

This is a reprint of the paper
Autómatas celulares estocásticos
by GLORIA TORRES
& GERMAN HERNANDEZ
published in **Lecturas Matemáticas**
15 (1994), pp. 167–191

AUTÓMATAS CELULARES ESTOCÁSTICOS

GERMÁN HERNÁNDEZ
LUZ GLORIA TORRES

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

ABSTRACT. In this expository paper, the basic mathematical concepts needed for the formalization of the notion of ‘cellular automaton’ are presented along with a generalization which uses probabilistic aspects in the local interactions. This generalization (stochastic cellular automata) provides a more realistic modeling of natural phenomena. The generation of complex processes from simple rules leads to the consideration of statistical peculiarities in the evolution of cellular automata. Two procedures are briefly described here. A simple illustration of the deterministic model generating divisibility patterns of certain polynomials and a simple illustration of the stochastic model simulating random walks are exhibited.

Key words and phrases. Finite state machine, cellular automata, Cayley groups, regular cellular space, global dynamics, stochastic cellular automata.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 68Q80. Secondary 68Q75

RESUMEN. Se presentan los conceptos matemáticos básicos para la formalización de la noción de ‘autómata celular’, incluyendo una generalización que introduce aspectos probabilísticos en las interacciones locales. Esta generalización (autómatas celulares estocásticos) proporciona modelos más realistas de fenómenos naturales. La generación de comportamientos complejos a partir de reglas muy simples conduce a la consideración de características estadísticas en la evolución de los autómatas celulares. Se describen aquí brevemente dos procedimientos. Se exhibe una aplicación sencilla del modelo determinístico que genera patrones de divisibilidad de ciertos polinomios y una aplicación igualmente simple del modelo estocástico que simula caminos aleatorios.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

1. INTRODUCCIÓN

Los Autómatas Celulares (AC's) han surgido como una forma de describir comportamientos complejos a partir de descripciones simples, razón por la cual se ha visto en ellos un sistema ideal para modelar fenómenos naturales. El enfoque en su estudio ha sido preponderantemente empírico, en el marco de aplicaciones en diversos campos, y se ha caracterizado por un escaso tratamiento riguroso de conceptos. Uno de los objetivos de este artículo es dar a conocer formulaciones que muestran un AC como un ente matemático interesante.

La sección 2 presenta una breve reseña histórica y un panorama general sobre las diferentes áreas de aplicación de los AC's. La sección 3 contiene conceptos que conducen a una definición formal del AC determinístico.

Las interacciones locales inducen una dinámica global, que permite considerar el AC como un sistema dinámico discreto. En la sección 4 se describe una familia de autómatas celulares unidimensionales, que han permitido la clasificación de AC's según la evolución de sus trayectorias en el espacio de configuraciones.

La aleatoriedad de un autómata celular se puede mirar, bien en la inclusión de reglas no determinísticas en la dinámica local, o bien en su comportamiento global donde se generan correlaciones entre celdas no vecinas. En la sección 5 se da una definición de los autómatas celulares probabilísticos o estocásticos y se presentan dos modelos de su evolución estadística.

Como complemento a la teoría se presentan en el apéndice dos programas computacionales en lenguaje C. En el programa *Pascal* se exhibe una familia de autómatas celulares determinísticos unidimensionales, que representan gráficamente mediante *pixels* con diferente color, los coeficientes divisibles módulo p del polinomio $(1 + x + x^2 + \dots + x^d)^n$. El programa *Rndwalk* corresponde a un autómata celular estocástico unidimensional donde la regla probabilística se ha definido de tal forma que la actualización se efectúa por bloques.

2. ANTECEDENTES

El desarrollo de los autómatas celulares comenzó hacia 1943 cuando JOHN VON NEUMANN empezó a considerar la posibilidad de generación de vida artificial, tratando de que un robot se copiara a sí mismo. Bajo sugerencia de STANISLAW ULAM, coinventor de la bomba de hidrógeno, VON NEUMANN utilizó patrones, en una cuadrícula en el plano, que evolucionan según una regla de transformación fija. De esta forma, el problema de autorreproducción mecánica quedaba reducido a la búsqueda de ciertas configuraciones que, con la aplicación de la regla, dieran lugar a copias idénticas.

