

Un programa sobre el uso de CAS en las universidades nacionales de la provincia de Santa Fe, Argentina

MERCEDES ANIDO DE LÓPEZ & HÉCTOR RUBIO SCOLA
Universidad Nacional de Rosario, Argentina

ABSTRACT. A research program in LAKATOS' sense is described. The program has been carried by professors of three universities of the Santa Fe province, Argentine. The improvement in teaching college basic mathematics by incorporating CAS (Computer Algebraic System) is the program's objective. The theoretical frame, from didactical, epistemology and methodology points of view, needed for its good development is also presented.

Key Words and Phrases: LAKATOS, Computer Algebra System, Mathematics Teaching.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary: 00A35

RESUMEN. Se describe un programa de investigación en el sentido de LAKATOS que se está llevando a cabo por profesores de las tres Universidades Nacionales de la provincia de Santa Fé, Argentina. Dicho programa tiene como objetivo el mejoramiento de la enseñanza de la matemática básica a nivel universitario a través de la incorporación de las herramientas CAS (*Computer Algebraic System*). Se discute el marco teórico desde los puntos de vista didáctico, epistemológico y metodológico necesarios para su buen desarrollo.

1. Introducción

En este trabajo presentamos el proyecto de investigación “La enseñanza de la matemática con herramientas computacionales”, financiado por la Universidad Nacional de Rosario a través del “Programa de fomento a la investigación científica y tecnológica” (Resol. C.S. No. 202/92). En él trabajan profesores de distintas facultades de la Universidad Nacional de Rosario, la Universidad Nacional del Litoral y la Universidad Tecnológica Nacional.

El proyecto se podría considerar en el momento actual como un programa de investigación en el sentido de LAKATOS. La idea de programa de investigación según LAKATOS ha sido empleada en la investigación de la enseñanza para describir aquello que comparten los investigadores de una cierta comunidad. Una comunidad con un programa de investigación maduro y desarrollado considerará ciertos trabajos como fundamentales, sus miembros compartirán un conjunto de determinados problemas y cierto lenguaje técnico. Ignorarán también ciertos problemas en investigaciones que a su vez podrán ser relevantes en otra comunidad y volverá insistentemente sobre los temas claves.

En nuestro caso el tema estratégico de la investigación es el aprendizaje de la matemática en el nivel universitario. En efecto, en el nivel universitario se requiere un aprendizaje eficiente en tiempo y esfuerzo. En el área de la matemática la tendencia es dedicar el tiempo que se emplea en cálculos rutinarios y operatoria estéril en sí misma, a la formación de conceptos y a la aplicación del conocimiento adquirido.

En particular, las ciencias de la administración y la economía se respaldan en teorías matemáticas de alto nivel. Por ejemplo, en el análisis económico: la estadística comparativa, los problemas de optimización, el control dinámico y otros temas más, requieren de métodos matemáticos del álgebra lineal, del cálculo diferencial e integral, de las ecuaciones diferenciales y de la matemática discreta. En ingeniería, la matemática, además de disciplina formativa primordial, es la herramienta general.

En esos niveles y tal como se desarrollan los cursos de matemática en el momento actual, los estudiantes luchan con la abstracción y no llegan

a las aplicaciones. En algunos temas y niveles las dificultades del cálculo numérico y gráfico hacen imposible la ejemplificación.

La computadora permite la inmediata verificación numérica de una propiedad, la representación gráfica en dos y tres dimensiones, la utilización de resultados teóricos a problemas concretos en situaciones reales y ayuda a una exploración inductiva del conocimiento por la inmediatez de la respuesta del procesador. Esto, puede utilizarse para conseguir un rigor conceptualizado y una visión unificada de la matemática y sus aplicaciones; para educar en los conceptos de la matemática y enseñar que, para la parte operativa, la computadora es la solución, siempre y cuando que quien la use sepa lo que quiere y entienda lo que ella le ofrece como resultados.

