno, como es el análisis de Fourier, el cual está enfocado en algunos aspectos históricos, pero damos algunos argumentos analíticos de fácil comprensión. Creemos que este análisis no es bien conocido en nuestro país, menos en el enfoque con que damos a este escrito; por otro lado, la presentación dada es sobre aspectos clásicos de la teoría de Fourier.

Palabras claves. Series de Fourier, Series trigonométricas, Cuerda vibrante, Dirichlet, Lebesque, Distribuciones.

Abstract

The ain of this paper is present a vision of an essential field of the modern analysis like it is the Fourier analysis. we focus on some historical aspects and then we explain the analytical arguments that are accessible to understand. We think this subject is not very well know in Peru, our country, especially inthe way we address this subject. By the other hand, this text is about the classical aspects of the Fourier theory.

Keywords. Trigonometric Fourier, Trigonometric Series, string Vibration, Dirichlet, Lebesgue, Distributions.

FIGURA 1.1. *Fourier*

1. Introducción. Nos proponemos presentar una visión histórica de las series de Fourier, la cual ha influenciado poderosamente en el desarrollo del análisis moderno, motivando el surgimiento de fundamentales teorías,

*Pontificia Universidad Católica del Perú, Sección Matemáticas. Perú,
Profesor Emérito Vitalicio de Universidad Nacional de Trujillo (jortiz@pucp.edu.pe).

que a su vez contribuyeron a la matemática en general. Una teoría alcanza la dimensión de lo perdurable cuando conjuga admirablemente el mundo concreto con el mundo abstracto. Así fueron las obras de Arquímedes, Newton, Gauss. Por su trascendencia en su época, y por las proyecciones que tuvo, la obra de Fourier está en lo perdurable. El enfoque de nuestra presentación es clásico; sin embargo, diremos que la teoría sigue siendo cultivada en contextos que involucran nuevas teorías e ideas, las que fueron creadas en las últimas décadas.

Los siguientes gráficos nos dan una idea del valor de las series de Fourier.

En 1807 Fourier afirmó que: "Una función periódica arbitraria puede expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos".

Esa afirmación es de por si temeraria considerando que en esa época el análisis matemático no era riguroso; muchas ideas básicas, como la de función, continuidad, ... no tenían la claridad actual. Pero, ¿Cuál fue la motivación de tal declaración?... Un problema de la física!

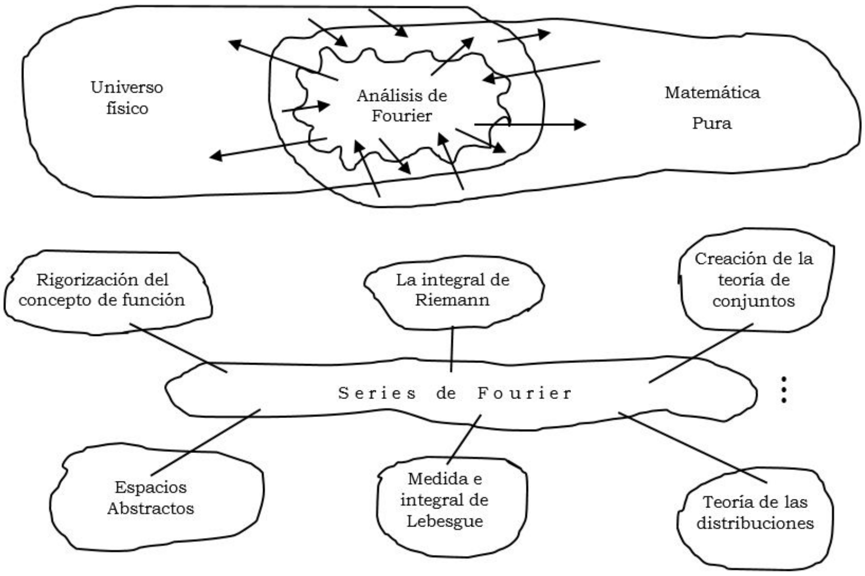

FIGURA 1.2. *Mapa del uso de la series de Fourier*

2. La Cuerda Vibrante. La historia comienza más o menos a mitad del siglo XVIII. Fue el estudio de un problema de la naturaleza, el problema de la cuerda vibrante, el que llevó a una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico ($u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, donde c es una conveniente constante), cuya solución es de la forma de una serie trigonométrica. Además, este problema llevó a una interesante polémica sobre la naturaleza de la función a considerarse. En esta primera etapa se tienen los trabajos de d'Alembert (1717-1789), Euler (1707-1783), E. Bernoulli (1700-1782), Lagrange (1736-1813), y naturalmente los de Fourier (1768-1830).

Veamos el argumento de la cuerda vibrante. Consideremos una cuerda de longitud L, que asumimos fija en sus extremos, y que en su estado de reposo coincide con el eje x. Asumamos que la cuerda es flexible, es decir, que no ofrece resistencia al ser doblada. Así mismo, asumimos que las partículas de la cuerda se mueven solo en la dirección del eje u, esto es, consideramos vibraciones trasversales. La tensión de la cuerda es siempre en la dirección de la tangente, y la pendiente en cualquier punto de la cuerda desplazada es pequeña comparada con 1.

Partiendo de su estado de reposo, la cuerda es perturbada y vibra trasversalmente. Estudiemos estas vibraciones, esto es, determinemos la ecuación del movimiento que describa la posición $u(x, t)$ de la cuerda en el tiempo t, posterior a la perturbación dada. En el gráfico mostramos una pequeña porción de la cuerda desplazada, es la porción Δs comprendida entre x y $x + \Delta x$; $u(x, t)$ representa el desvío de la partícula en el tiempo t. Con $\rho(x)$ representamos la densidad lineal de la masa, y $\rho\Delta s$ representa la masa existente en la porción Δs de la cuerda. T designa la tensión de la cuerda en los puntos extremos de Δs. De esta manera, la fuerza actuando en la dirección vertical es $Tsen\beta - Tsen\alpha$. Entonces, por la segunda ley de Newton (fuerza = masa$\times$aceleración), tenemos $Tsen\beta - Tsen\alpha = (\rho\Delta s)u_{tt}$. Ahora observemos, desde que la pendiente de la cuerda desplazada es muy pequeña, que $\Delta s \simeq \Delta x$. Así mismo, considerando que los ángulos α y β son pequeños, podemos tomar $\sin\alpha \simeq tg\alpha$ y $\sin\beta \simeq tg\beta$.

De esta manera la anterior fórmula la podemos escribir en la forma

$$tg\beta - tg\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} u_{tt},$$

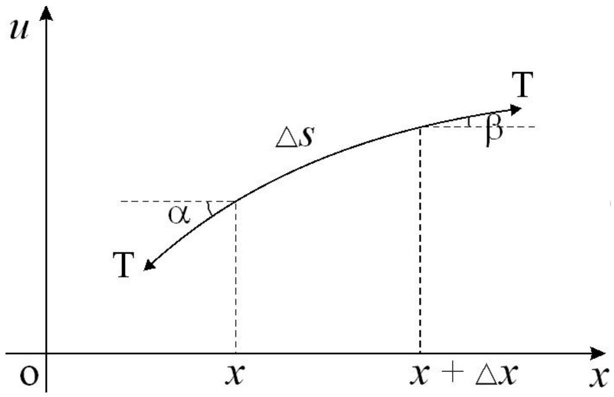

FIGURA 2.1. *Elemento de cuerda*

o aún

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}=\frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

Tomando límite, cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$u_{xx}=\frac{\rho}{T}u_{tt} \quad \text{ó} \quad u_{tt}-c^2u_{xx}=0,$$

(con $c^2=\frac{T}{\rho}$), la que es llamada la ecuación de la onda (unidimensional). [Remarcamos que $u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, etc.].

