

El cálculo infinitesimal y los cálculos lógicos en Leibniz, como especificaciones de la característica universal

FERNANDO ZALAMEA
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

RESUMEN. Se presenta la característica de LEIBNIZ como proyecto lógico global (enfaticando una semiótica universal y principios de continuidad y de identidad) y se muestra cómo las creaciones leibnizianas del cálculo diferencial e integral y de otros cálculos lógicos pueden verse como consecuencias naturales, locales, del proyecto lógico general.

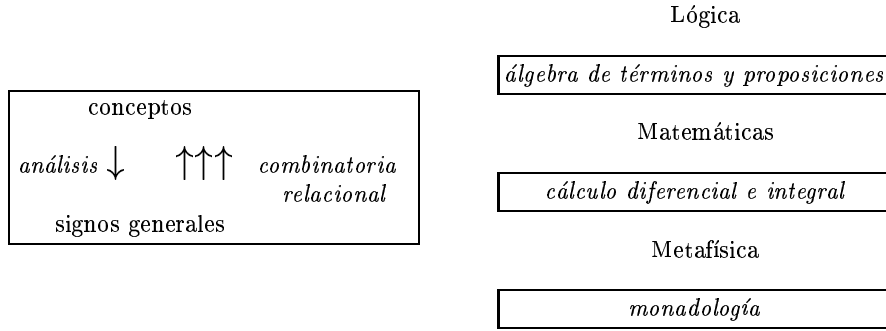
Key Words and Phrases: Characteristics, logic, universality, integral and differential calculus, history of mathematics.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 01A45. Secondary 01A0

ABSTRACT. We present LEIBNIZ's characteristic as a global logical project (emphasizing universal semiotics and continuity and identity principles) and we show how the infinitesimal calculus and other logical calculi can be seen as natural, local, consequences of the general logical project.

Según comentaba el mismo LEIBNIZ, el regreso a los orígenes de las invenciones es útil e instructivo ya que se contiene en ellos la fuente

de una multitud de metamorfosis posteriores, fuente formada por ideas esenciales y “libres”.¹ En este texto mostraremos cómo la característica leibniziana puede verse como una metodología global, laxa pero tremendamente rica, que da lugar, en contextos más definidos, a creaciones fundamentales para el pensamiento moderno. Observaremos, en particular, cómo la característica proporciona, en el ámbito del análisis infinitesimal, los instrumentarios leibnizianos para el cálculo diferencial e integral, cómo proporciona, en el ámbito de la lógica, las álgebras y cálculos leibnizianos de términos y proposiciones y, finalmente, cómo da lugar, en el ámbito de la metafísica, a la muy discutida, y a menudo incomprensible, monadología de LEIBNIZ. El cuadro siguiente resume el esquema del artículo:



El esquema general de la característica leibniziana enfatiza la utilidad de *signos generales* y el proceso fundamental de re combinaciones *relacionales*. El análisis debe buscar componentes primarias, naturales y económicas (signos generales), que, aliviadas de lastres contextuales, liberen la imaginación. Recombinando los signos generales a lo largo de

¹Entendemos aquí la noción de libertad en el sentido preciso que le ha otorgado al término la teoría matemática de categorías: conceptos libres de lastres contextuales, conceptos globales y generales, definidos por propiedades universales, aún no “encarnados” en categorías concretas. El proyecto de la *característica* universal leibniziana puede entenderse mejor gracias a los logros de la teoría de categorías: es ahora concebible, de manera técnicamente precisa, que existan métodos generales (universales) de comprensión de la matemática que *luego* encarnen en construcciones y definiciones particulares y contextuales.

diversos ámbitos relacionales se producen nuevos conocimientos. Con LEIBNIZ se abren las puertas a la lógica de relaciones que se constituirá en la base de la lógica matemática contemporánea.

1. El proyecto lógico global

El primer escrito juvenil de LEIBNIZ (1646–1716), que regirá las líneas de sostén de todo su sistema posterior, es su *Disertación de arte combinatoria* (1666). La combinatoria leibniziana se sitúa en la tradición pitagórica y cabalística, que esperaba *cifrar* la complejidad del mundo a través de un cálculo, o arte general, de combinaciones conceptuales elementales. Se trata de una ciencia general de las relaciones abstractas. Sus antecesores inmediatos, RAIMUNDO LULIO (1235–1315) y ATHANASIUS KIRCHER (1601–1680), habían construido sofisticados mecanismos que trataban de explicar y ordenar los ámbitos multiformes del conocimiento. Las “artes” de LULIO y KIRCHER eran, sin embargo, extremadamente artificiales, tanto en su escogencia de dudosos conceptos “generales y simples” como en las formas y números mismos de la combinatoria. En contraposición con LULIO y KIRCHER, el arte combinatorio de LEIBNIZ trata de presentar un *cálculo* de combinaciones *no artificial*, ligado de manera natural con principios lógicos elementales.

El arte combinatorio de LEIBNIZ pretenderá *analizar* algunas ideas fundamentales, descomponerlas en ciertos conceptos básicos *definidos*, y estudiar sistemáticamente sus *variaciones* (combinaciones). Extrapolando el arte combinatorio hacia una concepción *general* del universo, surgirá el proyecto leibniziano de una “característica universal”, lenguaje global con el que podrían calcularse localmente todas las disquisiciones conceptuales y medirse todos los fenómenos de la experiencia.