Muchos autómatas interesantes han surgido como “juegos de computador”, y, gracias a las facilidades computacionales, a diversas teselaciones del plano se aplican reglas locales dando lugar a vistosos cambios en las configuraciones en las que subyace una rica estructura matemática. Tal es el caso del llamado *Juego de la Vida* presentado por JOHN HORTON CONWAY en la columna ‘Mathematical Games’ de *Scientific American* (a cargo de MARTIN GARDNER) en octubre de 1970. El *Juego de la Vida* puede considerarse un autómata celular bidimensional y consiste de un plano dividido en pequeños cuadrados, llamados *celdas*, algunos de los cuales se somborean. Las celdas sombreadas son celdas *vivas*, las no sombreadas son celdas *muertas*. Cada celda tiene ocho *vecinas* que corresponden a las celdas adyacentes

en los diferentes puntos cardinales: N, S, E, O, NE, NO, SE y SO. Las siguientes reglas se aplican simultáneamente a todas las celdas:

Si una celda muerta tiene exactamente tres celdas vecinas vivas, éstas se “reproducen” y le dan vida. Si una celda viva tiene dos o tres celdas vecinas vivas, la celda se conserva viva, pero si hay menos de dos celdas vecinas vivas, la celda muere por “aislamiento”. Si una celda tiene más de tres celdas vecinas vivas, muere por “superpoblación”¹.

Un investigador inicial de AC's que merece ser mencionado es EDWARD FREDKIN quien, en 1960, formuló un concepto de “mecánica de la información”, en analogía con la mecánica cuántica. Se basa en el supuesto de que el mundo físico proporciona constantemente información y puede, por consiguiente, modelarse como un gran AC tridimensional.

En 1965, JOHN HOLLAND utilizó AC's para resolver problemas de adaptación y optimización. HEDLUND [13] (1969) y RICHARDSON [19] (1972) estudian los AC's como sistemas dinámicos.

Las aplicaciones de los autómatas celulares son múltiples en campos como física, biología, química, matemáticas y ciencias de la computación, entre otros.

Los sistemas físicos que contienen muchos elementos discretos con interacciones locales son adecuados para ser modelados por autómatas celulares. Además, cualquier sistema físico que obedezca ecuaciones diferenciales puede ser aproximado por autómatas celulares con variables discretas y ecuaciones de diferencias; han sido usados para crear modelos digitales de universos físicos que simulan fenómenos como reacciones químicas, procesos de difusión, hidrodinámica, mecánica, filtración (*percolation*), sistemas *ising*, etc. (véase [22]).

Por otro lado, el desarrollo de estructuras y patrones de ciertos organismos vivos simples obedece reglas locales sencillas que permiten la descripción por medio de autómatas celulares. En poblaciones de plantas, por ejemplo, el valor de una celda podría corresponder a la presencia o ausencia de una planta y las reglas serían ciertas interacciones ecológicas locales.

Los autómatas celulares han sido objeto de estudio en el contexto de la teoría formal de la computación. Algunos de estos sistemas han demostrado ser capaces de computación universal, es decir, además de simular cualquier otro autómata celular, imitan el comportamiento de una máquina universal de Turing. Un ejemplo es el citado *Juego de la Vida* en dos dimensiones (ver [3]). También se ha probado que autómatas celulares unidimensionales cuyas reglas tienen en cuenta grupos de tres celdas adyacentes y pocos estados posibles para cada celda, también poseen la propiedad de computación universal (ver [24]). Además, los autómatas celulares han sido utilizados como computadores paralelos en el procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones. Como sistema computacional, el autómata celular manipula la información contenida en los valores iniciales de las celdas según reglas específicas. La evolución del sistema da lugar a una configuración que corresponde a la “salida” o resultado de la computación.

Hasta ahora, gran parte de la teoría desarrollada corresponde a autómatas celulares que evolucionan según reglas determinísticas. Con el fin de obtener modelos más exactos de fenómenos naturales es necesario considerar aspectos probabilísticos

¹Para mayor información sobre el *Juego de la Vida* consúltese [3] y [11]

en su dinámica. Esto da lugar a los llamados autómatas celulares *estocásticos*, los cuales pueden generalizarse aún más con la admisión de reglas locales no uniformes. De esta manera, se pueden convertir en sistemas que alcanzan un comportamiento prefijado mediante aprendizaje (ver [16]).

3. DEFINICIONES

La noción de ‘autómata celular’ (AC) ha sido “definida” de diversas maneras; la gran variedad de notación y terminología ha constituido una de las dificultades para su estudio. Los trabajos de FRANKLIN y GARZÓN [6]–[10], sobre los cuales se basa el presente artículo, representan un esfuerzo en la formalización de este concepto.

3.1 Máquinas de estado finito.

Un *alfabeto* Σ es un conjunto finito de símbolos. Una *palabra* sobre Σ es una secuencia finita de símbolos de Σ ; el conjunto de todas las palabras sobre Σ se denota Σ^* .

Un *autómata finito* (AF) es un modelo abstracto de una máquina computacional primitiva que consiste de un registro o control interno (memoria), un conjunto de valores para el registro, una cinta, una lectora de cinta y un conjunto de instrucciones operativas. Formalmente, un autómata finito es una quintupla $M = (Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$ donde

- (i) Q es un conjunto finito de estados (configuraciones de memoria).
- (ii) Σ es el alfabeto de entrada.
- (iii) $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es la función de *transición* o *dinámica* del autómata, que corresponde al “programa” o conjunto de instrucciones.
- (iv) $q_o \in Q$ es un estado especial llamado *estado inicial*.
- (v) $F \subseteq Q$ es un conjunto finito de estados llamados *estados finales*.

