Sociedad Colombiana de Matemáticas
XV Congreso Nacional de Matemáticas
2005 **Apuntes**

Lecturas Matemáticas
Volumen Especial (2006), páginas 95–103

Cómo obtener ecuaciones reducidas de Riccati invariantes con respecto a un campo de vectores

Alberto Campos
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Abstract. Application of Kovacic's algorithm to second order linear ordinary differential equations calls for several calculations. In one of the cases considered by Kovacic, Lie's algorithm for first order ordinary differential equations provides an analogous result.

Key words and phrases. Kovacic's algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. Lie's algorithm for solving differential equations.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 3402. Secondary 34A05, 34C05.

Resumen. La aplicación del algoritmo de Kovacic requiere diversos cálculos. En uno de los casos estudiados por Kovacic , el algoritmo de Lie permite obtener un resultado análogo.

1.

Ha habido gran auge investigativo durante la segunda mitad del siglo XX en la teoría de Galois diferencial, una teoría creada por el analista francés, Emile Picard. Atención especial ha tenido en ella la ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden. Kovacic escribió una memoria, [Kovacic, 1986], particularmente exitosa desde el punto de vista de la investigación, no solo por el estudio motivado, minucioso y completo, sino, posteriormente, por la cantidad de veces que ha sido citada en bibliografías y por las perquisiciones que ha inspirado. El algoritmo de Kovacic, según van der Put (quien ha expuesto a fondo la teoría de Galois diferencial) es una aplicación muy concreta de la teoría de Galois diferencial.

2.

Una nomenclatura mínima se tiene en el capítulo III de *Differential Algebra*, [KAPLANSKY , 1976], tratamiento conciso e indispensable en estos temas.

Sea M un campo diferencial, K un subcampo diferencial de M. El *grupo de Galois diferencial de* $M|K$ es el grupo G de todos los automorfismos diferenciales de M que dejan fijo a K elemento por elemento.

Una *extensión de Picard-Vessiot* es una extensión sin nuevas constantes, generada por n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.

Una *adjunción de una integral* es la adjunción de un elemento u tal que u' (derivada de u) pertenezca al campo de base.

Una *adjunción de una exponencial de una integral* es la adjunción de un elemento u tal que u'/u pertenezca al campo de base.

Una *extensión de Liouville* es el resultado final de un número finito de extensiones, cada una adjunción de una integral, o de la exponencial de una integral.

Una *extensión de Liouville generalizada* es el resultado final de un número finito de extensiones, cada una adjunción de una integral, o, adjunción de la exponencial de una integral, o extensión algebraica finita.

Una solución de tipo Liouville es una expresable mediante las que LIOUVILLE llamó funciones elementales, a saber, funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas.

Llámense *soluciones liouvillianas*, o de Liouville, a las que pertenecen a algún campo diferencial de Liouville.

El núcleo del algoritmo de Kovacic consiste en determinar si una ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden admite solución de tipo Liouville.

En [KAPLANSKY, 1976, pp. 31-32], está demostrado el

Teorema de las cuatro clases de subgrupos de $SL(2,\mathbb{C})$. *Si G es un subgrupo algebraico de $SL(2,\mathbb{C})$, entonces, se tiene una de las cuatro clases de subgrupos:*

1. *G es triangulizable.*
2. *G es conjugado respecto de un subgrupo de*

$$\left\{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}, c \neq 0\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{C}, c \neq 0\right\}$$

   y no pertenece a la clase 1.
3. *G es finito y no pertenece ni a la clase 1, ni a la clase 2.*
4. *$G = SL(2,\mathbb{C})$.*

3.

Con base en esta clasificación, el algoritmo de Kovacic considera cuatro casos.

Para la clase 4, no hay información utilizable para el estudio de la ecuación.

Quedan los otros tres casos, de dificultad creciente. [Kovacic, 1986] se ocupa detalladamente de cada uno de estos tres casos (la memoria de 1986 está expuesta en 40 páginas) y suministra ejemplos ilustrativos. El complejo algoritmo consta de criterios para obtener polinomios que, en caso de existir, a la larga, entran en la composición de la solución para la ecuación diferencial que se trata de resolver.