En el curriculum actual de nuestras universidades, en general, la utilización de herramientas computacionales en las distintas carreras está encapsulada en asignaturas específicas (computación y análisis numérico, procesamiento de datos, programación, etc.), o en el ciclo profesional. Pese a las conclusiones y recomendaciones de eventos relacionados con el mejoramiento de la calidad de la enseñanza, aún no se aprovecha al máximo el potencial de las herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática básica en nuestras universidades. Aunque individualmente en algunas cátedras se han comenzado procesos de cambio.

La introducción de nuevas herramientas para la adquisición del conocimiento, debe ser precedida por un serio análisis curricular, estudios sobre equipamiento accesible, *software* adecuado y metodología de la enseñanza. Queda abierto también en el nivel universitario, un amplio campo de trabajo en la elaboración de instrumentos para la medición de los resultados del aprendizaje.

Otro factor que debe considerarse es el problema de enseñar matemática a estudiantes que no sean de una licenciatura en matemática. Esto plantea un desafío que frecuentemente se ignora. Se trata de resistir la tentación de desarrollar los contenidos de la matemática como si los alumnos fueran potenciales matemáticos, y en su lugar buscar metodologías alternativas, que mantengan los beneficios de la educación en un pensamiento lógico riguroso y al mismo tiempo aprovechen la riqueza de los modelos matemáticos en la resolución de problemas en su

área de interés. Aquí también la herramienta computacional puede ser una importante ayuda al permitir el manejo de datos reales.

Todos estos factores abren un amplio campo a la investigación en matemática educativa. En su etapa actual, el proyecto constituye un “programa” que motiva y coordina proyectos en los que trabajan, en paralelo, profesores en distintas líneas de estudio y para distintas áreas de la matemática.

2. Las herramientas CAS (*Computer Algebraic System*)

En los últimos años se han desarrollado las llamadas herramientas CAS, que no son otra cosa que poderosas calculadoras numéricas, simbólicas y gráficas que no requieren conocimientos específicos de programación. En esta categoría podemos considerar incluidos los siguientes programas: MATHCAD, DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA. También aparecen programas fuertemente orientados hacia el cálculo matricial: MATLAB, SCILAB. Estas herramientas computacionales sorprenden y deslumbran por su potencialidad.

Las nuevas herramientas ayudan y estimulan a “hacer”, a “enseñar” y a “aprender” matemática. Utilizan una sintaxis lógica y están abiertas a la creación de nuevas funciones. Son herramientas que permiten resolver ecuaciones y analizar funciones en los primeros cursos de matemática básica. Manipulan símbolos y expresiones que se obtienen al resolver ecuaciones. Calculan, en forma simbólica o numérica, límites, derivadas, integrales definidas, aproximan funciones por polinomios, resuelven ecuaciones diferenciales, transformadas, etc. Permiten la visualización de curvas y superficies complicadas, imposibles de ser imaginadas sin ese recurso. Además pueden utilizarse para que el usuario programe sus propios modelos matemáticos para determinadas y características situaciones.

La idea es, pues, utilizar las capacidades de las llamadas herramientas CAS para reducir el tiempo empleado en cálculos rutinarios, con el

propósito de proveer más tiempo de clase para discutir sobre conceptos matemáticos y aplicarlos en la resolución de problemas.

Existen en el momento actual varias decenas de empresas, universidades e institutos de investigación que producen *software* con capacidades numéricas o simbólicas para el trabajo matemático. Actualmente, distintos grupos de investigadores de nuestro programa analizan las posibilidades en la educación matemática de algunas de las herramientas computacionales más promocionadas para el trabajo matemático. Cada una de ellas tiene características propias. Algunas son preferentemente grandes calculadoras científicas y gráficas. Otras agregan capacidad de resolución simbólica o representación gráfica en dos y tres dimensiones. Algunas tienen un lenguaje natural similar al matemático manual. Otras un lenguaje propio. Sus alcances, versatilidad y potencia de resolución son distintos. Algunas son especialmente aptas para el cálculo diferencial e integral de la matemática básica. Otras son herramientas específicas para álgebra lineal.