Para mí la combinatoria es la ciencia de las formas, es decir de lo similar y lo diverso, así como el álgebra es la ciencia del tamaño, es decir de lo igual y lo desigual; más aún la Combinatoria parece diferir poco de la Característica general, ciencia que inventa o permite inventar los caracteres propios

del álgebra, de la música y, mejor aún, de la lógica [BELAVAL, 298].²

La Característica entrega las palabras a las lenguas, las letras a las palabras, los números a la aritmética, las notas a la música; es ella la que nos enseña el secreto de fijar el razonamiento, y de obligarlo a dejar como trazas visibles sobre el papel, para ser examinado a cabalidad: es, en fin, ella la que nos permite razonar económicamente, al poner caracteres en lugar de las cosas, para liberar la imaginación [COUTURAT, 90].

Como caso particular del proyecto leibniziano, y como constante motor demostrativo de las ventajas de su sistema, construirá el *cálculo diferencial e integral (cálculo infinitesimal)*. Así, constantemente opuesto a los artificios de sus predecesores (cálculos *ad hoc* de tangentes y cuadraturas), irá proponiendo una *unificación* de métodos. A partir del análisis y definición de algunos conceptos básicos, estudiará sus variaciones y las combinará unificadamente en un cálculo no artificial.

Realizo el cálculo infinitesimal mediante algunos nuevos signos de maravillosa comodidad, acerca de los cuales me respondisteis que es más ordinario e inteligible vuestro modo de expresión y que rechazáis al máximo la novedad en las definiciones. Pero habrían podido objetar lo mismo los viejos aritméticos, cuando los más modernos introdujeron los caracteres árabes en vez de los romanos, o los viejos algebristas cuando VIÉTE substituyó los números por letras. En los signos, la comodidad está ligada con el descubrimiento —y la comodidad es máxima cuando con poco expresan y casi captan la naturaleza íntima de las cosas— ya que entonces se disminuye admirablemente la fatiga del pensamiento. Tales son en verdad los signos de los cuales me valgo en el cálculo de las ecuaciones tetragonales, y mediante los cuales resuelvo en

²Las citas de textos del propio LEIBNIZ se harán con sangrías y en un tipo de letra más pequeño. Las referencias envían a recopilaciones de textos de en la bibliografía o a textos sobre donde aparecen las citas mencionadas. Las traducciones al español son mías.

pocas líneas problemas a menudo muy difíciles. Por ejemplo, aquel problema que Descartes afrontó en vano en sus cartas – encontrar una curva tal que el intervalo AT entre la tangente CT y la ordenada EA sea un segmento constante–, con el uso de mis caracteres se resuelve en tres o cuatro líneas. Me sirvo en realidad del mismo cálculo y de los mismos signos, ya sea para el método inverso de las tangentes, ya sea para el método de las cuadraturas [BARONE, 441].

En LEIBNIZ, tres metodologías lógicas globales son particularmente importantes al discutir las en relación con el cálculo infinitesimal: semiótica universal, principio de continuidad, principio de identidad. Esos principios globales son equívocos e indeterminados. Localmente, en adecuados modelos, se convertirán en precisos teoremas matemáticos. Localmente, en el cálculo infinitesimal, sirven de sostén conceptual para sus primeros avances metodológicos y sus primeras resoluciones técnicas.

Para LEIBNIZ es fundamental el conocimiento sígnico. La construcción de adecuados signos generales y “libres” incorpora lo fundamental de los conceptos, y las combinaciones relacionales de los signos permiten una más plena comprensión del mundo. En los procesos de recomposición sígnica surgen, además, nuevos conocimientos, que se encontraban de alguna manera perdidos en la escritura contextual de los conceptos. La *semiótica universal* leibniziana, el manejo sígnico y simbólico, general y libre de contexto, abre las compuertas de la invención.

Por otra parte, no debe temerse que la contemplación de los caracteres nos aleje de las cosas; al contrario, nos guiará en lo íntimo de ellas. En efecto, si hoy debido a caracteres mal coordinados poseemos a menudo conocimientos confusos, en cambio, al manejar mejor los caracteres, obtendremos fácilmente conocimientos más precisos; ya que tendremos a nuestra disposición una especie de hilo mecánico en el meditar, mediante el cual podrá resolverse con gran facilidad cualquier idea en las ideas que la compongan. Más aún, después de haber considerado atentamente el signo de cualquier concepto, se presentarán inmediatamente a la mente los conceptos más

simples en los cuales se descompone: por lo tanto, como la resolución de un concepto corresponde perfectamente a la resolución de su signo, la simple consideración de los caracteres nos llevará a conocimientos adecuados, espontáneamente y sin fatiga [BARONE, 444].

El *principio de continuidad* de LEIBNIZ indica que el universo (de los conceptos, de la experiencia) es continuo. Debe existir siempre armonía y mediación. Algunos enunciados del principio de continuidad son los siguientes:

La naturaleza nunca realiza saltos [MATES, 163].

Los saltos son imposibles, no sólo en el caso del movimiento, sino en el orden completo de las cosas y las verdades [MATES, 147].

El principio de Continuidad requiere que, mientras las determinaciones esenciales de un ser se acerquen a las de otro, también todas las propiedades del primero deben gradualmente acercarse a las del segundo [MATES, 147].

Cuando dos instancias o datos se acercan el uno al otro continuamente, es necesario que sus consecuencias o resultados lo hagan también [MATES, 163].

Todos los órdenes de seres naturales forman una única cadena en la que las diferentes clases, como nudos, se conectan tan estrechamente la una a la otra que es imposible para los sentidos y la imaginación fijar el punto preciso donde una comienza y la otra acaba. Todas las especies que bordean o ocupan, por así decirlo, las regiones de inflexión y regresión (de la curva) deben ser equívocas y dotadas de caracteres que pertenecen igualmente a cualquiera de las especies vecinas [MATES, 147].

