Lecturas Matemáticas
Volumen **18** *(1997), páginas 107-116*

Una nota sobre integrales que involucran funciones especiales

Josefina Matera y Alfredo Villalobos
Universidad del Zulia, VENEZUELA

Abstract. Some formulas for the derivative of the arctangent of certain functions, obtained via recurrence formulas that these functions satisfy, are used to calculate some new definite integrals involving modified Bessel functions and orthogonal polynomials.

Key words and phrases. Definite integrals, special functions, Bessel functions, orthogonal polynomials.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 33C10.

Resumen. Se muestra cómo diversas fórmulas para la derivada del arcotangente de ciertas funciones, obtenidas mediante el empleo de fórmulas de recurrencia que tales funciones satisfacen, permiten calcular algunas nuevas integrales definidas que involucran funciones de Bessel modificadas y polinomios ortogonales.

1. Introducción

En un trabajo previo [1], Villalobos y Kalla calculan integrales de la forma

$$(1.1) \qquad \int_a^b \frac{Z_\nu(x)\ Z_{\nu+1}(x)\ dx}{x\ \left[Z_\nu^2(x) + Z_{\nu+1}^2(x)\right]}, 0 \leq a < b, \nu \neq -1/2,$$

donde $Z_\nu(x)$ es una de las funciones cilíndricas $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, o $H_\nu^{(2)}(x)$. Estas integrales generalizan, aunque no cobijan, integrales como $\int_a^b \frac{senx}{x} dx$ y, como ésta, aparecen con alguna frecuencia en problemas relacionados con teoría del potencial. Los resultados establecidos en [1] permiten obtener como caso particular, por ejemplo, un resultado de Rawlins [4]:

$$(1.2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_o(x)\ J_1(x)}{x[J_0^2(x) + J_1^2(x)]} = \frac{\pi}{2}.$$

Obsérvese al respecto que

$$(1.3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{senx}{x} dx = \pi,$$

pero este caso no queda cubierto por (1.1) debido a la hipótesis $\nu \neq -1/2$.

La técnica empleada en [1] consiste básicamente en expresar el integrando en forma conveniente a partir de expresiones de $\frac{d}{dx}\ arctg \left[\frac{Z_{\nu+1}(x)}{Z_\nu(x)}\right]$ obtenidas mediante varias fórmulas de recurrencia satisfechas por las funciones $Z_\nu(x)$. Para establecer algunos casos lìmites de (1.1), como a$\to 0$, $b \to \infty$, se recurrió en [1] a los comportamientos asintóticos de las funciones $Z_\nu(x)$ para valores grandes o pequeños del argumento.

En el presente trabajo se sigue un procedimiento similar para calcular integrales que involucran funciones de Bessel modificadas de primera clase, $I_\nu(x)$, y de segunda clase, $K_\nu(x)$, (v.[2,3,5]). También se consideran integrales en las cuales las funciones de Bessel se sustituyen por los sistemas de polinomios ortogonales de Legendre, $\{P_n(x)\}$, Hermite, $\{H_n(x)\}$, y Laguerre, $\{L_n^\alpha(x)\}$ (v.[2,3,6]). Para que el método funcione es necesario generalmente introducir un factor constante conveniente en el argumento del arcotangente.

2. Integrales que involucran funciones de bessel modificadas

Consideraremos primero integrales de la forma

$$\int_a^b \frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)\ dx}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]}, 0 < a \leq b, \nu \neq -1/2. \tag{2.1}$$

Obsérvese en primer lugar, con $i = \sqrt{-1}$, que

$$\frac{d}{dx} arctg \left[\frac{I_{\nu+1}(x)}{iI_\nu(x)}\right] = \frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{I_{\nu+1}(x)}{iI_\nu(x)}\right]}{1 + \left[\frac{I_{\nu+1}(x)}{iI_\nu(x)}\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{I'_{\nu+1}(x)\ I_\nu(x) - I'_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)}{I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)}\right\} \tag{2.2}$$

y que mediante las fórmulas de recurrencia (v.[2], p.110)

$$I_{\nu-1}(x) - I'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} I_\nu(x) \quad , \quad I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x) = I'_\nu(x), \tag{2.3}$$

la última expresión toma la forma

$$\frac{d}{dx} arctg \left[\frac{I_{\nu+1}(x)}{iI_\nu(x)}\right] = \frac{1}{i}\left\{1 - \frac{\frac{2\nu+1}{x} I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)}{I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)}\right\}, \tag{2.4}$$

de la cual se obtiene que

$$\frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]} = \frac{1}{2\nu+1}\left\{1 - i\frac{d}{dx} arctg\left[\frac{I_{\nu+1}(x)}{iI_\nu(x)}\right]\right\}. \tag{2.5}$$