Como hemos asumido que los extremos de la cuerda están fijos, tendremos las condiciones de contorno o frontera, $u(0,t)=u(L,t)=0$ para $t\geq 0$. Así mismo nos interesa asumir el desplazamiento inicial de la cuerda $u(x,0)$; y el modo de como la cuerda es dejada en tal posición, $u_t(x,0)$. Así mismo asumimos las condiciones iniciales

$$u(x,0)=f(x), \text{ para } 0\leq x\leq L; \qquad u_t(x,0)=g(x), \text{ para } 0\leq x\leq L,$$

donde $f(x)$ es el desplazamiento inicial y $g(x)$ es la velocidad inicial de la cuerda. De esta manera surge el siguiente problema mixto (informal): determinar $u(x,t)$ que satisfaga

$$\left\{\begin{array}{lll} u_{tt}-c^2u_{xx} & =0, & 0<x<L,\ t>0, \\ u(x,0) & =f(x) & \text{condiciones} \\ u_t(x,0) & =g(x) & \text{iniciales,} \\ & & \\ u(0,t) & =0 & \text{condiciones de} \\ u(L,t) & =0 & \text{contorno.} \end{array}\right. \tag{2.1}$$

3. Solución Del Problema Mixto (2.1). Remarcamos que trabajaremos informalmente, esto es, sin necesariamente explicar algunos pasos analíticos. Usaremos el método de separación de variables; así asumamos que la solución del problema es de la forma $u(x,t)=X(x)T(t)$, la que substituida en la ecuación de la onda nos da

$$X(x)T''(t)=c^2X''(x)T(t) \quad \text{ó} \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\lambda,$$

donde asumimos $X(x)\neq 0$ y $T(t)\neq 0$. Luego obtenemos las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x)-\lambda X(x)=0 \quad \text{y} \quad T''(t)-\lambda c^2T(t)=0.$$

Ahora miremos a las condiciones de contorno $u(0,t)=0=u(L,t)$, entonces $0=u(0,t)=X(0)T(t)$ y $0=X(L)T(t)$, de donde concluimos que $X(0)=0=X(L)$. Así podemos formular el problema

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)&=0\\ X(0)&=0\\ X(L)&=0. \end{aligned}$$

Para resolver esta cuestión consideremos los casos $\lambda>0$, $\lambda=0$ y $\lambda<0$.

Si $\lambda > 0$, la solución de la ecuación $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ es de la forma $X(x) = ae^{-\sqrt{\lambda}x} + be^{\sqrt{\lambda}x}$, siendo a y b constantes. Por otro lado, por las condiciones de contorno

$$0 = X(0) = a + b = X(L) = ae^{-\sqrt{\lambda}L} + be^{\sqrt{\lambda}L},$$

de donde $a = b = 0$. Así $X(x) = 0$ es la solución (trivial) del problema.

Si $\lambda = 0$, $X''(x) = 0$ implica $X(x) = a + bx$, de donde $0 = X(0) = a$ y $0 = X(L) = 0 + bL$, luego $b = 0$. Nuevamente $X(x) = 0$ es la solución del problema.

Si $\lambda < 0$ (caso interesante), la solución general de la ecuación es de la forma

$$X(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + bsen\sqrt{\lambda}x,$$

de donde $0 = X(0) = a$, $0 = X(L) = bsen\sqrt{\lambda}L$. Luego, si $b = 0$ tenemos la solución trivial $X(x) = 0$. Si $b \neq 0$, $sen\sqrt{\lambda}L = 0$, luego $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, que podemos escribir mas correctamente como $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$. por tanto la solución toma la forma $X_n(x) = bsen\frac{n\pi}{L}x,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Remarcamos que los $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ son llamados los valores propios y los $sen\frac{n\pi}{L}x$ las funciones propias.

Ahora prestamos atención a la ecuación $T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0$. Por un proceso análogo podemos ver que la solución general es de la forma

$$T_n(t) = c_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + d_n sen\frac{n\pi c}{L}t,$$

donde c_n y d_n son constantes. De esta manera tenemos

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(b_n c_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + b_n d_n sen\frac{n\pi c}{L}t\right) sen\frac{n\pi x}{L}.$$

Ahora sumemos (principio de superposición de las series) para obtener

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n c_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + b_n d_n sen\frac{n\pi c}{L}t\right) sen\frac{n\pi x}{L}$$

que por comodidad escribiremos, poniendo $a_n = b_n c_n$ y $b_n = b_n d_n$, en la forma,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t + b_n sen\frac{n\pi c}{L}t\right) sen\frac{n\pi x}{L}. \tag{3.1}$$

Desde que hasta este momento solo hemos usado las condiciones de contorno, esta función $u(x,t)$ es solución del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - & c^2 u_{xx} & = 0 \\ & u(0,t) & = 0 \\ & u(L,t) & = 0. \end{cases}$$

Ahora vamos a considerar las condiciones de valor inicial

$$u(x,0) = f(x) \text{ y } u_t(x,0) = g(x),\ \ 0 < x < L.$$

Derivando (3.1) respecto a t, obtenemos

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{L}\left(-a_n sen\frac{n\pi c}{L}t + b_n\cos\frac{n\pi c}{L}t\right) sen\frac{n\pi x}{L}.$$

Luego,

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\frac{n\pi x}{L},$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{n\pi c}{L} sen\frac{n\pi X}{L}.$$

Ahora la técnica es multiplicar ambos miembros de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\frac{n\pi x}{L}$ por $sen\frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, \ldots$ integrar y considerar que la sucesión $\{senkx\}$, $k = 1, 2, \ldots$ es ortogonal respecto al producto interno

$$\langle h_1, h_2\rangle = \int h_1 h_2 dx.$$

Así se determina que

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Similarmente

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{3.2}$$

Resumen: $u(x,t)$, dado por (3.1), es la solución del problema mixto (2.1), donde los coeficientes a_n y b_n son dados por (3.2).

Una serie de la forma (3.1) cuyos coeficientes a_n y b_n (llamados coeficientes de Fourier) son determinados por (3.2), es llamado una serie de Fourier.

Ya que tenemos algunas ideas a mano, aprovechamos la oportunidad para precisar lo que es una serie de Fourier en el contexto que usaremos.

Una **serie trigonométrica** es una serie infinita de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sennx)$$

donde a_0, a_n y b_n son constantes.

Sea ahora $f(x)$ una función integrable, periódica, de período 2π. Supongamos que $f(x)$ fuera representable por una serie trigonométrica en el intervalo $[-\pi,\pi]$, esto es,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sennx).$$

Por la técnica mencionada arriba, considerando que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} senmx sennx dx,$$

para $m \neq n$; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx sennx dx = 0$ y que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} sen^2 mx dx$$

obtenemos (asumiendo que la integración término a término es permitido)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sennx dx,$$

donde $n = 1, 2, ...$

Ahora estamos en condiciones de definir a las series de Fourier. Así, sea $f(x)$ definida e integrable sobre el intervalo $[-\pi,\pi]$. La serie trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n sennx),$$

donde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $n = 0, 1, 2, ...$ y $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sennx dx$, $n = 1, 2, ...$ es llamada la serie de Fourier generada por $f(x)$.

Sucede que en muchos casos, la serie de Fourier generada por $f(x)$ converge a $f(x)$. Pero, en general, si la función fuera arbitraria no podríamos afirmar siquiera que la serie converja en $[-\pi,\pi]$. Aún, si la serie fuera convergente en un punto $x \in [-\pi,\pi]$, ¿ cómo asegurar que el valor de la serie en tal punto sea precisamente $f(x)$? Ahora podemos comprender más la exclamación famosa de Fourier:
"Una función periódica arbitraria puede expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos!"