El principio de continuidad leibniziano parece haberse visto refutado por desarrollos posteriores en la física y la matemática. La situación no es nada clara, sin embargo: hay que tener en cuenta que los modelos actuales de comprensión de la materia atómica o los modelos aritméticos discretos pueden ser sólo modelos de percepción simplificados,

que yacen en fondos continuos que aún no comprenderíamos adecuadamente. Obsérvese, en particular, cómo la aritmética requiere cada vez más de métodos continuos para proporcionar soluciones a problemas eminentemente discretos (el caso del teorema de Fermat es especialmente patente). Aquí, en todo caso, no requerimos de la “certeza” del principio de continuidad; lo usaremos, con LEIBNIZ, como una guía en el proceso de descubrimiento.

El *principio de identidad*, que puede rastrearse –como el principio de continuidad– desde los griegos, se enuncia en de la siguiente manera: “ A es B ” si y sólo si se puede encontrar una serie finita de mediaciones (substituciones) definidas $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ tales que “ A es B ” se reduce a la forma “ $A_1 \cdots A_n$ es $B_1 \cdots B_n$ ”. La identidad se descompone así en una serie de pasos relacionales. Similarmente, la semejanza se descompone en una serie de aproximaciones. Otra forma del principio de identidad es el principio de los indiscernibles: “ A es B ” si y sólo si A puede ser substituido por B en cualquier proposición *salva veritate*.

Dos cosas son la misma si una puede ser substituida por la otra sin pérdida de verdad [MATES, 123].

No es posible que haya dos particulares que sean similares en todos los respectos –por ejemplo, dos huevos– ya que es necesario que algunas cosas puedan ser dichas de uno de ellos sin serlo del otro, pues en caso contrario podrían ser substituidos entre ellos y no habría razón para no llamarlos de la misma manera [MATES, 126].

Como veremos a continuación, en LEIBNIZ se combinan preocupaciones metodológicas globales (arte combinatoria, característica universal) y principios lógicos generales semiótica universal, continuidad, identidad) que se reflejan localmente en técnicas propias del cálculo infinitesimal: aritmetización, cálculo de diferencias, triángulo armónico, triángulo característico, regla de transmutación, simbología y traducción, operatoria unificada de los signos.

2. Los instrumentarios infinitesimales

En el *Arte combinatorio* (1666), LEIBNIZ estudia sucesiones de diferencias en la aritmética y observa las siguientes regularidades para las sucesiones de potencias $a_n = x^n$:

sucesión de enteros (a_n) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

primeras diferencias ($b_n = a_{n+1} - a_n$) : 1, 1, 1, 1, 1, ...

segundas diferencias ($c_n = b_{n+1} - b_n$) : 0, 0, 0, 0, 0, ...

sucesión de cuadrados: 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...

primeras diferencias: 1, 3, 5, 7, 9, ...

segundas diferencias: 2, 2, 2, 2, 2, ...

terceras diferencias: 0, 0, 0, 0, 0, ...

sucesión de cubos: 0, 1, 8, 27, 64, 125, ...

primeras diferencias: 1, 7, 19, 37, 61, ...

segundas diferencias: 6, 12, 18, 24, ...

terceras diferencias: 6, 6, 6, 6, ...

cuartas diferencias: 0, 0, 0, 0, ...

Sucesivamente, se anulan las $(n+1)$ -ésimas diferencias de la sucesión de potencias n -ésimas. La regularidad de las diferencias aritméticas es una regularidad que se incorporará posteriormente dentro del sistema general leibniziano. El principio de continuidad asegura que las regularidades de lo discreto deben reflejarse en regularidades similares en el dominio de lo continuo. La consideración de las sucesiones de diferencias lleva a LEIBNIZ a encontrar la relación fundamental

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 - a_{n+1},$$

donde

$$b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, \dots, b_i = a_i - a_{i+1}$$

en la cual se detecta por primera vez la idea de que las sucesiones de diferencias y las sucesiones de sumas podían verse como *operaciones inversas* la una de la otra. Con este instrumento, LEIBNIZ resuelve el problema que le había planteado HUYGENS (1672), acerca de sumar la

serie de inversos de números triangulares:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$$

donde los denominadores son los triangulares $i(i + 1)/2$. En efecto, los términos de la serie se escriben entonces $b_i = 2/i(i + 1)$ y pueden verse como diferencias:

$$b_i = \frac{2}{i} - \frac{2}{i + 1}.$$

De acuerdo a la regla detectada por LEIBNIZ, se obtiene

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2 - \frac{2}{n + 1},$$

de donde se deduce que la serie infinita tiene como suma 2.

El espíritu sistemático de LEIBNIZ le conduce a explicitar la combinatoria “escondida” detrás del ejemplo anterior, y obtiene su “triángulo armónico”, simétrico al triángulo aritmético de PASCAL:

1	4	6	4	1	Triángulo aritmético Los términos interiores son suma de los que están debajo
1	1	3	2	1	
	1	1	1		
		1	1		
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$		Triángulo armónico Los términos interiores son diferencia de los que están a la izquierda
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	
		$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$		
		$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		

En el triángulo armónico, la suma (infinita) de cualquier diagonal da el número inmediatamente anterior a la misma. En particular, la suma de la primera diagonal recoge la misma información que la suma de los inversos de números triangulares. El triángulo armónico incorpora así algunas de las correspondencias generales que la característica buscaría. Deben resaltarse dos aspectos que van produciendo pequeños apoyos locales al diseño general de la característica universal:

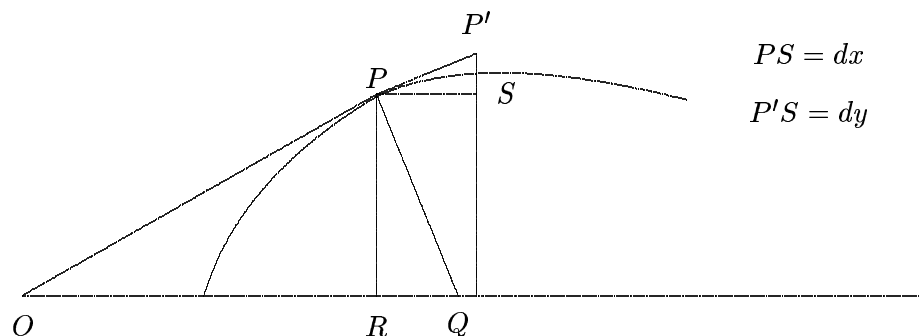
- se explicita una simetría entre procesos de suma y procesos de diferencia para sucesiones, lo que sugiere la existencia de una *combinatoria* que englobe esos procesos
- se explicita un control de combinaciones para algunas sucesiones (e.g. suma de diagonales en el triángulo armónico) que corresponden a casos particulares dispersos, lo que sugiere que la combinatoria debe ser *general*.