Integrando ambos miembros de (2.5), se obtiene que

$$\int_a^b \frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)\ dx}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]} = \frac{1}{2\nu+1}\left\{b - a - i\ arctg\left[\frac{I_{\nu+1}(b)}{iI_\nu(b)}\right]\right.$$

$$\left. + i\ arctg\left[\frac{I_{\nu+1}(a)}{iI_\nu(a)}\right]\right\} \tag{2.6}$$

y teniendo en cuenta que

$$arctg\ z = \frac{i}{2} \ln \left[\frac{i+z}{i-z} \right],$$

(2.6) puede escribirse en la forma final

$$\int_a^b \frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)\ dx}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]} = \frac{1}{2\nu+1} \left\{ b - a + \frac{1}{2} \ln \frac{I_\nu(b) - I_{\nu+1}(b)}{I_\nu(b) + I_{\nu+1}(b)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \ln \frac{I_\nu(a) - I_{\nu+1}(a)}{I_\nu(a) + I_{\nu+1}(a)} \right\} \quad , \quad 0 < a \leq b \tag{2.7}$$

Para establecer el caso límite $a \to 0$, es decir, para calcular

$$\int_0^b \frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)\ dx}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]} = \lim_{a \to 0} \int_a^b \frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)\ dx}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]} \tag{2.8}$$

cuando $\nu \geq 0$, podemos recurrir a la fórmula asintótica (v.[2], p.136)

$$I_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu\ \Gamma(1+\nu)}, \quad x \to 0. \tag{2.9}$$

En efecto, sustituyendo $I_\nu(x)$ para x pequeño por la expresión de la derecha en (2.9), se obtiene que

$$\int_0^b \frac{I_\nu(x)\ I_{\nu+1}(x)\ dx}{x\left[I_\nu^2(x) - I_{\nu+1}^2(x)\right]} = \frac{1}{2\nu+1} \lim_{a \to 0} \left\{ b - a + \frac{1}{2} \ln \frac{I_\nu(b) - I_{\nu+1}(b)}{I_\nu(b) + I_{\nu+1}(b)} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \ln \frac{2(1+\nu) - a}{2(1+\nu) + a} \right\} = \frac{1}{2\nu+1} \left\{ b + \frac{1}{2} \ln \frac{I_\nu(b) - I_{\nu+1}(b)}{I_\nu(b) + I_{\nu+1}(b)} \right\} \tag{2.10}$$

Análogamente, partiendo de

$$\frac{d}{dx} arctg \left[\frac{K_{\nu+1}(x)}{iK_\nu(x)} \right] = \frac{1}{i} \left\{ \frac{K'_{\nu+1}(x)\ K_\nu(x) - K'_\nu(x)\ K_{\nu+1}(x)}{K_\nu^2(x) - K_{\nu+1}^2(x)} \right\}$$

y teniendo en cuenta las fórmulas de recurrencia ([2],p.10)

$$K_{\nu-1}(x) + K'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} K_\nu(x) \quad , \quad \frac{\nu}{x} K_\nu(x) - K_{\nu+1}(x) = K'_\nu(x) \tag{2.11}$$

se obtiene que

$$\frac{K_\nu(x)\ K_{\nu+1}(x)}{x\left[K_{\nu+1}^2(x)-K_\nu^2(x)\right]}=\frac{1}{2\nu+1}\left\{1+i\frac{d}{dx}arctg\left[\frac{K_{\nu+1}(x)}{iK_\nu(x)}\right]\right\} \tag{2.12}$$

Integrando resulta entonces que

$$\int_a^b \frac{K_\nu(x)\ K_{\nu+1}(x)}{x\left[K_{\nu+1}^2(x)-K_\nu^2(x)\right]}=\frac{1}{2\nu+1}\left\{b-a-\frac{1}{2}\ln\frac{K_\nu(b)-K_{\nu+1}(b)}{K_\nu(b)+K_{\nu+1}(b)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ln\ \frac{K_\nu(a)-K_{\nu+1}(a)}{K_\nu(a)+K_{\nu+1}(a)}\right\},\qquad 0<a\leq b. \tag{2.13}$$

3. Integrales que involucran sistemas de polinomios ortogonales

Consideraremos primero el caso de los polinomios de Legendre.