Surge la pregunta de si es posible adjuntar información apoyándose en otros procedimientos, por ejemplo, en el algoritmo de Lie, ideado precisamente para el análisis de las ecuaciones diferenciales.

Hay un nexo entre las ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas de segundo orden y las ecuaciones de Riccati, ya advertido por Daniel Bernoulli, enunciado en un contexto diferente por Vessiot, y, explicable mediante aplicación del algoritmo de Lie para las ecuaciones diferenciales.

En el mismo sentido es interesante en la teoría de Galois diferencial para las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden lineales, el teorema según el cual una de estas ecuaciones admite solución de Liouville, si y solo si, una cierta ecuación de Riccati, asociada a la de segundo orden de manera canónica, admite una solución racional.

En la tesis de Vessiot, [1892], figuraban los dos teoremas siguientes:

Teorema. *Para que una ecuación lineal de segundo orden sea soluble por cuadraturas, es necesario y suficiente que la derivada logarítmica de una de las soluciones sea racional.*

Teorema. *Para que la ecuación de segundo orden*

$$\frac{d^2v}{dx^2} + 2p(x)\frac{dv}{dx} + q(x)v = 0$$

sea soluble por cuadraturas, es necesario y suficiente que la transformada de Riccati

$$\frac{du}{dx} + u^2 + (q - p^2 - p') = 0$$

tenga una solución racional.

4.

Las ecuaciones llamadas de Riccati pueden ser generalizadas o reducidas. Como es siempre posible llevar la generalizada a una reducida, solo se alude a éstas.

Sea $u' = u^2 + R(x)$ una ecuación reducida de Riccati; ella no es lineal. Algunas admiten soluciones a la Liouville; entonces, la aplicación de la teoría de grupos de Lie al estudio de las ecuaciones diferenciales permite hallar la solución. Generalmente, las ecuaciones de Riccati, no admiten grupos de Lie.

El campo de vectores (transformación infinitesimal en el lenguaje de Lie)

$$v = f(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

tiene como primera prolongación

$$v^{(1)} = f(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + (D_x h - u_x D_x f)\frac{\partial}{\partial u_x},$$

donde

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u}.$$

Al aplicar a la ecuación de Riccati el criterio infinitesimal de invariación (idea fundamental de Lie) se tiene que la ecuación $u' = u^2 + R$ admite el campo de vectores, v, si y solo si, $v^{(1)}[u' - u^2 - R] = 0$ siempre que $u' = u^2 + R$.

La aplicación del criterio conduce a un sistema de ecuaciones parciales lineales donde las incógnitas son las dos funciones $f(x,u)$, $h(x,u)$.

En lo que sigue, los subíndices indican derivación respecto de la variable anotada.

Una de estas ecuaciones, $f_u = 0$, significa que la función buscada $f(x,u)$ no depende de u.

Entonces, la otra función incógnita, $h(x,u)$ ha de tener la forma

$$h(x,u) = i(x)u + j(x).$$

Al aplicar de nuevo el criterio de invariación infinitesimal de Lie se obtienen un sistema diferencial con tres ecuaciones, así

- $i + f_x = 0$
- $i_x - 2j = 0$
- $j_x + iR - f_x R - f R_x = 0.$

Por la primera ecuación

$$i(x) = -f_x.$$

Por la segunda ecuación

$$j = \tfrac{1}{2}\, i_x = -\tfrac{1}{2}\, f_{xx}.$$

Entonces, por la tercera ecuación se obtiene

$$f_{xxx} + 4f_x R + 2fR_x = 0.$$

Es esta una ecuación diferencial lineal de tercer orden en f y de primer orden en R, importante en la literatura matemática desde diversos aspectos.

Se puede constatar que el estudio de tal ecuación es muy complicado y que la ecuación es soluble en algunos casos solamente.

5

¿Qué resulta si se reemplaza en esta ecuación, $f(x)$ por $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+e}$, $ae - bc \neq 0$?