Combínense la creencia en una operatoria general de procesos de diferencia y suma, y el uso del principio de continuidad, ligado a variaciones infinitesimales de la identidad: resulta natural que LEIBNIZ, en 1673, construyera así sus primeras herramientas técnicas para el cálculo diferencial e integral. LEIBNIZ superará inmediatamente las resoluciones *ad hoc*, particulares, de sus predecesores y, más importante aún, combinará las problemáticas aparentemente diversas acerca de tangentes/normales, máximos/mínimos, cuadraturas y rectificación, en dos problemáticas básicas: diferenciación e integración. LEIBNIZ, al buscar combinatoria y generalidad detrás de las apariencias, producirá el fundamental revolcón lógico y metodológico que dará lugar a la matemática moderna.

El triángulo característico aparece en varios textos del siglo XVII, en particular en la obra de PASCAL –acerca de cuadraturas de porciones de círculos–. Se trata de un triángulo formado por indivisibles y cuya hipotenusa es tangente a la curva que debe cuadrarse. LEIBNIZ criticó a sus predecesores en el sentido de que no “vieron” en el triángulo característico más que una herramienta para cuadraturas específicas, mientras que si se ve combinatoriamente como un “lugar de enlaces” –donde concurren las operatorias simétricas que LEIBNIZ acababa de detectar en los dominios discretos– en el triángulo característico se encuentran *al tiempo* las claves para la diferenciación y la integración.

Utilizando el triángulo característico PSP' (según el principio de continuidad, infinitesimalmente pegado a la curva), LEIBNIZ indica (1673) que la resolución de problemas difíciles puede a menudo realizarse utilizando una metodología que se reduce a tres componentes básicas (a tratarse en el orden indicado): (1) traducción de hipótesis, (2) escritura de una ecuación diferencial, (3) resolución integral. Esto consiste

de manera precisa en la construcción de un signo general (1), en su descomposición analítica (2) y en su recomposición relacional sintética (3), siguiendo a la letra, dentro del dominio de lo infinitesimal, los preceptos generales de la característica universal.



Terminología: OP tangente, PQ normal, OR subtangente, RQ subnormal.

Por ejemplo, en 1675 LEIBNIZ ataca el problema: determinar una curva cuya subnormal sea inversamente proporcional a la ordenada. La resolución sigue las indicaciones del método:

Etapla (1): suponiendo que el origen es el punto O y las coordenadas de P son (x, y) , puede observarse en el triángulo característico que, de la semejanza de los triángulos PSP' y PRQ , se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p},$$

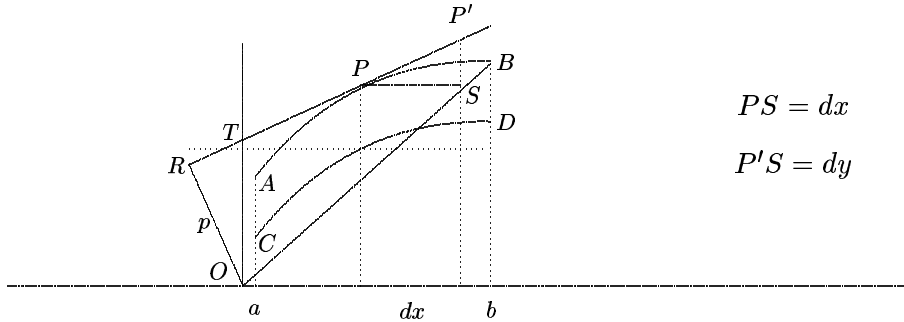
donde p es la subnormal RQ . Por otro lado, la hipótesis del problema asegura que $p = \frac{k}{y}$.

Etapla (2): de las traducciones anteriores resulta que $\frac{k}{y}dx = ydy$, es decir, $kdx = y^2dy$.

Etapla (3): integrando se demuestra inmediatamente que la curva es una cúbica.

De manera similar, en 1685, en un apéndice polémico a su primer artículo publicado sobre el cálculo diferencial e integral, LEIBNIZ resuelve en unas cuantas líneas el *problema de Beaune* (determinar las curvas de subtangente constante), problema que DESCARTES no había podido resolver y que los ingleses habían resuelto con complicadas manipulaciones de series infinitas: el triángulo característico indica que se tiene proporcionalmente $\frac{k}{y} = \frac{dx}{dy}$, la ecuación diferencial que se obtiene es $\frac{k}{y} dy = dx$ y su resolución proporciona curvas logarítmicas.