Del cálculo de $\frac{d}{dx}arctg\left[\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}\right]$ mediante las fórmulas de recurrencia (v.[3], p.159)

$$(n+1)\ P_n(x)=P'_{n+1}(x)-xP'_n(x), \tag{3.1}$$

$$\left(1-x^2\right)\ P'_n(x)=(n+1)\ \left[xP_n(x)-P_{n+1}(x)\right],\qquad n\geq 0, \tag{3.2}$$

se obtiene que

$$\frac{xP_n(x)\ P_{n+1}(x)}{(1-x^2)\ \ \left[P_n^2(x)+P_{n+1}^2(x)\right]}=\frac{1}{2n+2}\left\{\frac{n+1}{1-x^2}-\frac{d}{dx}arctg\left[\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}\right]\right\} \tag{3.3}$$

de donde resulta, siempre y cuando $-1<a\leq b<1$, que

$$\int_a^b \frac{xP_n(x)\ P_{n+1}(x)\ dx}{(1-x^2)\left[P_n^2(x)+P_{n+1}^2(x)\right]}=\frac{1}{2n+2}\left\{\frac{1}{2}(n+1)\left[\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)-\ln\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right]\right.$$

$$\left.-arctg\left[\frac{P_{n+1}(b)}{P_n(b)}\right]+arctg\left[\frac{P_{n+1}(a)}{P_n(a)}\right]\right\} \tag{3.4}$$

En (3.4) se han tomado a, b interiores al intervalo[-1,1], en el cual los polinomios de Legendre son ortogonales. Para $a = -1$ o $b = 1$, las integrales divergen. Como ([3], p.158)

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n 1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \quad , \quad P_{2n+1}(0) = 0$$

se obtiene, tomando $a = 0$ en (3.4), que

$$\int_0^b \frac{xP_n(x)\ P_{n+1}(x)\ dx}{(1-x^2)\left[P_n^2(x) + P_{n+1}^2(x)\right]} = \frac{1}{2n+2}\left\{\frac{1}{2}(n+1)\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)\right.$$

$$\left. -arctg\left[\frac{P_{n+1}(b)}{P_n(b)}\right]\right\}, \quad 0 < b < 1 \quad , \quad n\ par \tag{3.5}$$

y que

$$\int_0^b \frac{xP_n(x)\ P_{n+1}(x)\ dx}{(1-x^2)\left[P_n^2(x) + P_{n+1}^2(x)\right]} = \frac{1}{2n+2}\left\{\frac{1}{2}(n+1)\ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)\right.$$

$$\left. -arctg\left[\frac{P_{n+1}(b)}{P_n(b)}\right] + \frac{\pi}{2}\right\}, \quad 0 < b < 1 \quad , \quad n\ impar \tag{3.6}$$

Observamos que como el integrando en (3.4) es una función par, se tiene además que

$$\int_{-b}^b \frac{xP_n(x)\ P_{n+1}(x)\ dx}{(1-x^2)\left[P_n^2(x) + P_{n+1}^2(x)\right]} = 2\int_0^b \frac{xP_n(x)\ P_{n+1}(x)\ dx}{(1-x^2)\left[P_n^2(x) + P_{n+1}^2(x)\right]}, \tag{3.7}$$

lo cual permite, en vista de (3.5) y (3.6), calcular la integral de la izquierda.

Para los polinomios de Hermite, $\{H_n(x)\}$, se tiene, de manera semejante, calculando $\frac{d}{dx}arctg\left[\frac{H_{n+1}(x)}{\sqrt{2(n+1)}\ H_n(x)}\right]$ mediante las fórmulas de recurrencia ([3], p.188)

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad , \quad H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \tag{3.8}$$

que

(3.9)
$$\frac{xH_n(x)\ H_{n+1}(x)}{2(n+1)H_n^2(x)+H_{n+1}^2(x)} = \frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\frac{d}{dx}arctg\left[\frac{H_{n+1}(x)}{\sqrt{2(n+1)}H_n(x)}\right]\right\}$$

Entonces,

$$\int_a^b \frac{xH_n(x)\ H_{n+1}(x)\ dx}{2(n+1)H_n^2(x)+H_{n+1}^2(x)} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{b-a-\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}arctg\left[\frac{H_{n+1}(b)}{\sqrt{2(n+1)}\ H_n(b)}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}arctg\left[\frac{H_{n+1}(a)}{\sqrt{2(n+1)}\ H_n(a)}\right]\right\} \tag{3.10}$$