Esta máquina puede imaginarse como un control finito que está en un estado o configuración $q \in Q$ en un momento dado. Posee una cabeza lectora que “lee” (uno por uno) símbolos de la palabra de entrada, la cual está escrita en una cinta dividida en celdas, potencialmente infinita a la derecha. Cada celda contiene un único símbolo.

Al comienzo de la computación, el control finito está en el estado q_o y la cabeza lectora está colocada sobre el símbolo extremo izquierdo de la palabra de entrada. En cada movimiento, según el símbolo que lee y la configuración actual (estado), el control finito pasa a un estado (que puede ser el mismo) conforme al conjunto de instrucciones dado por la dinámica δ y se traslada a la celda contigua a la derecha.

Si la máquina queda en un estado final q ($q \in F$) al terminar de leer la palabra de entrada, se dice que *acepta* o *reconoce* la palabra. El conjunto de palabras aceptadas constituye el *lenguaje* aceptado por el autómata.

Los autómatas así descritos tienen salidas en el alfabeto $\{0, 1\}$ (1 si acepta, 0 si no acepta). Algunas veces es conveniente considerar autómatas finitos con alfabetos de salida más generales. Un *autómata finito con salida* es una sextupla $M = (Q, \Sigma, \Delta, \lambda, \delta, q_o)$ donde Q, Σ, δ, q_o son como antes; Δ es el alfabeto de salida y λ es una aplicación de Q en Δ que asocia un símbolo de salida a cada estado (máquina de MOORE) o una aplicación de $Q \times \Sigma$ en Δ que asocia una salida a una transición (máquina de MEALY). Tanto a los autómatas finitos como a los modelos con alfabetos de salida más generales se les conoce como *máquinas de estado finito*.

3.2 Grafos de Cayley.

El poder computacional de las máquinas de estado finito es limitado. No obstante, la acción de muchas de ellas en paralelo puede dar lugar a fenómenos complejos. En su forma más general, un autómata celular consta de un gran número de estos procesadores simples dispuestos en un arreglo reticular. Cada uno de ellos recibe “información” de un número finito de procesadores, actualiza su estado y determina la salida en el siguiente instante que, a su vez, es enviada a otros procesadores. La simplicidad de sus componentes, la homogeneidad en las interconexiones y la uniformidad en su comportamiento son las características más sobresalientes. El modelo matemático requiere de un grafo enumerable, localmente finito, en el que los vértices corresponden a los procesadores y los ejes a las interconexiones entre ellos. Con grafos de Cayley, cuya definición se da a continuación, se garantiza la uniformidad.

A cada elemento g de un grupo con n generadores a_1, a_2, \dots, a_n , se le asocia un punto P_g (en el plano o espacio). Si $ga_i = h$ entonces se une el punto P_g con el punto P_h por medio de un arco de color C_i ; en tal caso (puesto que $ha_i^{-1} = g$), el punto P_h se une al punto P_g con un arco de orientación inversa al anterior y color C_i . De esta manera, se obtiene un grafo donde un eje positivamente orientado de cada color parte de un punto y un eje positivamente orientado de cada color llega a él. Hay tantos colores como generadores. Este sistema de puntos y ejes constituye un *grafo de Cayley*. Se caracteriza por tener los ejes “coloreados” y “orientados”.

Dado un grafo conexo Γ es posible definir una coloración–orientación sobre él utilizando el grafo singular S_n (que consta de un solo punto y $2n$ ejes), el grafo más simple que se puede colorear (con n colores) y orientar. Si $e_1, e_1^{-1}, e_2, e_2^{-1}, \dots, e_n, e_n^{-1}$ son los ejes de S_n , e_j se interpreta como un eje positivamente orientado de cierto color y e_j^{-1} como el eje negativamente orientado del mismo color.

Una *coloración–orientación* (con n colores) de un grafo Γ es una aplicación φ de los ejes de Γ en los ejes de S_n que satisface

1. Por cada vértice P de Γ , los ejes de Γ están en correspondencia uno a uno con los ejes de S_n .
2. Para cada eje s de Γ , $\varphi(s^{-1}) = \varphi(s)^{-1}$

En un grafo la *vecindad* X_i de un vértice i es el conjunto de todos los vértices j adyacentes a i (existe un eje que une a i con j). El cardinal de este conjunto es el *grado* del vértice i . Un grafo es *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado.

La coloración de un grafo regular se llama *regular* si existe un grafo X con coloración, con un número finito de ejes, llamado *vecindad fundamental*, con un vértice distinguido λ tal que la vecindad X_i es isomorfa a X . El isomorfismo $f_i : X_i \rightarrow X$ aplica el vértice i en el vértice λ y preserva la coloración de los ejes.