El método de transmutación, que consiste en traducir adecuadamente una cuadratura difícil (desconocida) en otra fácil (conocida), ya había sido usado por CAVALIERI, ROBERVAL y otros matemáticos del siglo XVII. Sin embargo, el proyecto leibniziano le indica que las traducciones útiles deben tener visos de universalidad. De nuevo, lo fundamental en LEIBNIZ es que el método pasa, de ser usado artificialmente, a convertirse en un reflejo más de la característica universal. LEIBNIZ detecta generalidad, limpieza de manejos, simetrías combinatorias y conceptuales, donde sus predecesores sólo detectaban soluciones particulares. En efecto, el “teorema de transmutación” de LEIBNIZ (1673) indicará una relación inversa entre un problema de tangentes y uno de cuadraturas, como se indica a continuación. Se trata del primer teorema general que explicitará la dualidad entre diferenciación e integración.



$$PS = dx$$

$$P'S = dy$$

$P = (x, y)$, $PP' = ds$, $PSP' =$ triángulo característico

En el teorema, LEIBNIZ calcula la cuadratura de la curva y entre A, B , reduciéndola a una cuadratura de z entre C, D , donde z es la ordenada de la tangente a y . Sea TP tangente a y ; como ORT es un triángulo semejante a PSP' (comparación de ángulos), se tiene $\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z}$; entonces:

$$\begin{aligned} \text{área (triángulo } OPP') &= \frac{1}{2}p ds = \frac{1}{2}z dx , \\ \text{área (sector } OAB) &= \frac{1}{2} \int_a^b z dx ; \\ \text{cuadratura (} y \text{ entre } A, B) &= \int_a^b y dx \\ &= \frac{1}{2}bf(b) - \frac{1}{2}af(a) + \text{área(sector } OAB). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b y dx = \frac{1}{2} \left([xy]_a^b + \int_a^b z dx \right) .$$

Esta resolución liga un problema de tangentes (z está definido en términos de la tangente: puede calcularse como $z = y - x \frac{dy}{dx}$) con un problema de cuadraturas, y “transmuta” el cálculo de la cuadratura (y entre A, B) en el cálculo de la cuadratura (z entre C, D). Obsérvese que, reemplazando z en el teorema de transmutación, se obtiene la que posteriormente será reconocida como una fórmula de integración por partes.

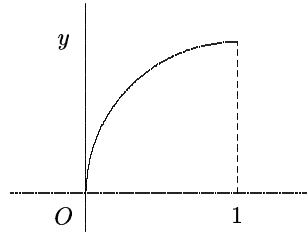
Una de las más interesantes aplicaciones del teorema de transmutación fue propuesta por LEIBNIZ en su famosa “cuadratura aritmética del círculo”: la obtención de la serie alternada infinita

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

WALLIS ya había encontrado una fórmula similar con un manejo *ad hoc* de inducción y series infinitas; de nuevo, la ventaja de se encuentra en el método, la generalidad y la sencillez. El hecho de que LEIBNIZ “reconstruyera” el cálculo y reencontrara muchos resultados dispersos sirvió

de perfecta excusa para que, en la disputa de prioridad que entablarían NEWTON y sus secuaces, los ingleses tacharan a LEIBNIZ de “plagiario” y “ave de rapiña”.

Considérese el cuarto de círculo:



La curva puede expresarse por $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, de donde $y = \sqrt{2x - x^2}$. La tangente se calcula por $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y}$, por lo tanto, z (en el método de transmutación) se obtiene como

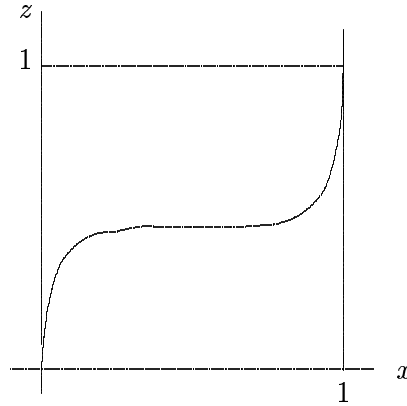
$$z = y - x \frac{1 - x}{y} = \sqrt{\frac{x}{2 - x}},$$

de donde $x = \frac{2z^2}{1 + z^2}$.

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 y \, dx = \frac{1}{2} \left([xy]_0^1 + \int_0^1 z \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(1 + (1 - \int_0^1 x \, dz) \right) \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{z^2 \, dz}{1 + z^2} = 1 - \int_0^1 z^2 (1 - z^2 + z^4 - \dots) \, dz \\ &= 1 - \left[\frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 - \dots \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \end{aligned}$$

En la anterior sucesión de igualdades, la segunda igualdad usa el teorema de transmutación, y la tercera el caso particular más sencillo de transmutación, muy conocido en la época:



Las últimas tres igualdades corresponden a manejos formales de series infinitas, sin preocuparse aún por cuestiones de convergencia.

Al explicar, unos años después, los orígenes de su cuadratura aritmética del círculo, afirmaba que había llegado a ella realizando

(...) una enumeración de cantidad de Metamorfosis, después de haberlas ensayado con una combinatoria muy fácil, [justificándose así] lo que ya había dicho acerca de la utilidad de la combinatoria para encontrar cosas que el Álgebra, y aún el Análisis, tal como lo conocemos, no sabrían explicar [COUTURAT, 295].

Acerca de la invención, en general, y acerca de la invención de su cálculo diferencial e integral, también comentaría:

No hay nada tan importante como ver el origen de las invenciones, que valen aún más –según creo– que las invenciones mismas, debido a su fecundidad ya que contienen en ellas la fuente de una infinidad de otras, que se podrán producir por una combinación dada o una aplicación a otros temas [COUTURAT, 295].

Se conservan de LEIBNIZ unos manuscritos de octubre y noviembre 1675, en los que fue anotando su invención del *cálculo* infinitesimal. En LEIBNIZ, la noción de *cálculo* es sofisticada: involucra un proyecto general (la característica universal), unos principios globales (continuidad, identidad), unos métodos combinatorios locales que indican la pertinencia de la característica universal (combinatoria aritmética, triángulos armónico y característico, transmutación) y, por último, la creación de los instrumentos mismos del cálculo: simbolismos operatorios, ágiles, y muy ricos en potencialidades de desarrollo.