El resultado se puede enunciar así:

Proposición 1. *Si* $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+e}$, $ae - bc = 1$, *entonces, en la ecuación*

$$f_{xxx} + 4f_x R + 2fR_x = 0$$

se obtiene

$$R(x) = \left(\frac{cx+e}{ax+b}\right)^2 \left[\frac{a}{(cx+e)^3} - \frac{3}{4(cx+e)^4} + \text{constante}\right].$$

Se puede mostrar, entonces, que la ecuación de Riccati

$$u_x = u^2 + R(x)$$

donde $R(x)$ *tiene la expresión que se acaba de encontrar, admite el campo de vectores*

$$v = \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{-u}{(cx+e)^2} + \frac{c}{(cx+e)^3}\right]\frac{\partial}{\partial u}.$$

En general, una ecuación diferencial reducida de Riccati $u_x = u^2 + R(x)$ admite entonces el campo de vectores

$$v = f(x)\frac{\partial}{\partial x} - (uf_x + \tfrac{1}{2}f_{xx})\frac{\partial}{\partial u},$$

si la función $R(x)$ puede llevarse a la forma indicada en la proposición 1.

6.

En realidad, se tiene una propiedad general que puede enunciarse así:

Proposición 2. *A partir de la ecuación diferencial*

$$f_{xxx} + 4f_x R + 2fR_x = 0,$$

donde f *es una función no nula por lo menos tres veces continuamente diferenciable, siempre es posible determinar una solución,* $R(x)$, *por lo menos una vez continuamente diferenciable. Precisamente*

$$R(x) = \frac{1}{f^2}\left[\text{constante} - \frac{1}{2}\int ff_{xxx}\,dx\right].$$

Demostración. Es consecuencia necesaria dado que la ecuación donde se supone f conocida y no nula es diferencial ordinaria lineal no homogénea de primer orden. Por lo cual, la demostración es dada por los pasos para resolver este tipo de ecuaciones.

La parte lineal es $4f_xR + 2fR_x = 0$. De donde $R = \dfrac{1}{f^2}$. En efecto,

$$2f_xR + fR_x = 2f_x\frac{1}{f^2} + f\left(-\frac{2f_x}{f^3}\right) = 2\frac{f_x}{f^2} - 2\frac{f_x}{f^2} = 0.$$

Se considera ahora la ecuación completa y se busca una solución de la forma

$$R(x) = u(x)v(x).$$

Al reemplazar en la ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= f_{xxx} + 4f_xuv + 2f(u_xv + uv_x) \\ &= v[4f_xu + 2fu_x] + (f_{xxx} + 2fuv_x). \end{aligned}$$

El paréntesis se anula si $u(x) = \dfrac{1}{f^2}$. Queda por resolver la ecuación

$$f_{xxx} + 2fuv_x = f_{xxx} + 2\frac{v_x}{f} = 0;$$

es decir

$$v_x = \frac{dv}{dx} = -\tfrac{1}{2}f\, f_{xxx};$$

de donde

$$v = \text{constante} - \frac{1}{2}\left(\int ff_{xxx}\right)dx.$$

Por lo tanto

$$R = uv = \frac{1}{f^2}\left[\text{constante} - \frac{1}{2}\left(\int ff_{xxx}\,dx\right)\right]. \quad \boxtimes$$

7.

Se puede enunciar, en general,

Proposición 3. *La ecuación reducida de Riccati*

$$u_x = u^2 + \frac{1}{f^2}\left[\text{constante} - \frac{1}{2}\left(\int ff_{xxx}\,dx\right)\right],$$

donde f es una función de clase $\mathcal{C}^3$ no nula de una variable, admite el campo de vectores

$$v = f(x)\frac{\partial}{\partial x} - (uf_x + \tfrac{1}{2}f_{xx})\frac{\partial}{\partial u},$$

y es, por lo tanto, soluble mediante el algoritmo de Lie.

8.

Considérese el caso 2 [Kovacic, 1986, pág. 19. Campos, 2005, págs. 42–45]. El problema consiste en hallar la función $y(x)$ tal que

$$y'' = ry, \quad \text{donde} \quad r = \frac{1}{x} - \frac{3}{16x^2}.$$

Por el teorema citado de Vessiot, la ecuación de Riccati para resolver es

$$u_x + u^2 = \frac{1}{x} - \frac{3}{16x^2}.$$

Es indispensable, a pesar de que la ecuación parece sencilla, la aplicación de tres pasos del algoritmo de Kovacic. Mediante ellos se determina la función $y = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$ tal que

$$u = \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{1}{4x}$$

sea solución de la ecuación de Riccati, lo requerido por el algoritmo de Kovacic.