Para garantizar la homogeneidad de las interconexiones, el grafo subyacente de un autómata celular debe tener una coloración regular. Así, un grafo de Cayley junto con su vecindad fundamental, al que se le llamará *espacio celular regular*, permite proveer al autómata de las características mencionadas.

3.3 Autómatas Celulares.

Un autómata celular (AC) es una tripla (Γ, N, M) tal que

- (i) Γ es un espacio celular regular.

- (ii) N es un conjunto finito de vértices (celdas) de Γ ; N es una vecindad isomorfa a la vecindad fundamental X . A los vértices de N se les asigna una numeración fija, usualmente $1, 2, \dots, d$ y 0 para la celda “central”. Cada vértice de N se denota con el número correspondiente.
- (iii) M es una máquina de estado finito con conjunto de estados Q , alfabeto de entrada $Q^d := Q \times \dots \times Q$ y alfabeto de salida Q . La función de transición local está dada por

$$\begin{aligned} \delta : Q \times Q^d &\longrightarrow Q \\ (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}) &\longmapsto \delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}) \end{aligned}$$

donde x_i es el estado del vértice i .

La numeración de los elementos de N induce una numeración de los elementos de la vecindad de la celda i de la forma $i + j$, $j \in \mathbb{N}$. Si en la vecindad de una celda se incluye la celda central, se obtiene la vecindad de VON NEUMANN; en caso contrario, se obtiene la vecindad de MOORE. Cada vértice i contiene una copia de la máquina de estado finito M . En forma sincrónica, cada máquina en i actualiza su estado según la dinámica δ , teniendo en cuenta los estados de las máquinas en las celdas vecinas y su propio estado. Este “movimiento” es ejecutado en tiempos discretos.

El conjunto Q puede tener una estructura algebraica, usualmente un cuerpo finito o un anillo finito con unidad; el elemento 0 se llama *estado nulo*. Si $Q = \{0, 1\}$, el AC se llama *elemental*.

Una *configuración* de un AC es una función que asocia a cada celda un estado,

$$\begin{aligned} x : \Gamma &\longrightarrow Q \\ i &\longmapsto x(i) = x_i. \end{aligned}$$

Si $x(i) = 0$ para todo i , se tiene la configuración *nula*. El conjunto de las configuraciones se denota \mathcal{C} .

Un autómata celular se puede ver como un sistema dinámico discreto. Si se tiene una configuración en un tiempo dado, el autómata evoluciona hacia otra configuración según la dinámica global, denotada por \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ \mathcal{T}(x)_i &= \delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+d}). \end{aligned}$$

$\mathcal{T}(x)_i$ indica el estado de la i -ésima celda en la configuración $\mathcal{T}(x)$. \mathcal{C} , con la topología producto, es un espacio metrizable, compacto, perfecto y totalmente conexo; por lo tanto, es homeomorfo al espacio de Cantor. Si $\mathcal{C} = Q^{\mathbb{Z}}$, la métrica natural es

$$\delta(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{k^{|i|}}$$

donde k es el número de estados en Q .

Uno de los problemas importantes en el estudio de los autómatas celulares como sistemas dinámicos es el comportamiento asintótico de la dinámica global \mathcal{T} , es

decir, la caracterización del conjunto $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n(c)$, para una configuración inicial c .

Estos conjuntos límites se conocen para un número reducido de autómatas celulares. La mayoría de los resultados se han establecido de manera empírica: algunos son puntos fijos, otros tienen órbitas periódicas, otros se comportan de manera caótica [24].

La dinámica global se ha caracterizado completamente si la función es lineal [19], es decir, si satisface:

$$\text{Para } x, y \in \mathcal{C}, \lambda \in Q, \quad \mathcal{T}(\lambda x + y) = \lambda \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y).$$

Recíprocamente, en el caso lineal, dada una dinámica global \mathcal{T} se trata de determinar si existe una regla local δ que genere el comportamiento global especificado por \mathcal{T} . En este sentido, RICHARDSON [19] y HEDLUND [13] dieron (independientemente) una caracterización topológica de la dinámica global de un autómata celular:

Teorema. (HEDLUND y RICHARDSON) *Una función $\mathcal{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es una dinámica global de un autómata celular si y sólo si*

- (1) $\mathcal{T}(O) = O$ donde O es la configuración nula.
- (2) \mathcal{T} conmuta con traslaciones, es decir, $\mathcal{T}(S_i(x)) = S_i(\mathcal{T}(x))$ donde $S_i(x)_k = x_{i-k}$.
- (3) \mathcal{T} es continua (en la topología producto).

4. EJEMPLOS

4.1. Ejemplo. Si se toma \mathbb{Z} , el conjunto de los números enteros, como espacio celular y se considera como vecindad de cada celda la formada por las dos celdas adyacentes a izquierda y a derecha, se obtiene una cantidad importante de autómatas celulares unidimensionales cuyo comportamiento local y global ha sido estudiado cuidadosamente por STEPHEN WOLFRAM [24].