4. La Fórmula D'Alembert. Miremos al problema mixto (2.1) de donde extraemos el problema, llamado **Problema de Cauchy,**

$$(PC)\begin{cases} u_{tt}- & c^2u_{xx} & =0 \\ & u(x,0) & =f(x) \\ & u_t(x,0) & =g(x). \end{cases}$$

Donde ahora x es un número real arbitrario (esto es, consideramos la cuerda "infinita"). Vía un argumento de la ecuación característica asociada a la ecuación de la onda, y de un cambio de variable, la ecuación $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$ se reduce a la ecuación $u_{\bar{x}\bar{y}}=0$, donde $\bar{x}=x+ct$, $\bar{y}=x-ct$. Ahora integramos $u_{\bar{x}\bar{y}}=0$ respecto a $\bar{x}$ obteniéndose $u_{\bar{y}}=\psi(\bar{y})$.

Integremos esta ecuación respecto a $\bar{y}$, obteniéndose

$$u(\bar{x},\bar{y})=\int\psi(\bar{y})d\bar{y}+\phi_1(\bar{x})=\phi_2(\bar{y})+\phi_1(\bar{x}),$$

donde $\phi_2(\bar{y})=\int\psi(\bar{y})d\bar{y}$ y ϕ_1,ϕ_2 son funciones arbitrarias. Retornando a las variables originales, obtenemos para la ecuación de la onda la solución general en la forma

$$u(x,t)=\phi_1(x+ct)+\phi_2(x-ct) \tag{4.1}$$

donde observamos la necesidad de que ϕ_1 y ϕ_2 sean dos veces derivables. Ahora usemos las condiciones iniciales dadas en (PC); tenemos,

$$f(x)=u(x,0)=\phi_1(x)+\phi_2(x) \tag{4.2}$$

$$g(x)=u_t(x,0)=c\phi_1'(x)-c\phi_2'(x)$$

Integrando esta última ecuación, obtenemos

$$\phi_1(x)-\phi_2(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}g(s)ds+C \tag{4.3}$$

Resolviendo el sistema (4.2) y (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned}\phi_1(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(s)ds+\frac{C}{2}\\ \phi_2(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(s)ds-\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Llevando estas representaciones a (4.1) obtenemos la siguiente representación para la solución del problema de Cauchy (PC),

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds \tag{4.4}$$

La fórmula (4.4) fue obtenida por d'Alembert en 1747. Este matemático, así como Euler,llegaron a la forma funcional (4.1) de la solución. Observando (4.4) sentimos la necesidad de que f tenga segundas derivadas (continuas) y que g tenga primeras derivadas (continuas). Así mismo, dados f y g, (4.4) nos "dice"que la solución es única.

5. Una Polémica en Provecho de la Matemática... De un modo general el progreso de la ciencia es el resultado de los esfuerzos de los que investigan los problemas de la naturaleza, del mundo objetivo, con los de aquellos que penetran a las profundidades de las ideas, de donde extraen los modelos que hacen posible el progreso de los primeros. Y recíprocamente. El ejemplo que nos ocupa, las series de Fourier, es un caso típico de tal situación. Hemos visto que un problema de la física llevó a la obtención de resultados matemáticos, que para su consistencia analítica se necesitaba de una profunda revisión de los conceptos básicos del cálculo, que por aquella época (siglo XVIII) no tenían un carácter universal.

Los argumentos matemáticos hechos en las secciones anteriores, aunque un poco informales, nos permitirán comprender lo que pasó a partir de la discusión del problema de la cuerda, de otro problema de la física: el de la conducción del calor. Miremos la representación (4.1) $u(x,t)=\phi_1(x+ct)+\phi_2(x-ct)$, que es una forma funcional de la solución de la ecuación de la onda $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$, siendo ϕ_1 y ϕ_2 funciones arbitrarias. d'Alembert en 1747 y Euler en 1748 habían llegado a tal solución.

¿ Qué tipo de funciones deben ser tomados para describir la forma inicial de la cuerda?

d'Alembert era de la posición de que las funciones a ser consideradas eran aquellas expresadas por una única expresión analítica, como por ejemplo, $f(x) = 2 + 5x^2$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \log x$, es decir, tomaba solo funciones continuas, que en aquella época eran solo aquellas funciones de este tipo. Para Euler, gran matemático del siglo XVIII, la función cuyo gráfico es según la Figura 5.1, es discontinua, con punto de discontinuidad en $x = 0$. Euler admitía como curvas iniciales las correspondientes a funciones más generales; aquellas que podían ser expresadas con diferentes expresiones analíticas (esto es, podían ser funciones "discontinuas"). Por ejemplo, la función dada por el anterior gráfico podía ser considerada como condición inicial. En el caso de d'Alembert, posiblemente, su motivación sería de admitir funciones derivables e integrables sin mayores complicaciones. Así, aún cuando ambos matemáticos llegaron a la misma solución, la diferencia estaba en el significado que se tenía de función.

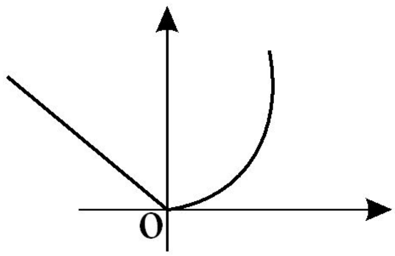

FIGURA 5.1. *Gráfica de función*

El problema de la cuerda vibrante fue objeto de estudio por parte de otros matemáticos del siglo XVIII. Así, Daniel Bernoulli en 1753 llegó a afirmar que la solución del problema es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \cos nct,$$

es decir, interpretó el movimiento de la cuerda vibrante como la superposición de vibraciones armónicas (periódicas) del tipo $a_n \operatorname{sen} nx \cos nct$. Compare esta conclusión con lo discutido en la solución del problema mixto (2.1). Bernoulli partió de la hipótesis de que la cuerda en su estado de reposo es de la forma de una serie trigonométrica, ya que

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx.$$

Esto fue una gran intuición física; aún, llegó a afirmar que su solución era la forma más general para describir el movimiento de la cuerda, y que debería contener a las soluciones encontradas por d'Alembert y Euler.

Tal resultado de Bernoulli creó cierto alboroto en el ambiente matemático; asi Euler publicó que tal representación de $f(x)$ en serie de senos era imposible pues ello implicaría que la función arbitraria tendría que ser impar y periódica. La razón de estas confusiones fue que el cálculo diferencial e integral aún no tenía la rigurosidad del análisis. Ideas, como la de función, límite, derivada e integral eran informales e intuitivas. Muy poco se conocía sobre una teoría de la convergencia de series. Precisamente, tales dificultades forzaron un movimiento por establecer las bases del cálculo.

A esta altura del debate, en 1759 aparece un joven y desconocido matemático, Lagrange era su nombre y fue también atraído por el problema de la cuerda vibrante; su tratamiento fue con otra óptica y obtuvo para la solución de la ecuación de la onda una solución más general que la de Bernoulli. Si $f(x)$ es la posición inicial y $g(x)$ es la velocidad inicial, entonces la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & 2\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} n\pi x \cos n\pi ct) f(y)\,dy \\ & + \frac{2}{\pi c}\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} n\pi ct) g(y)\,dy. \end{aligned}$$

Obsérvemos que si $t = 0$, tendríamos

$$f(x) = u(x, 0) = 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n\pi y \operatorname{sen} n\pi x) f(y) dy = \text{ informalmente}$$
$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{sen} n\pi x) \int_0^1 \operatorname{sen} n\pi y f(y) dy = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x.$$

Lagrange no observó este sencillo argumento, obviando algo que lo hubiera llevado a un resultado de Bernoulli. Quien sabe la razón podría haber sido que estaba dominado con otro punto de vista en su investigación. Sin embargo, Lagrange estuvo muy cerca del problema de representar una función dada por una serie trigonométrica. Esta teoría fue estimulada con otras investigaciones. Clairaut en 1757 contribuyó en la obtención de los coeficientes de Fourier; Euler en 1777 encontró el coeficiente

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

El panorama se mantuvo latente por cerca de 50 años, en espera de otro gran acontecimiento: Jean Baptista-Fourier y la conducción del calor.

