

## Fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local\*

JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN

Universidad de Medellín, Medellín

PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE

Universidad EAFIT, Medellín

EDISON DARÍO VASCO AGUDELO

Universidad de Antioquia, Medellín

**ABSTRACT.** Recent research in mathematics education look for designing instruction modulus to help students improve their reasoning levels in concepts related to this knowledge. Due to its characteristics, van Hiele's model has been the basis of recent research projects which focus on its use in themes on mathematical analysis with a high visual and geometric component. The purpose of this article is to explain the steps in the construction of an instruction modulo which allowed students ranked on the second level of reasoning, according to Van Hiele's model, be promoted to the level three of reasoning. All this using the concept of local approach, as in the tangent line to a plane curve in one its points. Also an analysis of the results obtained applying the learning experiences in the information phases and guided orientation, is presented.

*Key words and phrases.* van Hiele's model, levels of thinking, phases of learning, *insight*, conceptual maps, instruction module, secants ray.

*2000 AMS Mathematics Subject Classification.* 97C50, 97D20.

**RESUMEN.** Investigaciones recientes en educación matemática buscan diseñar módulos de instrucción que ayuden a potenciar el nivel de razonamiento de los alumnos en conceptos relativos a esta rama del saber.

---

\*Este trabajo se presentó en el XV Congreso Nacional de Matemáticas, Bogotá, 2005.

Debido a sus características el modelo educativo de van Hiele ha sido la base de recientes proyectos de investigación que centran su aplicación en tópicos del análisis matemático con un alto componente visual y geométrico. El propósito de este artículo es mostrar las pautas de elaboración de un módulo de instrucción que permitió a un grupo de alumnos ubicados en el nivel 2 de razonamiento del modelo educativo de van Hiele progresar al nivel 3, entorno al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. Así mismo se presenta el análisis de los resultados obtenidos al aplicar las experiencias de aprendizaje para las fases de información y orientación dirigida.

## 1. Introducción

Tradicionalmente cuando se desarrolla un curso de cálculo diferencial se hace énfasis en la manipulación de ecuaciones y en la sustitución de valores dentro de ellas. Pero esto no basta para que el alumno integre los conceptos matemáticos tratados, sino, más bien, ayuda a crear la falsa convicción de que el cálculo se reduce a la aplicación directa de un algoritmo del cual no se conoce su verdadero sentido y significado. Aunque los aspectos mencionados siguen siendo importantes en el dominio del concepto desde el punto de vista operacional, poco aportan al desarrollo del razonamiento pues en ellos prima el manejo de algoritmos y la memorización de conceptos de manera aislada.

Este hecho no solo cuestiona la metodología seguida en la explicación de esos conceptos, tanto a nivel de bachillerato como universitario, sino que evidencia un grave problema metodológico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los fundamentos del análisis matemático. En particular, con el concepto de aproximación local. Es común creer que la comprensión de los procesos inmersos en este concepto no deben presentar dificultad alguna para los alumnos y por ello se pasa rápidamente de las definiciones matemáticas a los problemas algebraicos, descuidando el razonamiento del paso al límite que es inherente al mismo.

En esta perspectiva y dentro de la línea de investigación que se desarrolló en el proyecto “Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”<sup>\*\*</sup>, se detectó la necesidad de implementar un modelo educativo que permitiera a los alumnos progresar en su nivel de razonamiento frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. Ésta es una de las primeras manifestaciones del concepto de aproximación local que se les presenta a los alumnos durante su vida académica.

Un modelo educativo que ha probado su validez en educación matemática es el de VAN HIELE. Su constitución ha permitido que recientes investigaciones

---

<sup>\*\*</sup> Código en **Colciencias**: 1115-11-12704. Investigador principal ANDRÉS FELIPE DE LA TORRE GÓMEZ.

centren su aplicación no solo en geometría (donde se originó), sino en algunos tópicos del análisis matemático que poseen un alto componente visual y geométrico. Dicho modelo tiene tres componentes principales: en primer lugar, el *insight*, que según VAN HIELE ([12], pág. 24) se define como “comprensión”. En segundo lugar, los niveles de razonamiento se clasifican en cinco: nivel 0, predescriptivo; nivel 1, de reconocimiento visual; nivel 2, de análisis; nivel 3, de clasificación y relación; nivel 4, de deducción formal. Por último, las fases de aprendizaje, que son fase 1, información; fase 2, orientación dirigida; fase 3, explicitación; fase 4, libre orientación; fase 5, integración; las fases están orientadas a ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, constituyendo un esquema para organizar la enseñanza.