En sus manuscritos, LEIBNIZ pasa del simbolismo *ad hoc* de CAVALLIERI ($\text{omn.}xy = x \text{ omn.}y - \text{omn.}x \text{ omn.}y$) a la notación leibniziana (traducción óptima, que fomentará un preciso control algorítmico):

$$\int xy = x \int y - \int x y$$

(regla *recursiva*; pueden calcularse con ella integrales de potencias).

Aparece también, por vez primera, el símbolo de diferenciación, introducido en un comienzo como $\frac{1}{d}$ para resaltar el cálculo *inverso* al de la integral (BERNOULLI posteriormente considerará a las integrales como diferenciales negativas ($f = d^{-1}$) y utilizará esa operatoria para resolver difíciles cuadraturas por medio de proporciones formales).

Es fundamental la introducción de *reglas de manejo* de los símbolos f , d , pues empiezan a hacerse evidentes las ventajas de una *operatoria* lógica y simbólica general sobre manejos geométricos particulares. Entre 1675 y 1677, LEIBNIZ se pregunta acerca de cuáles son las reglas adecuadas. En 1675, descarta la posibilidad $d(uv) = (du)(dv)$. En 1676, da las reglas correctas para las potencias:

$$d(x^e) = ex^{e-1}, \quad \int x^e = \frac{x^{e+1}}{e+1}$$

(donde e no es necesariamente un entero, $e \neq -1$). En 1677, obtiene las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes.

La explosión de resultados que se producirá en los siglos posteriores da cuenta del rotundo éxito del simbolismo local leibniziano y, más generalmente, de la pertinencia y fecundidad de su proyecto lógico global.

3. Los instrumentarios lógicos locales

LEIBNIZ propuso tres esbozos generales de cálculos lógicos (1679, 1686, 1690). Los esbozos nunca fueron completados a cabalidad, en buena medida porque su compleción requería una ruptura con la tradición aristotélica y escolástica, ruptura que sólo se conseguirá dos siglos más tarde, al desarrollar a fondo la herencia de LEIBNIZ.

1679. *Cálculo aritmético de la lógica*. En este primer esbozo, LEIBNIZ escoge los números como signos de su combinatoria lógica. Los conceptos son codificados por números y los conceptos primitivos por números primos; la descomposición de un concepto en sus conceptos primitivos corresponde a la factorización en números primos. La composición, por lo tanto, corresponde a la multiplicación (y la subsunción de un concepto en otro a la divisibilidad). La aritmética lógica incluye la idempotencia ($a.a = a$) y descarta así las potencias de primos. En esta aritmética se refleja el hecho fundamental de que el conocimiento no puede proceder por meras dicotomías y divisiones (uso de una cantidad par de componentes) sino por una combinatoria relacional general (uso arbitrario de un número finito de primos). Para poder contemplar la negación, LEIBNIZ introduce el signo $-$; cada concepto es codificado ya no por un sólo número (a) sino por un par $(+b, -c)$. Si el concepto no es contradictorio, se requiere que b, c sean primos entre sí.

Ejemplos. 1679. La universal afirmativa “Todo sabio es pío” será verdadera si “sabio” se representa por $(+70, -33)$ y “pío” por $(+10, -3)$ ya que cada 10 divide a 70 y 3 a 33. La universal negativa “Ningún pío es infeliz” será verdadera si “pío” se representa por $(+10, -3)$ e “infeliz” por $(+5, -14)$, ya que +10 posee el factor +2, -14 posee el factor -2, los elementos +2, -2 son contradictorios y, en consecuencia, “pío” e “infeliz” son incompatibles. La particular afirmativa “Algún sabio es pío” será verdadera con las representaciones numéricas anteriores, ya que no puede encontrarse ningún factor común contradictorio entre $(+70, -33)$ y $(+10, -3)$ (3 no divide a 70 y 10 no divide a 33).

1686. *Cálculo algebraico de la lógica*. En sus *Investigaciones generales sobre el análisis de las nociones y las verdades* (1686), LEIBNIZ escoge letras (*variables*) como signos de una nueva combinatoria lógica. Esta

nueva combinatoria puede considerarse como una notable anticipación del álgebra booleana de la lógica (1850).³

Algunos aportes fundamentales son los siguientes (las referencias de página se hacen a la edición de las *Investigaciones generales* por parte M. BEUCHOT y A. HERRERA: Unam, México, 1986):

- introducción de variables como signos generales (pág. 21)
- construcción recursiva del lenguaje lógico (pág. 22)
- uso de la “coincidencia” como concepto general de la característica, que, en el caso de proposiciones, corresponde a equivalencia (\Leftrightarrow) y, en el caso de términos, a igualdad ($=$) (aquí LEIBNIZ se encuentra muy cerca del concepto moderno de relación abstracta de equivalencia) (págs. 26–28)
 - intuiciones de una “lógica de la demostrabilidad” (págs. 28–30)
 - manejos permitidos en la introducción y eliminación de variables (reglas implícitas del cuantificador existencial) (pág. 33)
 - definición de posibilidad como “lo que no es contradictorio” (pág. 29)
 - definición de verdad como “lo que no conduce a contradicción” (pág. 38)
 - idea de “resolución” de un enunciado (deducción explícita a partir de axiomas) (pág. 38)
 - acotación de verdad necesaria como aquella que, en una resolución finita, no introduce contradicciones; acotación de verdad contingente (posible) como aquella que, en una resolución infinita, no introduciría contradicciones (págs. 39–42)
 - esbozos de una notación gráfica para los cuantificadores (págs. 54–55)

³La notable tesis de pregrado de Alejandro Martín *Completitud de dos cálculos lógicos en Leibniz* (Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Bogotá, 1998) estudia en detalle y completa el cálculo algebraico leibniziano, y demuestra fehacientemente que las interpretaciones usuales que detectaban contradicciones en los números característicos leibnizianos provienen de erróneas lecturas –originadas en COUTURAT– de los textos originales (los números característicos son índices de composibilidad entre proposiciones y no índices fijos para términos en el ámbito de lo actual).