6. El Problema de la Conducción del Calor. En esta sección damos una breve discusión sobre un problema mixto que envuelve la ecuación que gobierna la conducción del calor. Ello nos permitirá, al igual a lo hecho con la cuerda vibrante, comprender mejor los argumentos históricos que daremos en la próxima sección. Más concretamente, la ecuación del calor es $c\rho u_t - k\Delta u = h$, donde c, ρ y k son determinadas constantes (c es la capacidad del calor, ρ la densidad de masa, k la conductividad del calor) y h es la densidad de calor, una funcion dada. Δu es el laplaciano

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

La función a determinarse es u, la temperatura. Tal ecuación es del tipo parabólico.
En el problema a estudiar consideramos una varilla de longitud L, que asumimos suficientemente delgada para asumir que el calor se distribuye en forma homogénea en cualquier sección de ella; asumimos, además, que no hay pérdida de calor a través del contorno. El problema es: "Dada la función $f(x)$, encontrar $u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, \ \ 0 < x < L, \ t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), \ \ 0 < x < L \\ u(0, t) = 0 \\ u(L, t) = 0\text{''}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Solución

Asumamos que f es continua sobre $[0, L]$ con $f(0) = f(L) = 0$, y que su derivada f' es seccionalmente continua en $(0, L)$. Asumamos, además, que la solución del problema es de la forma (separación de variables) $u(x, t) = X(x)T(t)$. Entonces $u_t - ku_{xx} = 0$ implica $X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$, de donde

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\theta^2,$$

donde θ es una constante positiva. Así obtenemos el problema

$$\begin{cases} X''(x) + \theta^2 X(x) &= 0, \\ X(0) &= 0, \\ X(L) &= 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

y la ecuación diferencial ordinaria $T'(t) + \theta^2 kT(t) = 0$.

En relación al problema (6.2), por la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que la solución de la ecuación es de la forma $X(x) = A\cos\theta x + B \operatorname{sen}\theta x$. Considerando las condiciones de contorno tenemos $0 = X(0) = A$ y $0 = X(L) = B \operatorname{sen}\theta L$. Así $\operatorname{sen}\theta L = 0$ que implica

$$\theta = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, ...$$

Por tanto, la solución de (6.2) toma la forma

$$X_n(x) = B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

(escrita en una forma más conveniente).
Ahora examinemos a la ecuación $T'(t) + \theta^2 kT(t) = 0$. Su solución general es de la forma

$$T(t) = Ce^{-\theta^2 kt} \quad \text{ó} \quad T_n(t) = C_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}.$$

Luego la solución no trivial de la ecuación del calor, satisfaciendo las condiciones de contorno (observe que aún no hemos usado la condición de valor inicial) es

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = B_n C_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, ...$$

Entonces, el candidato a ser la solución del problema es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \tag{6.3}$$

con $a_n = B_n C_n$. Ahora bien, para que $u(x,t)$ sea la solución de (6.1), debemos tener

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

esto es, que f debe ser (otra vez!) factible de desarrollarse en una serie seno de Fourier donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} f(x) dx.$$

Ahora observe que por las condiciones impuestas a f tal factibilidad es cierta.

Probemos ahora que $u(x,t)$ **dada por (6.3) es solución de (6.1).**
En efecto, tenemos

$$|a| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)|\, dx \leq M, \qquad M > 0 \text{ constante.}$$

Entonces, si $t \geq t_0$,

$$\left| a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq M e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt_0}.$$

Por el test de la razón, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt_0}$$

es convergente; luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

converge uniformemente (respecto a x y t, $t \geq t_0, 0 \leq x \leq L$). Luego la función $u(x,t)$ definida por (6.3) está bien definida.
Además, derivando término a término respecto a t, obtenemos

$$u_t = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k e^{(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

donde también la serie converge uniformemente en $0 \leq x \leq L, t > t_0$, ya que

$$\left| -a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \leq M \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt_0}.$$

Así mismo,

$$u_{xx} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Todo ello nos permite observar que $u(x,t)$ definida por (6.3) es solución de la ecuación del calor $u_t - ku_{xx} = 0$, $0 < x < L$, $t > 0$.
Probemos ahora que $u(x,0) = f(x)$, $0 < x < L$.
En efecto, por la condición impuesta,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

siendo la serie uniforme y absolutamente convergente. Ahora necesitamos el siguiente criterio de Abel: "Asumamos que

(i) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)$$

converge uniformemente respecto a $x \in D$, donde D es un dominio cerrado de $\mathbb{R}^2$;

(ii) para todo $t \in D$, $\{T_n(t)\}, n = 1, 2, ...$ es una sucesión de funciones uniformemente limitadas, y monótona respecto a n.

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_t(t)$$

es uniformemente convergente respecto a x, t en D".

Bien,

(i)' $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$ converge uniformemente;

(ii)' $\{e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt}\}$ $n = 1, 2, ...$ es una sucesión uniformemente limitada y monótona respecto a n.

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

es uniformemente convergente en $0 \le x \le L$, $t \ge 0$. Por tanto, si $u(x,t)$ es su suma, la función es continua en tal dominio (incluido $t = 0$). De esta manera tenemos $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le L$. Finalmente, $u(x,t)$ satisface las

condiciones de contorno.
En efecto, desde que la serie es uniformemente convergente en $0 \le x \le L$ y $t > 0$, $u(x,t)$ es continua en $x = 0$ y en $x = L$. De esta manera, $u(0,t) = 0$ y $u(L,t) = 0$ para todo $t > 0$.

Nota. Con un no complicado argumente se prueba que la solución del problema mixto (6.1) es única.

7. Fourier y Su Obra.

"Par l'importance de ses decouvertes, par l'influence décisive qu'il a exercé sur le développement de la Physique Mathématique, Fourier méritait l'hommage qui est rendu aujourd 'hui à ses travaux et à sa mémoire. Son nom figurera dignement à côté des noms, ilustres entre tous, dont la liste, destinée à s'accroitre avec les années, constitue dès à présent un véritable titre d'honneur pour notre pays. La Théorie Analytique de la Chaleur... que l'on peut placer sans injustice à côté des écrits scientifiques les plus parfaits de tous les temps, se recommande par une exposition interesante et originale des príncipes fondamentaux".
[Darboux, Ouvres de Fourier, 1. 1888]

Efectivamente,... "La Teoría Analítica del calor, que uno puede colocar con justicia al lado de los escritos científicos más perfectos de todos los tiempos..."nos da una idea del aprecio a la obra del gran matemático francés. Tal trabajo es uno de los más hermosos monumentos creados por la mente humana cuando la matemática entraba a la etapa de la rigorización a inicios del siglo XIX. Una obra en la que se introducen los desarrollos en series e integrales de funciones trigonométricas para estudiar un comportamiento de la naturaleza. El trabajo de Fourier, sin olvidar a sus antecesores, es el punto de partida de algo grande; la cosecha será inmensa con el transcurrir de

los años; aparecerán teorías fundamentales a la matemática y a la física.
Pero, ¿ qué hizo Fourier? Fundamentó la teoría de las series trigonométricas. Es conveniente decir que nuestro personaje fue un científico que abordó problemas de la geofísica, oceanografía, metereología, es decir, fue un matemático aplicado. Tuvo también responsabilidades administrativas; fue secretario de la Academia de Ciencias por muchos años. Napoleón le tuvo un gran aprecio; lo llevó en su famoso viaje a Egipto.
Sus estudios sobre la conducción del calor le motivaron sus métodos matemáticos de cómo usar las series trigonométricas; escribió varias memorias sobre el tema, siendo la más importante la que sometió a la Academia en 1811. Todos estos trabajos están contenidos en su citado libro sobre la teoría analítica del calor, el que fue publicado en 1822. Fourier verifica que, en casos especiales, una función $f(x)$ es expresada por la serie

$$a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x) + ...$$

donde los coeficientes son

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx,\ n = 1, 2, ...$$

Recordemos que la representación para a_n ya había sido establecida por Euler. Así mismo Clairaut conocía las fórmulas para los coeficientes. Fourier tuvo la honestidad de reconocer los trabajos de sus antecesores. Debemos enfatizar que en aquella época muchas ideas matemáticas se manejaban sin el actual rigor. Por ello no debe alarmarnos que algunas de sus conclusiones carezcan de tal rigor. Inclusive, su declaración de que "cualquier función podría ser expresada por una serie (de Fourier)" es falsa! en general; sin embargo, sus aportes matemáticos fueron, y son, significativos. Fourier hizo público el valor de las series trigonométricas, obteniendo la atención del mundo matemático por sus métodos y resultados. Es curioso que tal atención no ocurriera con los trabajos de d'Alembert, Euler, Bernoulli y Lagrange cuando usaron tales series en el tratamiento de la cuerda vibrante. Quizás la razón esté en que tales trabajos estuvieron envueltos en discusiones que pudieron generar desconfianza en sus métodos.