En el nivel universitario, en algunos países, desde la década pasada, se discute el rol que debe desempeñar estas herramientas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. En nuestro país, en los últimos años, los docentes universitarios del área matemática, han asistido a numerosos eventos, jornadas y congresos, por especialidad, regiones y zonas para el tratamiento del tema. Allí se han discutido y aprobado documentos sobre su utilización. La aprobación de esos documentos ha quedado como conclusiones de sesiones plenarias. En la realidad aún no se han incorporado a nivel masivo ni integrado. Son todavía tema de análisis y discusión.

En distintas universidades tanto nacionales como del exterior, las herramientas CAS han motivado investigaciones orientadas hacia una actualización curricular y el mejoramiento de la enseñanza (veánse [7]–[19], [21], [22], [25]–[27]). La profundización de las investigaciones sobre uso en las aulas, es indispensable para lograr una integración curricular adecuada. Es, pues, necesario aportar, bajo este enfoque, elementos que permitan construir una didáctica científica de la matemática en el ámbito universitario.

3. Marco Teórico

3.1. **Didáctico.** Se parte de una concepción constructivista del aprendizaje que se centra en la actividad del alumno. Tomando el concepto de aprendizaje significativo, se considera como aprendizaje a aquel que permite al sujeto que aprende llevar a cabo un proceso de construcción mediante el cual modifica o enriquece sus estructuras cognitivas. Es decir, que va integrando nuevos conceptos y operaciones a tramas o redes conceptuales y tramas o redes operativas, a veces relacionando con las estructuras que ya posee, otras realizando una tarea de desconstrucción de aprendizajes anteriores. El aprendizaje significativo se diferencia del aprendizaje mecánico porque el nuevo contenido pasa a formar parte de la estructura cognitiva del sujeto que aprende y se transforma en nuevos instrumentos de pensamiento que le posibilitan operar con la realidad.

En esa concepción el docente busca proporcionar los medios para facilitar esa tarea. El docente no es un mero transmisor de la información. El desafío es involucrar activamente a los estudiantes en su propia educación en lugar de ser pasivos receptores de información pre-empaquetada. La enseñanza es un arte social que involucra una relación entre personas y el éxito de un docente en ese arte es poseer la cualidad o actitud mental que le permita establecer una relación de recíproco aprendizaje. No toda la enseñanza debe ser hecha por el docente y no todo el aprendizaje por el estudiante.

Resumiendo, la estrategia pedagógica que se aplica en este proyecto se sustenta en ideas propuestas por diversos educadores en las últimas décadas, a saber:

- * La concepción del educando como sujeto activo de los procesos educativos.
- * La concepción de la relación interactiva y dialógica entre el educador y el educando cuyo resultado es el cambio de actitudes, comportamiento y grado de conocimiento de ambos sujetos, sin que ello implique la pérdida de sus identidades y roles específicos.
- * La valoración de la importancia de la motivación y la experiencia vivencial para obtener aprendizajes significativos y perdurables.

- * La valoración de la relevancia de la interacción entre los aspectos cognitivos, psicomotrices y afectivos que intervienen en los procesos de aprendizaje.

3.2. **Epistemológico.** En ese contexto la herramienta computacional desempeña un papel que debe también ser determinado en relación con el enfoque epistemológico de la matemática que se adopte.

En este proyecto nos adherimos especialmente al trabajo del Dr. BEPPO LEVI: *Formación matemática* [20], algunos de cuyos párrafos pasamos a citar:

- “...matemáticos somos más o menos todos, pues no es la expresión por fórmulas y números lo que constituye la Matemática.”.
- “La matemática es una forma de pensamiento”.
- “...muchas veces los panegiristas de la matemática han aclamado a su valor para la educación del rigor lógico, entendiendo éste en un sentido escolástico, palabrero, formal, combinatorio; se ha llegado a prescindir del significado intuitivo de las proposiciones de partida dando a la deducción matemática un contenido no mayor que al desplazamiento de los peones sobre el tablero de ajedrez. No es esto, en nuestro entender matemática.”
- “Para que esa maravillosa facultad racionativa de nuestra mente pueda inspirarnos la satisfacción de un trabajo cumplido, la satisfacción estética de una armonía conseguida, es necesario que no le falte, directa o indirectamente, la contrapartida de la realización en ese otro mundo que está afuera de nosotros...”