Con el algoritmo de Lie, por la proposición 2 se obtiene, para $f(x) = x^a$,

$$R(x) = \frac{\text{constante}}{x^{2a}} - \frac{a(a-2)}{4x^2}.$$

El algoritmo de Lie consiste en hallar coordenadas canónicas a partir de este campo, las cuales hacen posible la integración.

Para el caso de Kovacic, basta tomar $a = \frac{1}{2}$ y la constante igual a -1, para obtener, según las fórmulas transcritas

$$f(x) = x^{1/2},$$
$$h(x,u) = -\frac{u}{2x^{1/2}} + \frac{1}{8x^{3/2}};$$

de donde el campo de vectores prolongado es

$$v^{(1)} = x^{1/2}\frac{\partial}{\partial x} + \left[-\frac{u}{2x^{1/2}} + \frac{1}{8x^{3/2}}\right]\frac{\partial}{\partial u} + \left[\frac{u}{4x^{3/2}} - \frac{3}{16x^{5/2}} - \frac{u_x}{x^{1/2}}\right]\frac{\partial}{\partial u_x}.$$

Se verifica que

$$v^{(1)}\left[u_x - u^2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{16x^2}\right] = 0,$$

es decir, que la ecuación de Riccati es invariante respecto al campo de vectores,

$$v = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + h(x,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

y es, por lo tanto, integrable.

Para aplicar el algoritmo de Lie, se plantea el cálculo de la función invariante respecto del campo de vectores, es decir, de una función que el campo anula.

Lo cual implica resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{x^{1/2}} = \frac{du}{-\dfrac{u}{2x^{1/2}} + \dfrac{1}{8x^{3/2}}}.$$

Esta puede llevarse a la forma

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{2x} = \frac{1}{8x^2}.$$

Una solución es dada por

$$u = -\left(\frac{1}{x^{1/2}} + \frac{1}{4x}\right)$$

y es, salvo el signo, la función u que determina el algoritmo de Kovacic.

Dado que el algoritmo de Lie está calculado para una ecuación de Riccati escrita $u_x = u^2 + R(x)$, cuando Kovacic escribe la misma ecuación así: $u_x + u^2 = R(x)$, se presenta la diferencia de signo.

10. Observaciones

- La solución determinada mediante el algoritmo de Kovacic para la ecuación de Riccati implicada por el teorema de Vessiot coincide con la solución de la ecuación diferencial ordinaria resultante al plantear la búsqueda de la función invariante por el campo de vectores respecto del cual la ecuación de Riccati es invariante.
- Es pensable que pueda hacerse alguna clasificación para las ecuaciones reducidas de Riccati, construidas solubles por la proposición 3, en términos de funciones elementales según la terminología de Liouville.
- Desde diversos enfoques se puede argumentar en pro de la insistencia en el estudio de las ecuaciones de Riccati. Primordialmente por ser esta ecuación la más sencilla no lineal, dado que los problemas no lineales importan mucho en la investigación actual.

Bibliografía

[1] Vessiot, Ernest. *Sur l'integration des équations différentielles linéaires.* (Thèse). Ann. de l'École Normale. 3 Série. **IX** (Juillet) (1892), 197–280.
[2] Kaplansky, Irving. *An introduction to differential algebra.* Hermann: Paris, 1976.
[3] Kovacic, Jerald. *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations.* J. Symbolic Computation **2** (1986), 3–43.
[4] Kovacic, Jerald. *An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations*, 2001. `http://members.bellatlantic.net/~jkovacic` September 20, 2001.
[5] Campos, Alberto. *Ecuación de Riccati mediante grupos de Lie y algoritmo de Kovacic.* En *Memorias del XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (mayo 2005), 5–46.

(Recibido en Marzo de 2006. Aceptado para publicación en agosto de 2006)

Departmento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
e-mail: acampos_s@yahoo.com.mx