Pero no todo fue fácil para Fourier. Su memoria de 1811 fue sometida a la Academia aspirando al Gran Premio de Matemática de 1812. El jurado lo integraban Laplace, Lagrange y Legendre. El segundo de los nombrados no aceptó en forma categórica la representación

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx).$$

El jurado fue severo con el contenido de la memoria criticando el rigor de su análisis y de su método. Entre otras cosas, se permitía que una función arbitraria podía ser dada por diferentes expresiones analíticas en diferentes subconjuntos del intervalo; que la serie podía ser usada para representar funciones distintas a las funciones impares (lo mismo con la serie coseno respecto a las funciones pares). Entendió, mejor que sus antecesores, como una función arbitraria podía ser representada por una serie trigonométrica. Y así Fourier hizo verdaderos esfuerzos por justificar sus argumentos, no lográndolos en general. Esto es comprensible y justificable pues sus revolucionarias ideas necesitaban de otro escenario matemático, de una rigorización del cálculo, de una revisión total en sus fundamentos. Y aquí está el germen del análisis moderno !
Su memoria no fue publicada a tiempo por la Academia de Ciencias. Esto resintió a nuestro personaje, quien decidió publicar sus trabajos en su famoso libro de 1822. Solo así fue reconocido el valor de sus ideas, de sus métodos, y sobre todo la herencia que dejó al futuro de la matemática.

8. Albores del Análisis Matemático . A esta altura de nuestra historia ya tenemos algún material como para formulamos algunas preguntas, las mismas que fueron hechas a través de los años que siguieron a la investigación de la cuerda vibrante y de la conducción del calor. Consideremos la serie, trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

a) Si $f(x)$ es una función representable por tal serie, ¿cómo determinar los coeficientes a_n y b_n? Notemos que en las discusiones anteriores ya hemos visto como determinar a_n y b_n, pero en la evolución histórica hubo la necesidad de precisar el concepto de función y de integral, entre otras cosas.

b) Si la serie es la serie de Fourier generada por $f(x)$, ¿para qué valores de x la serie es convergente?; ¿qué relación existe entre la suma de la serie en x, y la función $f(x)$?; ¿la serie puede representar distintas funciones en distintos subconjuntos del intervalo $(-\pi, \pi]$?

c) ¿Existirá una serie trigonométrica que converja, en casi todos los puntos del intervalo $(-\pi, \pi]$, a una función $f(x)$, pero que la serie no es serie de Fourier de $f(x)$?; ¿cuáles son las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de una serie trigonométrica para que ella sea una serie de Fourier?

d) Si una serie trigonométrica es una serie de Fourier generada por una cierta función, ¿existirán otras funciones que tengan por serie de Fourier a la serie dada?, si así fuera, ¿qué relación existe entre tales funciones?

e) ¿Existirá una función continua cuya serie de Fourier diverge en todo punto de un conjunto denso del intervalo $(-\pi,\pi]$?; ¿existirá una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto del intervalo?; ¿existirá una función continua con tal propiedad?.

No pretendemos, desde luego, esclarecer tales cuestiones, y otras que surgieron en el estudio de las series trigonométricas. Nos interesa seguir el orden cronológico de lo estudiado al respecto. Haremos algunos comentarios a parte de lo planteado. Así, tenemos la contribución de Cauchy (1789 – 1857), un matemático francés que contribuyó a rigorizar el cálculo. Le debemos el esfuerzo por clarificar la noción de integral, tan necesario en el estudio de las series trigonométricas. Su idea es muy semejante a la integral (de Riemann) que conocemos en los curses básicos, pero con ciertas limitaciones en el tipo de funciones. Probó que toda función continua es integrable en el intervalo $[a,b]$. Cauchy estudió también las series trigonométricas a partir de 1826 usando para ello su método de los residuos, no obteniendo la atención deseada por parte de la comunidad matemática. Dirichlet (1805 – 1857) tuvo más eco. Escribió dos importantes memorias, una en 1829 y otra en 1837. Fue el primero en dar una prueba del desarrollo de una función en serie de Fourier, lo que constituyó un gran avance en el análisis, pues dio algunos criterios para tener tal representación. Para la suma parcial de una serie de Fourier obtuvo una representación integral, conocida, como la fórmula de Dirichlet. Veamos algunos argumentos.

Sea $S_N(x)$ una suma parcial de la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

de una función f, seccionalmente continua y periódica de período 2π. Entonces se tiene la representación

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{2sen(\frac{t}{2})}dt$$

En efecto, desde que a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, sus valores los llevamos a

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

para obtener

$$\begin{aligned}S_N(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\Big(\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)\Big)\right]dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos(n(t-x))\right]dt\end{aligned}$$

Pero, vía un argumento de identidades trigonométricas, tenemos en general que

$$2sen\left(\frac{y}{2}\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos(ny)\right]=sen\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right].$$

Luego, para $\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)\neq 0$,

$$\begin{aligned}S_N(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt\quad(s=t-x)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+s)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)s\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)}ds\end{aligned}$$

Desde que f es periódica, de período 2π, tenemos la representación deseada. La expresión

$$D_N = \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}$$

es llamada el núcleo de Dirichlet.

Este resultado nos permite establecer la siguiente convergencia puntual de serie de Fourier. Decimos que f es seccionalmente regular en $[a,b]$ si f es seccionalmente continua, y su derivada f' es también seccionalmente continua, donde los saltos de f', en un número finito, ocurren en los mismos puntos saltos de f. Entonces tenemos el siguiente resultado:

”Sea $f(x)$ una función seccionalmente regular, periódica, de período 2π, en $[-\pi,\pi]$. Entonces para todo $x\in[-\pi,\pi]$ se tiene

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+)+f(x^-)\right] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),$$

siendo a_n y b_n los coeficientes de Fourier de f , y donde

$$f(x^+) = \lim_{h\to 0} f(x+h) \quad y \quad f(x^-) = \lim_{h\to 0} f(x-h)''.$$

En efecto, tenemos

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{2sen(\frac{t}{2})}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cdots + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdots = I_1+I_2.$$

Analicemos I_1. Tenemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t)-f(x^-)+f(x^-)\right]\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{2sen(\frac{t}{2})}dt \\ &= \left(desde\ que\ \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{2sen(\frac{t}{2})}dt = 1\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)-f(x^-)}{2sen\frac{t}{2}}sen\left(N+\frac{1}{2}\right)tdt + \frac{f(x^-)}{2}. \end{aligned}$$

Usando que f es seccionalmente regular, se prueba que $\frac{f(x+t)-f(x^-)}{2\sin\frac{t}{2}}$ es seccionalmente continua. Luego

$$\lim_{N\to\infty} I_1 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)-f(x^-)}{2sen\frac{t}{2}}sen\left(N+\frac{1}{2}\right)tdt + \frac{f(x^-)}{2} = \frac{f(x^-)}{2}$$

ya que el límite de la integral es cero por el lema de Riemann-Lebesgue que estableceremos después. En forma análoga se prueba que

$$\lim_{N\to\infty} I_2 = \frac{f(x^+)}{2}.$$

De esta manera,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n sen(nx)) = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}(I_1+I_2) = \frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)],$$

como se desea.