Nos adherimos también a lo expresado por G. PÓLYA al afirmar que:

- “Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa, éste es sólo uno de sus aspectos. La obra matemática se nos presenta, una vez terminada, como puramente demostrativa, consistente en pruebas solamente. No obstante, esta ciencia se asemeja en su desarrollo al de cualquier otro conocimiento humano. Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo. así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez.

El resultado de la labor demostrativa del matemático, es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero ésta a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe haber en él lugar para la intuición, para la inferencia plausible”.

3.3. Metodológico. Se comparte y se busca dar respuesta a las preguntas sobre la concepción de investigación planteada en el documento *¿Qué es la investigación en la educación matemática y cuáles son sus resultados?*, BALACHEFF, HOWSON, SFARD, STEINBRING, KILPATRICK & SIERPINSKA[7] (*The International Commission on Mathematical Instruction*, ICMI), en cuanto a que nuestro fin en la investigación debe ser que un docente específico, en un aula determinada, tenga mejor equipamiento o recursos para guiar a sus alumnos para que entiendan el mundo con la ayuda de la matemática.

En lo práctico y concreto se sigue el punto de vista de LESH (1979): “el objetivo de la investigación es desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la Didáctica de las matemáticas”. A continuación, LESH aclara que, para él, “desarrollar conocimientos útiles” significa:

- identificar problemas importantes para la enseñanza de la matemática,
- plantear conjuntos de preguntas concretas (y resolubles) relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el tema subyacente,
- encontrar respuesta a esas preguntas que sean útiles en una diversidad de contextos, eliminando la información poco válida o inútil,
- comunicar los resultados y conclusiones de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores.

En lo que hace a la investigación de los procesos de aprendizaje, el diseño se ha realizado combinando metodologías cualitativas y cuantitativas. Se estudian casos y se definen metodologías por triangulación. Se busca la inmersión del investigador docente en el contexto que analiza a fin de captar el sentido de la acción de los participantes.

4. Conclusiones

Después de más de una década desde el inicio de la primera célula de este programa, podemos afirmar que contamos con un programa de investigación maduro y en desarrollo, en el cual:

- * se ha dado un marco teórico conceptual en sus aspectos didácticos, epistemológicos y metodológicos,
- * se han formado la mitad de los docentes que enseñan matemática para los estudiantes de ciencias económicas y un grupo importante de docentes que enseñan matemática para los estudiantes de ingeniería,
- * se han analizado, adaptado y experimentado diversas herramientas CAS,
- * se han obtenido exitosos resultados en los cursos experimentales,
- * se han dictado cursos de posgrado utilizando herramientas CAS con modalidades presenciales y a distancia con participación a nivel nacional,
- * se han realizado talleres en reuniones científicas internacionales [4],[5], [6],
- * se han publicado libros [1],[2],[3],
- * se han hecho varias decenas de presentaciones en eventos internacionales, regionales y nacionales.

Participan en este programa directa o indirectamente casi un centenar de docentes con una población estudiantil de 6000 alumnos anuales que cursan asignaturas de matemática.

Referencias

- [1] Anido de López, M., Rubio Scola, H. y Medina, M., *Laboratorio de Análisis Numérico Matricial. Sistema Basile Módulo I*. Publicado por la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. U.N.R., 1995.
- [2] Anido de López, M., Rubio Scola, H. y Medina, M., *Graficación en Basile y Matlab. Cuaderno de autoaprendizaje*. Publicado por la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. U.N.R., 1995