Se asume que cada celda puede tomar los valores 0 ó 1. Hay $2^3 = 8$ valores diferentes para las vecindades. Una dinámica local asigna un valor 0 ó 1 a la celda central; se obtiene así una sucesión binaria de ocho dígitos (o su equivalente decimal) que identifica la regla. De esta forma hay 2^8 diferentes autómatas celulares posibles con estas especificaciones. No obstante, se imponen ciertas restricciones no esenciales, a saber:

1. La imagen de la vecindad nula por δ debe ser cero (para evitar generación espontánea de actividad).
2. Las reglas deben ser simétricas con respecto a la celda central, es decir, la imagen de $(1, 0, 0)$ es la misma de $(0, 0, 1)$.

Con estas condiciones solo quedan 32 dinámicas "legales". La regla identificada con el número 90 corresponde a la dinámica definida por

$$\delta(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}) = (x_{i-1} + x_{i+1}) \text{ módulo } 2.$$

Para efectos de simulación por computador, se puede considerar un número finito de celdas con condiciones de frontera periódicas donde la primera y la última celdas se identifican. Esto equivale a tomar \mathbb{Z}_p , el conjunto de enteros módulo p , como

espacio celular (p un entero positivo). Si se considera una configuración inicial formada por un solo bit encendido (valor 1) que puede ser la celda central en la parte superior del monitor y cada iteración se representa en la línea inmediatamente inferior, la evolución del autómata da lugar al patrón que se obtiene del triángulo de Pascal donde los bits encendidos corresponden a los coeficientes del polinomio $(1+x)^n$ no divisibles por 2 en la n -ésima iteración de la dinámica global.

El estudio del comportamiento local y global de los 32 autómatas celulares mencionados fue llevado a cabo mediante simulación y los resultados pueden extenderse a autómatas más generales. WOLFRAM determina cuatro clases diferentes, según la evolución de sus trayectorias en el espacio de configuraciones:

Clase 1. Cada configuración finita evoluciona hacia una configuración estable en un número finito de pasos. Corresponde a un único punto límite en sistemas dinámicos continuos. El resultado de la evolución se determina independientemente de los estados iniciales.

Clase 2. Cada configuración finita evoluciona hacia configuraciones periódicas en un número finito de pasos. Corresponde a ciclos límites en sistemas dinámicos continuos. El comportamiento límite es inevitable en AC's finitos. Los autómatas celulares infinitos exhiben ciclos finitos en circunstancias excepcionales.

Clase 3. Las trayectorias en el espacio de configuraciones a partir de valores iniciales aleatorios evolucionan hacia patrones caóticos. Corresponden a los atractores extraños en sistemas dinámicos continuos.

Clase 4. Las trayectorias evolucionan hacia patrones muy complejos. Da lugar a comportamientos que no se encuentran en sistemas dinámicos continuos y que no es posible predecir; éste debe determinarse por simulación explícita.

4.2 Ejemplo. (Ver el programa *Pascal* en el Apéndice) Una modificación en la vecindad de las celdas en el ejemplo 4.1 da lugar a un AC cuya evolución también corresponde a los patrones de divisibilidad módulo 2 de los coeficientes del polinomio $(1+x)^n$ y, además, permite obtener una generalización a polinomios de mayor grado.

De igual manera, se toma \mathbb{Z} como espacio celular. La vecindad (de VON NEUMANN) de la celda i está formada por ella misma y la celda adyacente $i-1$. Se aplica la regla

$$\delta(x_i, x_{i-1}) = (x_i + x_{i-1}) \pmod{2}.$$

Si se parte de una configuración inicial donde sólo la celda 0 tiene valor 1 (bit encendido), se obtiene el patrón del triángulo de Pascal.

Con el mismo espacio celular, pero tomando como vecindad de VON NEUMANN de la celda i las celdas $i-1, i-2, \dots, i-d$; $d = 2, 3, \dots$, la regla definida por

$$\delta(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-d}) = (x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-d}) \pmod{2}$$

da lugar al patrón de divisibilidad módulo 2 de los coeficientes de los polinomios $(1+x+x^2+\dots+x^d)^n$, $n = 0, 1, \dots$, partiendo de la configuración inicial descrita anteriormente. Aquí, n corresponde a la n -ésima iteración del autómata celular; $n = 0$ corresponde a la configuración inicial.

Si se considera como alfabeto de entrada y salida el conjunto $Q = \{0, 1, \dots, p-1\}$ siendo p un entero positivo, la evolución del autómata celular con dinámica local

$$\delta(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-d}) = (x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-d}) \pmod{p}$$

genera los patrones de divisibilidad módulo p de los coeficientes de los mismos polinomios. El programa *Pascal* ofrece la opción de representar cada valor de k , $k = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ con un color diferente para una mejor visualización del autómata.