- unificación de los signos (“abstractos”) para englobar “proposiciones” y “términos” (págs. 61–62)
- cálculo de “cosas” (existencias en mundos posibles) (págs. 65–67).

Ejemplos. 1686. La universal afirmativa “Todo A es B ” se representa de varias maneras (demostradas como equivalentes): $A = AB$, $A = BY$, $A \text{ no-}B = 0$ (Y representa alguna –cualquier– indeterminación). La particular afirmativa “Algún A es B ” se representa por $AY = BZ$. En este sistema, puede seguir demostrando la subalternación (si “Todo A es B ” entonces “Algún A es B ”): $A = AB$ implica $AY = ABY$ es decir $AY = BZ$ (con $Z = AY$).

1690. *Fragmentos adicionales a las Investigaciones generales*. LEIBNIZ, finalmente, enfrenta los problemas de la subalternación. Indica que, de la hipótesis “Todo A es B ”, traducida como $A = AB$ o como $A \text{ no-}B = 0$, no tiene por qué deducirse la existencia de A (implícita en “Algún A es B ”), ya que las ecuaciones anteriores valen aún si $A = 0$. Sin embargo, no alcanza a dar el paso definitivo, de corte con la tradición aristotélica, que llevará al preciso cálculo de cuantificadores que resolverá los problemas de la subalternación.

Como ejemplo de útiles traducciones entre dominios del saber, reflejo de la constante metodología relacional típica de la *Characteristica*, conecta nociones modales (propias de la lógica) con nociones normativas (propias del derecho): en *Elementa iuris naturalis*, revela una fundamental analogía implícita entre los funtores de (lo que se llamará) lógica modal deóntica (funtores **O**, **P**, **F** –obligación, permiso, prohibición–) y los funtores de la lógica modal alética (funtores \square , \diamond , $\neg\diamond$ –necesario, posible, imposible–):

Normatividad vía modalidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Justo, Lícito} \\ \text{Injusto, Ilícito} \\ \text{Equitativo, Debido} \\ \text{Indebido} \end{array} \right. \text{ es algo } \left\{ \begin{array}{l} \text{Posible} \\ \text{Imposible} \\ \text{Necesario} \\ \text{Omisible} \end{array} \right. \text{ para un buen hombre}$$

Normatividad vía normatividad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Posible} \\ \text{Imposible} \\ \text{Necesario} \\ \text{Contingente} \end{array} \right. \text{ es algo que } \left\{ \begin{array}{l} \text{puede} \\ \text{no puede} \\ \text{no puede no} \\ \text{puede no} \end{array} \right. \text{ hacerse en } \left\{ \begin{array}{l} \text{algún} \\ \text{ningún} \\ \text{cada} \\ \text{algún no} \end{array} \right. \text{ caso}$$

Con la “semántica de mundos posibles” (proveniente de los escolásticos medievales), LEIBNIZ construye las bases para los modelos de KRIPKE (1960) de las lógicas modales. Dadas una colección de “mundos posibles” y una relación de “accesibilidad” entre ellos, un enunciado será *necesario* en un mundo dado si es verdadero en *todos* los mundos accesibles desde ese mundo dado, y será *posible* si es verdadero en *algún* mundo accesible desde él. Las modalidades leibnizianas son una concreción más de su proyecto lógico global. La accesibilidad entre mundos permite modelar “grados” del ser, grados de identidad sobre un trasfondo posiblemente continuo.

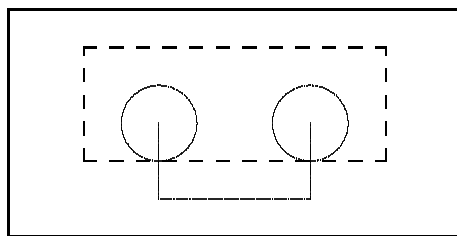
Señalemos, finalmente, cómo dentro del sistema metafísico de la monadología puede verse como una consecuencia de los principios de continuidad e identidad. Las mónadas son “sustancias simples” que recomponen el continuo. Con la variación del sitio, una mónada puede generar diversidad (discernibilidad) en la experiencia.

Sólo la geometría puede proporcionarnos el hilo conductor para recorrer el laberinto de la composición del continuum, de los máximos y de los mínimos, y de lo indesignable, y del infinito, y nadie llegará a una metafísica verdaderamente sólida sin haber recorrido dicho laberinto [Russell, 132].

Así como una misma ciudad, vista por diferentes partes, parece otra y resulta como multiplicada en perspectiva, así también sucede que, por la multitud infinita de sustancias simples, hay como otros tantos universos diferentes, los cuales no son, sin embargo, sino perspectivas de uno solo, según los diferentes puntos de vista de cada mónada. Esta es la manera de conseguir la mayor variedad posible con el mayor orden posible [Larroyo, 395].

Cada parte de la materia puede ser concebida como un jardín lleno de plantas y como un estanque lleno de peces. Pero cada rama de la planta, cada miembro del animal, cada gota de sus humores es también como ese jardín o ese estanque [Larroyo, 397].