Corolario. Si f es además continua, entonces

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n sen(nx)).$$

Dirichlet probó que si $x\in(-\pi,\pi)$, entonces la serie de Fourier converge a $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, y en los extremos $\pi,-\pi$ converge a $\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$, siempre que la función f tenga un número finito de discontinuidades ordinarias (esto está contenido en la hipótesis “seccionalmente regular”), así como un número finito de puntos máximos y puntos mininos, y siempre que la función no sea infinita en $(-\pi,\pi)$, en caso contrario se exige que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ sea absolutamente convergente. Como observamos, los aportes de Dirichlet fueron de gran valor hacia la matemática pura. Lamentablemente murió cuando pudo legarnos más valiosos resultados.

9. La Matemática Pura. Los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet abrieron nuevos horizontes hacia el análisis matemático, a la observación cuidadosa de las ideas que se manejaban en la investigación de las series trigonométricas, en particular en las series de Fourier. Todo ello inspiraría a las nuevas generaciones de matemáticos, trabajos con más criterios analíticos, lo que conduciría al fundamento del análisis moderno (concepto de función y sus diferentes clases, continuidad y derivación, la integral, y sobre todo el estudio de los números reales en niveles profundos, lo que sería los fundamentos de la matemática moderna). Llegamos más o menos a la mitad del siglo XIX; nombres como los de Riemann, Heine, Cantor, du Bois-Raymond, Fejér, Dini, Lipschitz, Jordan, ... contribuyeron al desarrollo de la teoría de las series de Fourier, todo lo cual (considerando también a los antecesores) fue la herencia del siglo XIX al siglo XX. La teoría de series fue impulsada con la introducción del concepto de convergencia uniforme, lo que ayudó mucho a clarificar conceptos y resultados que anteriormente eran confusos. Este tipo de convergencia fue introducido por Stokes en 1847 y por Seidel en 1848. El primer gran matemático que tenemos en este período es B. Riemann, un científico alemán graduado en la Universidad de Gotingen en 1851. Trabajó en diferentes campos de la matemática, iluminándolos con su genio. Fue atraído también por las series de Fourier, quizás influido porque en tal universidad estaba también Dirichlet, quien pronto descubrió la gran inteligencia del joven Riemann.

Si bien es cierto que las series de Fourier tuvieron su partida de nacimiento en problemas concretos, como la cuerda vibrante y la conducción del calor; si bien en las aplicaciones a la física no se necesitaba una teoría tan elaborada y "pura"; que lo que se tenía era suficiente en muchos casos concretos; lo cierto es que las series de Fourier comenzaron a influir y ser aplicadas con suceso en teorías más abstractas como es la teoría de los números. Riemann estaba convencido en la necesidad de entrar en terrenos más analíticos. Como hemos visto, la naturaleza de los coeficientes de Fourier debe mucho a las condiciones de integrabilidad. Cauchy había considerado a las funciones continuas; Dirichlet admitía funciones continuas por secciones. Riemann percibió que estos enfoques eran aún insuficientes, lo que se debía al concepto mismo de lo que era una integral $\int_a^b f(x)dx$.

¿Como dar una definición más amplia, y cómo caracterizar a las funciones integrables? En 1854, con motivo de su examen de habilitación en la citada universidad, Riemann escribió un trabajo sobre las series de Fourier (que fue publicado en 1867 en forma póstuma) en la que sorprende por sus sagaces y admiradas conclusiones en las series trigonométricas. Investigó la condición necesaria y suficiente para que una función arbitraria sea tal que la serie de Fourier generada por ella, converja a f en un punto (en el cual la serie converge). Un problema muy difícil y no soluble, pero lo importante es que ello motivó lo que hoy conocemos como la integral de Riemann. La novedad fue que consideró a las funciones acotadas y procedió en forma análoga a lo hecho por Cauchy para definir su integral. Obtuvo condiciones necesarias y suficientes para, la integrabilidad de tales funciones, ampliando el universo de las funciones integrables, y de este modo al de los coeficientes de Fourier. Probó un vital resultado:

$$\lim_{n\to+\infty} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0 = \lim_{n\to+\infty} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

Esto es, en el infinito los coeficientes de Fourier son controlados. Acá está el germen de otras importantes ideas en la teoría de las distribuciones. Tal resultado fue extendido muchos años después por Lebesgue y que ahora conocemos como el "lema de Riemann-Lebesgue".

Ahora mencionemos un problema atacado por Riemann y que tuvo la feliz proyección de motivar la creación de una teoría revolucionaria, la teoría de conjuntos! por Cantor. Sea la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)),$$

donde ahora los coeficientes **no** son coeficientes de Fourier. Entre otras cosas se cuestionó si una función podía ser representable por más de una tal serie trigonométrica en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Es decir, estamos ante un problema de unicidad:

$$¿\ \text{ si } \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = 0, \quad a_0 = a_n = b_n = 0\ ?$$

La respuesta fue dada algunos años después. Contemos un poco esta historia. George Cantor (1845 – 1918) se graduó en la Universidad de Berlín en 1868 con una tesis sobre la teoría de números. Luego pasa a ser profesor en la Universidad de Halle, en donde estaba el matemático Heine quien por entonces trabajaba en las series trigonométricas. Heine entusiasmó al joven Cantor para que estudie el difícil problema de la unicidad de las series trigonométricas, quien acepta. En 1870 Cantor obtiene los primeros frutos. Prueba que si $f(x)$ es una función continua en todo punto del intervalo, entonces su representación en serie trigonométrica es única, luego pasa al caso en que la función es continua excepto en un punto del intervalo; verifica que aún se tiene la unicidad de la serie que converje a la función en los puntos restantes. Tal punto de discontinuidad llamó "punto excepcional" Si hubiera un número finito de puntos excepcionales, ¿se tendría aun la unicidad? Cantor generaliza su resultado a este caso. ¿Y si el "conjunto" de los puntos excepcionales fuera infinito? Esto fue un problema muy delicado, que necesitaba o exigía entrar en las profundidades de los números reales, aun no muy conocidos entonces. En 1872 publica un famoso trabajo en donde da solución al problema general. Descubre que en el caso infinito (¡existen distintos tipos de conjuntos infinitos!), los puntos excepcionales necesitaban estar convenientemente distribuidos en el intervalo. ¿Cómo conseguir esto? Buscando un método que analice los puntos excepcionales. Así Cantor va llegando a un nuevo mundo, el de los conjuntos ! Un problema que tuvo sus orígenes en el mundo físico va a proyectarse en el desarrollo de una hermosa teoría en el mundo abstracto, abriendo posibilidades insospechadas en el desarrollo de la matemática. Y Cantor entra resuelto a tal universo dispuesto a descubrir sus verdades.

En relación a la cuestión (e) planteada anteriormente, P. duBois-Reymond (en 1875) construye una función continua en $(-\pi, \pi)$ cuya serie de Fourier diverge en un punto dado. Posteriormente construye una función cuya serie de Fourier diverge en un conjunto denso en $(-\pi, \pi)$. Otros ejemplos en esta dirección fueron dados por Fejér en 1909. Aún, se han encontrado funciones reales continuas cuyas series de Fourier divergen en conjuntos que tienen la potencia del continuo. De esta manera se hace necesario buscar condiciones necesarias y/o suficientes que aseguren la convergencia de la serie de Fourier a la función dada. Así surgieron algunas, ya clásicas, condiciones suficientes relacionadas a los nombres de Dini, Lipschitz y Jordan. Veamos algunos argumentos. Dada una función $f(x)$ pongamos

$$d(x,t) = f(x+t) + f(x-t) - \lim_{n\to 0}[f(x+h) + f(x-h)].$$

Lipschitz, en 1864, prueba que existe $\delta > 0$ tal que $|\frac{d(x,t)}{t^k}| < C$ cuando $0 < t \leq \delta$, siendo C y k dos constantes positivas, entonces la serie de Fourier generada por $f(x)$ converge en $x \in (-\pi, \pi)$ a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x–h)]$, siempre que exista este límite. Obsérvese que si f es continua, entonces se tiene la convergencia puntual de la serie a $f(x)$. Años más tarde, Dini en 1890 extiende el criterio de Lipschitz, prueba que si existe $\delta > 0$ tal que $\int_0^\delta \frac{d(x,t)}{t}dt < \infty$, entonces la serie de Fourier de una función integrable $f(x)$ converge a $\lim_{h\to 0} \frac{1}{2}[f(x+h) + f(x-h)]$ para todo $x \in (-\pi, \pi)$, siempre que exista el límite. Poco tiempo después, Jordan en 1881 y 1882 introduce el importante concepto de función de variación acotada, tan útil en muchas partes del análisis. Con esta clase de funciones introduce un criterio de convergencia. Así, sea $f(x)$ una función integrable, entonces la serie de Fourier generada por $f(x)$ converge a $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x–0)]$ en todo punto de una vecindad en donde f es una función de variación acotada.