5. AUTÓMATAS CELULARES ESTOCASTICOS

En la teoría de autómatas, la búsqueda de modelos computacionales más poderosos lleva a una generalización de las dinámicas permitiéndoles un comportamiento no determinístico (la función de transición asigna a un estado un conjunto finito de *posibles* estados en cada movimiento atómico). En el caso de los autómatas finitos el poder computacional no es incrementado, ya que existen algoritmos que construyen máquinas determinísticas equivalentes. La dinámica global de un autómata celular cuyas máquinas de estado finito son no determinísticas no es una función sino una relación entre configuraciones. RICHARDSON [19] caracteriza las relaciones binarias sobre \mathcal{C} que corresponden a dinámicas globales no determinísticas.

Para modelar sistemas naturales tanto físicos como biológicos utilizando autómatas celulares, es conveniente considerar en su dinámica aspectos probabilísticos que simulen el ruido presente. Estos pueden ser introducidos permitiendo que las funciones de transición se escojan aleatoriamente de un conjunto de reglas determinísticas o asignando una regla de transición local probabilística. En este trabajo se adopta la segunda opción, pero es conveniente anotar que no hay una definición estándar de autómatas celulares estocásticos. Las definiciones se presentan *ad hoc*, según el problema que se va a resolver.

5.1 Definición. Un autómata celular *estocástico* o *probabilístico* es una tripla (Γ, N, M) tal que

- (1) Γ, N, M son como en 3.2.2 y
- (2) la función de transición $\delta : Q \times Q^d \rightarrow Q$ es estocástica, es decir,

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+d})$$

toma un valor x_k con probabilidad $f(x_k)$, donde $\sum_{x_k \in Q} f(x_k) = 1$.

Las definiciones 3.2.2 y 5.1 consideran el autómata celular como sistema autónomo. Generalizaciones del AC permiten que el sistema actúe recíprocamente con el ambiente. Se logra una generalización aún mayor si se le quita la uniformidad de su comportamiento reemplazando las dinámicas locales convencionales por interacciones locales no uniformes. En este caso se garantiza una uniformidad estadística del autómata (ver [16]).

5.2 Ejemplo. (Ver el programa *Rndwalk* en el Apéndice) Considérese el espacio celular y la vecindad fundamental del ejemplo 4.1. Se pretende simular la trayectoria de partículas que se mueven aleatoriamente sobre una línea recta, utilizando un autómata celular estocástico. Para poder traducir el movimiento de partículas en la dinámica es conveniente que las tres celdas se actualicen en cada paso, en vez de actualización de una sola celda como en el autómata convencional. Con este objeto se considera una partición del espacio celular \mathbb{Z} en bloques disjuntos de tres celdas. Puesto que de esta forma no hay intercambio de información entre bloques en un solo paso, la partición debe cambiarse de un paso al siguiente, razón por la

cual se tienen en cuenta tres particiones que se usan de manera cíclica, a saber, en la primera se incluyen grupos de tres celdas contadas a partir de la celda i ; en la segunda se incluyen grupos de tres celdas a partir de la celda $i+1$ y la tercera consta de bloques de tres celdas a partir de la celda $i+2$. Un sistema como éste puede ser descrito como un autómata celular ordinario si se utiliza un mayor número de estados. En el programa *Rndwalk*, se toma $i=0$. (Ver Figura 4.1)

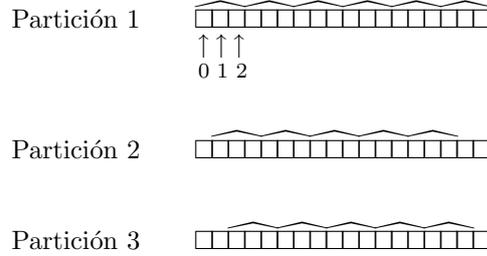


Figura 4.1

Una partícula puede permanecer en el mismo sitio o moverse a la izquierda o a la derecha con probabilidad determinada por los bloques como se describe a continuación. Si dos partículas chocan, éstas intercambian posiciones. La dinámica se define así:

$$\delta(0,0,0) = (0,0,0) \quad \delta(1,1,1) = (1,1,1)$$

$$\delta(1,0,0) = \begin{cases} (1,0,0) & \text{con prob. } \frac{1}{2} \\ (0,1,0) & \text{con prob. } \frac{1}{2} \end{cases} \quad \delta(0,0,1) = \begin{cases} (0,0,1) & \text{con prob. } \frac{1}{2} \\ (0,1,0) & \text{con prob. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\delta(1,1,0) = \begin{cases} (1,1,0) & \text{con prob. } \frac{2}{3} \\ (1,0,1) & \text{con prob. } \frac{1}{6} \\ (0,1,1) & \text{con prob. } \frac{1}{6} \end{cases} \quad \delta(0,1,1) = \begin{cases} (0,1,1) & \text{con prob. } \frac{2}{3} \\ (1,0,1) & \text{con prob. } \frac{1}{6} \\ (1,1,0) & \text{con prob. } \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\delta(1,0,1) = \begin{cases} (1,0,1) & \text{con prob. } \frac{1}{2} \\ (0,1,1) & \text{con prob. } \frac{1}{4} \\ (1,1,0) & \text{con prob. } \frac{1}{4} \end{cases} \quad \delta(0,1,0) = \begin{cases} (0,1,0) & \text{con prob. } \frac{1}{3} \\ (1,0,0) & \text{con prob. } \frac{1}{3} \\ (0,0,1) & \text{con prob. } \frac{1}{3} \end{cases}$$

Lo más impactante en el comportamiento de los autómatas celulares es que, aún partiendo de configuraciones iniciales aleatorias, la evolución del sistema rompe la independencia inicial y genera correlaciones entre celdas no vecinas, lo cual conduce a la formación de determinados patrones y estructuras; en otras palabras, tiende hacia una *auto-organización*.

Las características estadísticas de la evolución de los autómatas celulares se pueden determinar usando dos modelos de evolución, a saber:

1. Teoría del campo medio (*mean field theory*). Asume que la aplicación iterativa de la regla no introduce correlación entre los estados de las celdas en posiciones diferentes. Esta suposición no es realista pero permite obtener fórmulas sencillas para estimar la densidad límite de los estados de una celda.

El modelo de evolución en cuestión tiene en cuenta sucesiones específicas de estados, b_1, b_2, \dots, b_n llamadas *bloques*. La colección de todos los bloques coincide

con el espacio de configuraciones \mathcal{C} . La probabilidad de un bloque b en el tiempo $t + 1$, denotada $P^{t+1}(b)$ está dada por

$$P^{t+1}(b) = \sum_{\mathcal{T}(B)=b} P^t(B) \quad (1)$$

donde \mathcal{T} es la dinámica global del autómata. Esto quiere decir que la probabilidad del bloque b es la suma de las probabilidades de los bloques B cuya imagen es b en una iteración de la dinámica global.

En caso del autómata celular elemental, la probabilidad de un bloque B está dada por

$$P(B) = p_1^{\#_1(B)} p_0^{\#_0(B)} \quad (2)$$

donde p_1 es la probabilidad de que una celda tenga valor 1, p_0 es la probabilidad de que una celda tenga valor 0 ($p_0 + p_1 = 1$), $\#_i(B)$ es el número de celdas del bloque B con valor i ($i = 0, 1$).

La igualdad (2) se cumple exactamente en el caso que los estados de las diferentes celdas no estén correlacionados. Si $b = 1$, la expresión (1) puede escribirse en la forma

$$P^{t+1}(1) = \sum_{\mathcal{B}} \delta(\mathcal{T}(B), 1) P^t(B) \quad (3)$$

donde \mathcal{B} es la colección de bloques de longitud d , número que corresponde al tamaño de la vecindad a la que se le aplica la regla local en el autómata celular; $\delta(\mathcal{T}(B), 1)$ es 1 ó 0 según $\mathcal{T}(B) = 1$ ó $\mathcal{T}(B) = 0$. Teniendo en cuenta la relación (2), la igualdad (3) se puede expresar de la manera siguiente:

$$P^{t+1}(1) = \sum_{i=0}^d a_i (p_1^t)^i (1 - p_1^t)^{d-i} \quad (4)$$

a_i cuenta el número de bloques cuya imagen es 1 bajo la regla del autómata y contienen i unos. Los coeficientes a_i pueden ser enteros cualesquiera entre 0 y $\binom{d}{i}$.

Los autómatas celulares con los mismos coeficientes tienen el mismo comportamiento. La ecuación polinomial (4) constituye un modelo en la evolución de esta clase de autómatas. Un punto fijo p^* en el rango $[0, 1]$ de (4) es una estimación de la probabilidad límite de un '1'.

En la teoría del campo medio, además de asumir que los estados de las celdas no están en correlación, para conocer la probabilidad de un bloque es necesario conocer la probabilidad de bloques de mayor longitud tal como lo sugiere (3); esto conduce a una generalización de esta teoría con el objeto de lograr un modelo más completo de las propiedades estadísticas del AC, la cual se describe a continuación.

2. Teoría de estructura local (*local structure theory*). Esta teoría considera diferentes órdenes (0, 1 y 2). A mayor orden, mayor correlación entre los estados de las celdas.