La vaga (y aparentemente contradictoria) noción de mónada se convertirá en un importante eje de desarrollo en la matemática moderna. Para precisar esto, definamos un “contexto” como un conglomerado de relaciones y supongamos que tenemos dados un contexto K y dos conceptos (u objetos) A , B , definibles en K . Decimos que A es K -indiscernible de B si y sólo si para todo predicado P definible en K , $P(A)$ equivale a $P(B)$. El entorno de K -indiscernibilidad de A , o K -mónada de A , se define como la clase de los B , definibles en K , tales que B es K -indiscernible de A (notación: K -Monad(A)). Esta noción de mónada se encuentra doblemente relativizada: depende de K y de A . El difícil manejo de las mónadas leibnizianas surge de que éstas pretenderían vivir en el Absoluto, en un ámbito “libre de contexto”, más allá de todo K . En el aún más difícil y dudoso manejo de una metafísica absoluta, se esperaría trabajar con esencias “en sí”, más allá de todo A . Tales manejos han limitado la comprensión de la monadología leibniziana. Mientras que la noción metafísica de mónada parecería ser inaccesible, la noción de K -mónada ha sido extremadamente útil en este siglo.



Las K -mónadas son comparables: lo único que sucede es que la comparación se realiza por fuera de K (la relación necesariamente es externa, por definición de K -indiscernibilidad)

Las mónadas (en un absoluto metafísico) se encontrarían, en cambio, aisladas. Pero un tal aislamiento es incomprensible, pues no se le puede dar sentido a la “absoluta-indiscernibilidad”. La monadología, mal comprendida en un ámbito de lo Absoluto, lleva a discursos vacuos. La monadología, comprendida en ámbitos relacionales relativos, ha originado, en cambio, conceptos fundamentales: relación de equivalencia, tipo, cardinal, congruencia, por sólo mencionar algunos conceptos imprescindibles de la matemática contemporánea. Muchas concreciones matemáticas en ámbitos relacionales relativos corresponden a especificaciones del método general de la característica, tal como lo hubiera deseado.⁴

⁴En los años 1950–60 se creó la teoría matemática de categorías cuyos paradigmas esenciales son: • 1. Caracterizar a los objetos matemáticos por sus relaciones ‘ambientales’ con los demás objetos: caracterización sintética que no mira el contenido analítico de los objetos. • Establecer una “red universal” de conceptos que conecta uniformemente los diversos campos de la matemática y que da lugar a construcciones importantes al especificarse (o “encarnarse”) en cada campo particular. • 3. Trasladar ‘conceptografías’ de la manera más económica posible, elucidando lazos de coherencia fundamentales en la matemática (adjunciones). La teoría ha podido axiomatizarse y ha tenido un inmenso éxito técnico. Como resultado de esos trabajos, las matemáticas tienen ahora, a comienzos del nuevo milenio, dos bases de fundamentación equiconsistentes: la teoría de conjuntos o la teoría de categorías. Una de las muchas coincidencias de enfoque entre la matemática leibniziana y la teoría de categorías consiste en pretender fundamentar la *posibilidad* de que, en el dominio más extenso de la cultura, existan procedimientos globales de síntesis, similares en algo a la *característica universal*. Por supuesto, no podría pretenderse obtener exactitud y univocidad en una determinada síntesis cultural global. Sí puede esperarse, en cambio, mostrar cómo un cierto método de pensamiento –el que busca estructuras y relaciones y estudia el diálogo y las fronteras entre ellas– proporciona “uniformemente” un modelo dinámico para los varios espacios de la cultura, y otorga guías y pautas para entender la complejidad de cada espacio, al especificarse en ese espacio particular. El éxito de los muchos proyectos leibnizianos a lo largo del espectro general de la cultura es un índice más de que un tal deseo de universalidad no sólo es viable sino necesario para el desarrollo de la civilización (sobre el empuje ineludible de los universales, véase ALAIN DE LIBERA, *La querelle des universaux. De Platon à la fin du moyen age*, Paris: Seuil, 1996).

Bibliografía

- Referencias primarias (sobre las citas mencionadas de Leibniz).

Barone, Francesco (ed.), *Leibniz: Scritti di Logica* (2 vols.), Bari: Laterza, 1992 (primera edición 1968).

Belaval, Yvon, *Leibniz, critique de Descartes*, Paris: Gallimard, 1960.

Correia, Manuel Antonio (ed.), *Leibniz: Disertación acerca del arte combinatorio*, Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica, 1992.

Couturat, Louis, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Hildesheim: Georg Olms Verlag, 1985 (primera edición 1901).

Larroyo, Francisco (ed.), *Leibniz: Discurso de metafísica ... Monadología ...*, México: Porrúa, 1991 (traducciones al español de 1877).

Mates, Benson, *The Philosophy of Leibniz*, New York: Oxford University Press, 1986.

Rauzy, Jean Baptiste (ed.), *Leibniz: Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités*, Paris, PUF, 1998.

Russell, Bertrand, *Exposición crítica de la filosofía de Leibniz*, Buenos Aires: Ediciones Siglo Veinte, 1977 (primera edición 1900).

- Referencias secundarias (revisiones críticas del cálculo y de la lógica en Leibniz).

Bos, H.J.M., "Newton, Leibniz y la tradición leibniziana", en: I. Grattan-Guinness (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*, Madrid: Alianza, 1984 (primera edición en inglés 1980).

De Lorenzo, Javier (ed.), *Leibniz: Análisis infinitesimal*, Madrid: Tecnos, 1994 (primera edición 1987).

Edwards, C.H. (Jr.), *The Historical Development of the Calculus*, New York: Springer, 1979.

Ishiguro, Hidé, *Leibniz's Philosophy of Logic and Language*, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (vol.1), New York: Oxford University Press, 1990 (primera edición 1972).

Knecht, Herbert, *La logique chez Leibniz. Essai sur le rationalisme baroque*, Lausanne: L'Age d'Homme, 1981.

Serres, Michel, *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Paris: PUF, 1990 (primera edición 1968).

(Recibido en 1999; la versión revisada en febrero de 2000)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA
e-mail: fzalamea@ciencias.ciencias.unal.edu.co