- [3] Anido de López, M. and Rubio Scola, H., *Laboratorio de Análisis Numérico Matricial. Sistema Basile Módulo II*. Publicado por la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. U.N.R., 1997
- [4] Anido de López, M. and Rubio Scola, H., *Taller para la construcción del conocimiento desde el ordenador. Nivel I: Operatoria matricial*. Anales de La Novena Reunión Latinoamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa (1995). Publicado integralmente en *Anales de X Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines*. Trelew, 1995, págs. 245-251
- [5] Anido de López, M. and Rubio Scola, H., *Taller para la construcción del conocimiento desde el ordenador. Nivel II: Análisis matricial y operadores lineales*. En *Anales de la Novena Reunión Latinoamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa* (1995). Anales de X Jornadas Nacionales de Docentes de matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines. Trelew, 1995, págs. 252-256
- [6] Anido de López, M. and Rubio Scola, H., *Enseñanza de la matemática con herramienta computacional. Una experiencia en álgebra lineal*. Anales de la Novena Reunión Latinoamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa (1995). En *Anales de X Jornadas Nacionales de Docentes de matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines*. Trelew, 1995, págs. 257-264.
- [7] Balacheff, N., Houson, A., Kilpatrick, J., *What is research in Mathematics Education, and what are its results*. Document for an ICMI Study, 1993.
- [8] Dreyfuss, T., *Advanced Mathematical Thinking*, I.C.M.I. Study series: Mathematics and Cognition, 1990.
- [9] Fey, J.J. and Heid, M.K., *Computer Intensive Algebra*. Maryland. University of Maryland, 1991.
- [10] Jonassen, D. H., *Computer as cognitive tools learning with Technology. Not from Technology*. Journal of computing in Higher Education **6** (2), 1995. pp 40-70.
- [11] Judson, P.T., *Effects of modified sequencing of skills and applications in introductory calculus*, Dissertation Abstracts International, 49A: 1397, 1988.
- [12] Ganguli, A.B., *The microcomputer as a demonstrative tool for instructions in mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education, **21** (2), 1990. pp. 154-159
- [13] Goldenberg, E.P., *Mathematics, Metaphors and Human Factors*. The Journal of Mathematical Behavior. **7** (2), 1988. pp 135-173.
- [14] Guzmán, Miguel de, *Papel de la tecnología en la educación matemática*. Ma-Tex. 1 Programa Escolar, 1996
- [15] Hawher, C.M., *The effects of replacing some manual skills with computer algebra manipulations on student performance in business calculus*. Dissertation Abstracts International. 47, 2934 A, 1987

- [16] Heid, M.K., *Researching skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool*. Journal for Research in Mathematics Education **19** (1), 1988, pp. 3-25.
- [17] Heid, K., *Computing Technology*. National Council of Teachers of Mathematics, 1993
- [18] Herscovics, N., Bergeron, J.A., *Constructivist vs. A Formalist Approach in the Teaching of Mathematics*, Proceedings of P.M.E.8, 1984.
- [19] Levi, B., *Formación Matemática*. Publicación de la Universidad Nacional de Rosario, 1945.
- [20] Palmiter, J.R., *Effects of Computer Algebra Systems on concept and skill acquisition in calculus*. Journal for Research in Mathematics Education **22** (2), 1991. pp 151-156.
- [21] Pea, R. and Kurland, D., *On the cognitive effects of learning computer programming*. New Ideas in Psychology **2**, 1984. pp 137-168.
- [22] Polya, G., *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.
- [23] Polya, G., *Matemática y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos. Madrid, 1981.
- [24] Restoir, V.A., *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
- [25] Steiner, Hans-Georg *Didactic der Mathematics*, 1982
- [26] Tall, D., *Using Computer Graphics Programs as Generic Organizers for the Concepts Image of Differentiation*, Proceedings of P.M.E. 9, Utrecht, 1985.
- [27] Wenzalburger Guttenber, E., *Ambiente gráfico para la construcción del concepto de función en matemáticas*. Revista de Educación Matemática. Grupo Iberoamericano de Educación. **3** (2), 1991, 66-79.

(Recibido en junio de 1999; la versión revisada en marzo de 2000)

ANIDO DE LÓPEZ, MERCEDES, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Bv. OROÑO 1261, 2000 ROSARIO, ARGENTINA
e-mail: anidom@fceia.unr.edu.ar
RUBIO SCOLA, HÉCTOR E.

INRIA, INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
BAT. 12, BP 105, 78153 ROCQUENCOURT, FRANCE
e-mail: hector.rubio@inria.fr