En la teoría de estructura local de orden 0, el AC no se considera como sistema dinámico; es decir, el estado del sistema en un instante dado no depende del estado en el instante anterior. La probabilidad de los bloques sólo depende de su tamaño. En el caso de autómatas celulares elementales, la información que interesa es el

número de bloques cuya imagen es 1 en una iteración de la regla global. De esta manera, la probabilidad p_1 de un '1', está dada por

$$p_1 = \frac{\alpha}{2^d}$$

donde α es el número de vecindades cuya imagen es 1 y d , como antes, es el tamaño de la vecindad del AC. Los autómatas que tienen el mismo valor de α y cuyas vecindades tienen la misma longitud se comportan de la misma forma dentro de este orden.

La teoría de estructura local de orden 1 coincide con la teoría del campo medio.

En la teoría de estructura local de orden 2 se tienen en cuenta las correlaciones entre los estados de las celdas de manera explícita. Estas correlaciones se introducen en términos de la probabilidad de pares de celdas contiguas. La probabilidad de los bloques se estima con base en la probabilidad de los bloques más pequeños que ellos contienen.

En caso de un AC elemental, si se conocen las probabilidades de los bloques de la forma

$$(b_i, b_{i+1}), b_i \in \{0, 1\}$$

es posible estimar la probabilidad de los n -bloques

$$(b_1, b_2, \dots, b_n), n > 2$$

de la manera siguiente:

$$P(b_1, b_2, \dots, b_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} P(b_i, b_{i+1})}{\prod_{i=2}^{n-1} P(b_i)}. \quad (5)$$

La probabilidad $P(b_i)$ de los bloques (b_i) , se puede obtener sumando las probabilidades de los 2-bloques que contienen a b_i . Los bloques que tienen la misma probabilidad según la expresión (5) son del mismo *tipo* en este segundo orden. Para mayores detalles puede consultarse [12].

APÉNDICE. PROGRAMAS *Pascal* Y *Rndwalk*

REFERENCIAS

1. P. BAK & K. CHEN, *Self-organized criticality*, Scientific American (January, 1991), 46–53.
2. G. BROOKSHEAR, *Theory of computation. Formal Languages, Automata and Complexity*, The Benjamin/Cummings Publishing Co, Inc, Redwood City California, 1989.
3. J. H. CONWAY & R. K. GUY, *Winning ways for your mathematical plays, Vol. 2*, Academic Press, New York, 1982.
4. H. M. COXETER & W. O. MOSER, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, 1972.
5. R. L. DEVANEY, *Chaos, Fractals and Dynamics*, Addison-Wesley, 1990.
6. S. FRANKLIN & MAX GARZÓN, *Global Dynamics in Neural Networks*, Complex Systems (1990), 431-440.
7. ———, *Computation on graphs* (1988), Report Department of Mathematical Sciences and the Institute for Intelligent Systems, Memphis State University.
8. M. GARZÓN, *Analysis of Cellular Automata and Neural Networks*, Memphis State University, 1990.

9. ———, *Cellular Automata and Discrete Neural Networks*, Physica D 45 (1990), 431-440.
10. M. GARZÓN & S. FRANKLIN, *Neural Computability II, Extended Abstract*, Proc. 3rd Int. Joint Conf. on Neural Networks (1989), Washington D.C., 631-637.
11. M. GARDNER, *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*, W. H. Freedman & Co., 1983.
12. H. GUTOWITZ, *Classification of Cellular Automata according to their Statistical Properties*, Los Alamos TR 88-33-54.
13. G. A. HEDLUND, *Endomorphism and Automorphism of the Shift Dynamical System*, Math. Sys. Theory **3** (1969), 320.
14. J. G. HOCKING & G. S. YOUNG, *Topology*, Addison-Wesley, 1976.
15. J. E. HOPCROFT & J. D. ULLMAN, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley, 1979.
16. Y. C. LEE et al., *Adaptive Stochastic Cellular Automata: Theory*, North-Holland, Physica D 45 (1990), 159-180.
17. W. MAGNUS, A. KARRASS & D. SOLITAR, *Combinatorial Group Theory*, Dover Publications, New York, 1976.
18. H. PEITGEN, H. JÜRGENS & S. DIETMAR, *Chaos and Fractals*, Springer-Verlag, 1992.
19. D. RICHARDSON, *Tessellation with Local Transformations*, J. Comp. Syst. Sci. 6 (1972), 373-388.
20. R. RUCKER, *Mind Tools*, Houghton Mifflin Co., 1987.
21. P. RUJAN, *Cellular Automata and Statistical Mechanical Models*, Statistical Physics 49 (1987), 139-232.
22. T. TOFFOLI & N. MARGOLUS, *Cellular Automata Machines*, The MIT Press, London, England, 1986.
23. L. G. TORRES, G. HERNÁNDEZ & L. F. NIÑO, *Autómatas Celulares*, Noveno Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 1992.
24. S. WOLFRAM, *Statistical Mechanics of Cellular Automata*, Rev. of Modern Phys. 55 3 (1983), 601-644.

GERMÁN HERNÁNDEZ
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: german@unisis.campus.unal.edu.co

LUZ GLORIA TORRES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: lgtorres@unalcol.unal.edu.co