Tomando $a=0$ en (3.10) y teniendo en cuenta ([3], p.188) que

$$H_{2n}(0)=\frac{(-1)^n\ (2n)!}{n!} \quad , \quad H_{2n+1}(0)=0,$$

se concluye que

$$\int_0^b \frac{xH_n(x)\ H_{n+1}(x)\ dx}{2(n+1)H_n^2(x)+H_{n+1}^2(x)} = \frac{1}{2}\left\{b-\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right.\times$$

$$\left. arctg\left[\frac{H_{n+1}(b)}{\sqrt{2(n+1)}\ H_n(b)}\right]\right\},\ n\ par \tag{3.11}$$

y que

$$\int_0^b \frac{xH_n(x)\ H_{n+1}(x)\ dx}{2(n+1)H_n^2(x)+H_{n+1}^2(x)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{b-\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}arctg\left[\frac{H_{n+1}(b)}{\sqrt{2(n+1)}\ H_n(b)}\right]+\frac{\pi}{2},\right\},\ n\ impar. \tag{3.12}$$

Como el integrando es, de nuevo, una función par, también

$$\int_{-b}^{b} \frac{xH_n(x)\ H_{n+1}(x)\ dx}{2(n+1)H_n^2(x)+H_{n+1}^2(x)} = 2\int_{0}^{b} \frac{xH_n(x)\ H_{n+1}(x)\ dx}{2(n+1)H_n^2(x)+H_{n+1}^2(x)}, \tag{3.13}$$

lo cual permite calcular, mediante (3.11) y (3.12), la integral de la izquierda.

Para los polinomios de Laguerre se obtiene, mediante las fórmulas de recurrencia ([3], p.202)

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = \frac{(x-n-\alpha-1)}{x}L_n^\alpha(x) + \frac{(n+1)}{x}L_{n+1}^\alpha(x), \tag{3.14}$$

$$\frac{dL_{n+1}^\alpha(x)}{dx} = \frac{(n+1)}{x}L_{n+1}^\alpha(x) - \frac{(n+1+\alpha)}{x}L_n^\alpha(x), \tag{3.15}$$

que

$$\frac{(2n+2-x+\alpha)\ L_n^\alpha(x)\ L_{n+1}^\alpha(x)}{x\left\{(n+1+\alpha)\left[L_n^\alpha(x)\right]^2+(n+1)\left[L_{n+1}^\alpha(x)\right]^2\right\}} =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1+\alpha)}}\frac{d}{dx}arctg\left[\frac{\sqrt{n+1}\ L_{n+1}^\alpha(x)}{\sqrt{n+1+\alpha}\ L_n^\alpha(x)}\right], \tag{3.16}$$

de lo cual,

$$\int_a^b \frac{(2n+2-x+\alpha)\ L_n^\alpha(x)\ L_{n+1}^\alpha(x)\ dx}{x\left\{(n+1+\alpha)\left[L_n^\alpha(x)\right]^2+(n+1)\left[L_{n+1}^\alpha(x)\right]^2\right\}} = \ln b - \ln a$$

$$+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1+\alpha)}}arctg\left[\frac{\sqrt{n+1}\ L_{n+1}^\alpha(b)}{\sqrt{n+1+\alpha}\ L_n^\alpha(b)}\right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1+\alpha)}}arctg\left[\frac{\sqrt{n+1}\ L_{n+1}^\alpha(a)}{\sqrt{n+1+\alpha}\ L_n^\alpha(a)}\right], \quad 0<a\leq b \tag{3.17}$$

Referencias

1. A. Villalobos & S. L. Kalla, *Algunas integrales que involucran funciones de Bessel*, Rev. Téc. Ing., Universidad del Zulia **15** no. 1 (1992), 51-55.
2. N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Dover, 1992.
3. E. Rainville, *Special functions*, Chelsea, 1971.
4. A. D. Rawlins, *Note on the roots of* $f(z) = J_0(z) - iJ_1(z)$, Quart. Appl. Math. **47** (2) (1989), 323-324.
5. G. N. Watson, *A Treatise on the theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, 1966.
6. G. Szego, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **23**, 1959.

(Recibido en diciembre de 1995; revisado en noviembre de 1997)

Centro de Investigación en Matematica Aplicada(CIMA)
Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia
Apartado 10482, Marcaibo, VENEZUELA