10. El Problema de Dirichlet. $\Delta u = 0$ es una ecuación simple de escribirse pero muy profunda en su significado, aún más cuando se dan ciertas condiciones extras. A ella está relacionada un famoso problema enunciado en el siglo XIX, conocido hoy como el Problema de Dirichlet, cuyo estudio permitió el desarrollo de fuertes teorías matemáticas. Precisemos un poco este problema.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (un conjunto abierto conexo); demos una función continua f definida en la frontera $\partial\Omega$ de Ω. Se trata de encontrar una función continua en $\Omega \cup \partial\Omega$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω y $u = f$ en $\partial\Omega$, donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Se trata de un típico problema de valor de contorno, el que fue planteado por Green en 1828. Muchos matemáticos del siglo XIX, y del XX, le dedicaron atención; muchas ideas surgieron del problema. En relación a las series trigonométricas, que es lo que ahora nos interesa, el problema de Dirichlet también contribuyó al desarrollo de la teoría.

Para simplificar asumamos que Ω es el círculo unitario D (con centro en el origen y radio 1, en la figura 10.1; los puntos de la frontera quedan determinados por el ángulo θ. De acuerdo al problema, damos una función continua $f(\theta)$ sobre la circunferencia (que es la frontera ∂D del círculo).

Recordemos que el problema consiste en encontrar una función u continua en el círculo cerrado $D \cup \partial D$ tal que $\Delta u = 0$ en D (funciones que satisfacen $\Delta u = 0$ se llaman funciones armónicas) y $u = f$ en ∂D. El matemático Hermann Schwarz procedió, en síntesis, como sigue. Desarrolla f en su serie de Fourier

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

y define

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) \quad . \tag{10.1}$$

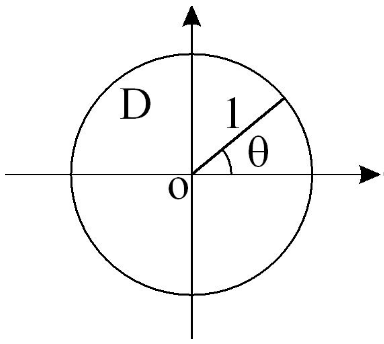

FIGURA 10.1. *Circulo unitario*

Si $r < 1$ observamos que $|r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)| \leq r^n(|a_n| + |b_n|) \leq r^n M$, M es constante, desde que por el lema de Riemann, $a_n \to 0$ y $b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

converge (uniformemente) si $r < 1$, luego la serie (10.1) converge uniformemente. Observemos que $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ es una función analítica (ella representa la potencia z^n, z complejo). Entonces la parte real y la parte imaginaria son funciones armónicas y se tiene así una serie uniformemente convergente de funciones armónicas, lo que implica que u es armónica en D. La condición de frontera se tiene ya que $u(1,\theta) = f(\theta)$. Finalmente, la continuidad de u en el círculo cerrado significa que $\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = f(\theta)$. Esto sigue de un resultado debido a Abel (1802-1829):

$$\text{“si } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ converge a } c, \quad \text{entonces } \lim_{r\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n = c. \text{ ”} \tag{10.2}$$

¿Y si la serie, tipo (10.1), no converge ? ...¿habría algún método de “sumación” que la haga convergente? Si, y de esto hablaremos después. Digamos ahora que por esa época se descubrieron ciertas interesantes propiedades de los coeficientes de Fourier. Si f y f^2 son funciones integrables en $[-\pi, \pi]$, se tiene entonces la igualdad de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

De un modo más general se tiene la desigualdad de Bessel

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Observemos que si f^2 es integrable, entonces $\lim a_n = 0 = \lim b_n$, que ya sabemos. También, si f y g, así como sus cuadrados, son integrables en $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)$$

donde a_n, b_n y α_n, β_n son los coeficientes de Fourier de f y g respectivamente.

11. La Teoría de Lebesgue y Sus Proyecciones . Llegamos a inicios del siglo XX, época de grandes transformaciones científicas; en la matemática en particular. Los espacios abstractos son elaborados, entre otras cosas. En 1904 Fejér (1880-1960), un alumno de Schwarz, fue informado de un novedoso método, debido al matemático italiano Césaro, según el cual series que no son convergentes podrían ser por otro método, el de los promedios aritméticos. Seamos más explícitos. Sea la serie;

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_k;$$

pongamos

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \ y \ \sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

Diremos que $\sum u_k$, es Césaro sumable ó C-sumable si $\{\sigma_n\}$ es una sucesión convergente. Fejér descubre que si la serie de Fourier es C-sumable, entonces la serie converge a $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en todo $x \in (-\pi, \pi)$ en el cual $f(x \pm 0)$ existe, siempre que si $f$es limitada entonces f debe ser integrable en $(-\pi, \pi)$; si f es no integrable se exige que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

sea absolutamente convergente.

Hemos visto que en el cálculo de los coeficientes de Fourier fue necesario precisar la idea de integral; así lo hicieron Cauchy, Riemann,... Si bien es cierto que las contribuciones de los matemáticos del siglo XIX fueron de primer orden, sin embargo el análisis tenía aun imperfecciones (y esto es propio de toda época!).

La integral de Riemann no incluía a muchas funciones; existen funciones limitadas (como la función de Dirichlet) que no son integrables. Motivado por los problemas del análisis de Fourier, el matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) construye una bella teoría de la medida de conjuntos, con la cual elabora una teoría de la integral más potente, incluyendo a las funciones limitadas que son integrables según Riemann. La función de Dirichlet ya es integrable según esta teoría. Sus ideas fueron expuestas en su tesis doctoral: “Integral-Longitud-Area” presentada en 1902, lo que fue complementado en su obra “ Lecciones sobre integración y la investigación de las funciones primitivas” (1904).

La teoría de la medida de Lebesgue aportó los fundamentos para una más armoniosa teoría de las series trigonométricas, haciéndola más completa, simétrica y más estética. En base a ella el análisis funcional adquiere madurez. El resultado fundamental de la teoría, conocido como el teorema dominado de Lebesgue, permite intercambiar límites.

Así, “sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles (funciones más generales que las funciones continuas) tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ salvo que x pertenezca a un conjunto de medida nula en el dominio A (se observa que f es medible); asumamos que $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ para todo n, donde φ es una función cuyo valor absoluto es integrable (en el sentido de Lebesgue, lo que implica que los $f_n's$ y f son integrables).

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A f(x)dx\text{''}.$$

Lebesgue extiende, en 1903, el teorema de Riemann respecto a los coeficientes de Fourier tratando funciones que pueden ser limitadas o no serlas, pero si integrables según Lebesgue (L-integrables), más concretamente, “si f es L-integrable en (a, b), entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx\text{''}.$$

Este resultado es hoy conocido como el lema de Riemann-Lebesgue, que ya mencionáramos antes.

Si f es L-integrable sobre $[-\pi, \pi]$ y si f es representable por una serie trigonométrica, entonces la serie es la serie de Fourier de f. Sin embargo, podría suceder que una función f sea representable por una serie trigonométrica sin que f sea L-integrable. Si esto fuera el caso, ¿cómo determinar los coeficientes de la serie?

Una respuesta a esta cuestión ha merecido investigaciones de varios matemáticos, como las debidas a A. Denjoy (1921 y 1941) J. Marcinkiewicz-A. Zygmund (1936), J. Burkill (1936 y 1951), R. James (1946,1950 y 1954). Por otro lado, los analistas ya tenían a la teoría de conjuntos, y ahora una poderosa teoría de la integral. En este contexto, ¿es posible construirse una función continua cuya serie de Fourier diverja sobre un conjunto de medida no nula?. Kolmogorov, en 1926, probó la existencia de funciones integrables, cuya serie de Fourier es divergente en todos los puntos del dominio. En 1915, Lusin planteó la siguiente cuestión:

“si f es una función tal que

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty \ ; \tag{11.1}$$

¿será que la respectiva serie de Fourier converge salvo en un conjunto de medida nula?"

Observemos que si f^2 es L-integrable en $[-\pi, \pi]$ entonces por la desigualdad de Bessel se tiene la hipótesis de la cuestión. Explicitemos un poco estas ideas.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica, de período 2π, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

(lo que escribiremos $f \in L^2[-\pi, \pi]$). Entonces se tiene que la serie de Fourier converge a f en el sentido de $L^2[-\pi, \pi]$, esto es, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x) - f(x)|^2 dx = 0, \text{ siendo}$$

$$s_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Además vale la identidad de Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

como ya mencionamos en la anterior sección. Observemos en particular que tenemos la desigualdad (11.1). Ahora bien, dadas las sucesiones $(a_n)_{n=0,1,2,...}$, y $(b_n)_{n=1,2,}$, ¿ellas son los coeficientes de Fourier de alguna, función ? En general no son, Por ejemplo, si tales sucesiones fueran los coeficientes de Fourier de una $f \in L^2[-\pi, \pi]$, entonces los $a_n's$ y $b_n's$ deberán satisfacer la desigualdad (11.1). Y, ¿esta desigualdad (11.1) es suficiente para garantizar que los $a_n's$ y $b_n's$ son los coeficientes de Fourier de una cierta $f \in L^2[-\pi, \pi]$? ... Acá entra con fuerza la integral de Lebesgue porque si la integral en juego fuera en el sentido de Riemann, la respuesta es negativa; pero si fuera en el sentido de Lebesgue la respuesta es afirmativa y es el celebrado teorema de Riesz-Fischer [F. Riesz-Fischer (1907)]: "toda serie trigonométrica, tal que sus coeficientes satisfacen (11.1), es la serie de Fourier de una función $f \in L^2[-\pi, \pi]$".

Ahora regresemos a la cuestión planteada por Lusin teniendo a vista el teorema de Riesz-Fischer. Este teorema afirma el resultado pero la convergencia es en $L^2[-\pi, \pi]$ y no puntualmente salvo en un conjunto de medida nula. La conjetura de Lusin resistió muchos años a los esfuerzos de los especialistas, hasta el año 1966 cuando L. Carleson probó: "la serie de Fourier de una función $f \in L^2(-\pi, \pi)$ converge puntualmente salvo en un conjunto de medida nula".

Como consecuencia de este resultado se tiene:

"la serie de Fourier de una función continua converge, salvo en un conjunto de medida nula".

Un bello y profundo resultado. En 1968, R. Hunt generaliza el resultado de Carleson a los espacios L^p , $1 < p < \infty$.

12. Perspectivas del Análisis de Fourier . Lo expuesto en las secciones anteriores es una motivación de la importancia de un análisis clásico en el desarrollo de ideas más actuales. Así hemos visto como la obra de Fourier influenció en la investigación en áreas como el análisis funcional, en las ecuaciones en derivadas parciales, y en el análisis armónico mismo. Énfasis especial damos a la formalización de una reciente teoría, la de las ondículas ("wavelets"). Lo interesante es que esta teoría fue elaborada inicialmente por matemáticos aplicados o ingenieros que trabajaban en áreas como son las señales, imágenes, en la exploración de campos de petróleo. Esto fue hecho a inicios de los años 1980's y fue formalizada matemáticamente entre 1985 – 87. Es una teoría de actual investigación, tanto desde el punto de vista puro como el aplicado; el espectro de sus aplicaciones es muy amplio.

Uno de los orígenes de las ondículas está precisamente en la obra de Fourier quién en 1807 afirmó que cualquier función 2π-periódica $f(x)$ puede expresarse como la suma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

es decir $f(x)$ está representada por su serie de Fourier. En esta afirmación existen numerosísimas cuestiones por analizar. Por ejemplo, ¿es siempre cierta tal representación?... En 1873, Dubois-Reymond construye una función continua periódica, tal que la serie de Fourier asociada diverge en un punto dado. Este hecho abrió una serie de investigaciones en la teoría de Fourier, enriqueciéndola y proyectándola a dominios insospechados.

El lector encontrará en el libro de Gasquet-Witomski [4] una atractiva presentación del análisis de Fourier y su relación con la teoría de filtros y del tratamiento de las señales; su último capítulo está dedicado a una introducción motivada del análisis de las señales por la teoría de ondículas. Su lectura es recomendada para matemáticos, físicos o ingenieros por la excelente presentación de los temas.

En el análisis de Fourier también se encuentran argumentos que servirían para la elaboración de las operadores integrales singulares, tanto la teoría $\mathbb{R}^1$ como la $\mathbb{R}^n$ (teoría clásica de Calderón-Zygmund) o aún la nueva teoría de operadores de Calderón-Zygmund. En esta orientación existen excelentes libros, algunos clásicos, otros más recientes. El lector encontrará en Ortiz [9] una motivación histórica de las integrales singulares, así como una bibliografía organizada cronológicamente, incluyendo algunas referencias sobre la teoría de ondículas. En Ortiz [10], capítulo 11 el lector puede encontrar algunas relaciones de la obra de Fourier con la teoría de la medida de Lebesgue. Los tres primeros capítulos del libro de Torchinsky [12] están dedicados a desarrollar aspectos del análisis de Fourier qué sirven para comprender los temas que sobre análisis armónico el autor desarrolla en los capítulos siguientes.

El análisis de Fourier fue investigado de la década de los años 1940's por el matemático francés Laurent Schwartz, cuya teoría fue publicada en su famoso libro: "Théorie des distributions", 1950-51, y re-escrita en 1966,[13]. En ella se establece que. "toda distribución periódica tiene una serie de Fourier la cual converge a la distribución dada".

Contenido

Referencias

[1] Avila, G. *Evolução dos Conceitos de Função e Integral*. Matemática Universitaria. $N^\circ 1$. 1985.
[2] Carslaw, H.S. *Introduction to the theory of Fourier's Series and Integrals*. Dover. Pub. 1930.
[3] Figueiredo, D. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides. 1977.
[4] Gasquet, C.; Witomski, P. *Analyse de Fourier et Applications*. Masson. Paris. 1990
[5] Horvath, J. *Desarrollo del Análisis Funcional*. México. 1972.
[6] Jeffery, R.L. *Trigonometric Series*. Univ. of Toronto Press. 1956.
[7] Kestelman, H. *Modern Theories of Integration*. Dover. Pub. 1960.
[8] Myint, U.T. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Amer. Elsevier Pub. Corp. 1973.
[9] Ortiz, A. *Integrales Singulares y Temas Afines* Pro-Matemática. PUCP. 1991.
[10] Ortiz, A. *La Matemática a Través de Clásicas Áreas*. Vol. 3 PUCP. UNT. Lima Febrero. 2017.
[11] Zygmund, A. *Trigonometric Series*. Cambridge. 1968.
[12] Torchinsky, A. *Real-Variable Méthods in Harmonic Analysis*. Acad. Press. USA. 1986.
[13] Schwartz, L. *Théorie des Distributions*. Hermann. París. 1966.