Este artículo presenta las pautas para el diseño del módulo de instrucción que permitió el progreso de un grupo de alumnos ubicados en el nivel 2 de razonamiento al nivel 3, con respecto al concepto de aproximación local (en su manifestación de recta tangente a una curva plana) de acuerdo con las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele. Además presenta los resultados obtenidos en la intervención pedagógica y el análisis e interpretación de los mismos respecto a las fases de información y orientación dirigida, pues en éstas se da un mayor énfasis en la aplicación del mecanismo permitiendo observar cambios relevantes en los procesos de razonamiento en los que está involucrado un paso al límite.

## 2. El modelo educativo de van Hiele

Como se indicó anteriormente, el modelo educativo de van Hiele está compuesto por cinco (5) niveles de razonamiento, cinco (5) fases de aprendizaje y el *insight*. Tanto los niveles como las fases, tienen como propósito fundamental promover el *insight*, que según VAN HIELE, se obtiene “. . . cuando una persona actúa adecuadamente en una nueva situación y con intención” ([12], pág. 24).

Según VAN HIELE la aplicación de este modelo a un concepto específico necesita el establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permitan la detección de los mismos a partir de la actividad de los aprendices. Por esto las áreas o tests diseñados para la detección de los niveles, deben recoger la relación existente entre un nivel y el lenguaje apropiado en cada uno de ellos. La aplicación de estos tests debe tener como objetivo primordial la detección de los niveles de pensamiento sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Las fases de aprendizaje se proponen con el objetivo de ayudar al docente a impartir la instrucción correspondiente a un alumno para que este progrese en su nivel de razonamiento. Es importante resaltar que, desarrolladas estas cinco fases, los alumnos habrán adquirido una nueva red de relaciones mentales más amplia que la anterior, completándola y reformulándola. La colección de las experiencias de aprendizaje propuestas para lograr este propósito se denomina “módulo de instrucción” ([4], pág. 11).

**2.1. Módulo de instrucción.** Se entiende por módulo un elemento combinable con otros de la misma naturaleza o que concurren con él a una misma función. En este sentido, un módulo de instrucción es la colección de todas las actividades realizadas para cada una de las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele, frente al concepto objeto de estudio. FUYS, afirma que “el módulo de instrucción, debe estar basado en el modelo de van Hiele y diseñado para utilizarlo como una herramienta de investigación en una prueba que se ajusta a una instrucción docente–alumno” ([4], pág. 11).

Un módulo de instrucción está compuesto por experiencias de aprendizaje que pueden ser entendidas no sólo como las que se realizan en el aula sino también como aquellas que promueven aprendizajes significativos, independientes del contexto donde se lleven a cabo. Éstas se enfocan de tal manera que los alumnos se involucran en procesos de enseñanza y aprendizaje más específicos; así mismo, las experiencias de aprendizaje serán aquellas que se realicen con propósitos formativos con el fin de que el alumno adquiera nuevas habilidades y destrezas frente al concepto objeto de estudio.

En este mismo sentido, y según las características del modelo educativo de van Hiele, dichas experiencias deben ser desarrolladas de tal forma que permitan al alumno ser partícipe de su propio aprendizaje, según GUTIÉRREZ “la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia. Esta experiencia se adquiere unas veces fuera del aula y otras veces dentro de ella. La enseñanza adecuada es, aquella que proporciona esa experiencia” ([7], pág. 330).

El papel del módulo de instrucción es fundamental para impartir la instrucción ya que permite establecer un orden secuencial para la aplicación de las actividades propuestas en cada una de las fases de aprendizaje.

### 3. “Concepto definición” y “concepto imagen”

Se utilizarán las definiciones indicadas por TALL & VINNER ([5], pág. 152), sobre estos términos: “el término concepto imagen, se usará para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. (...). Sólo cuando los aspectos contradictorios son evocados simultáneamente aparece cualquier sensación de conflicto o confusión. Por otra parte, el concepto definición es la fórmula con palabras usada para especificar ese concepto” .

### 4. El concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella

El concepto de aproximación local está relacionado con todos los procesos de paso al límite tales como el de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, derivada de una función en un punto, continuidad de una

función en un punto, convergencia de sucesiones y series infinitas, entre otros. Estas manifestaciones se comienzan a exponer a los alumnos en los últimos años de bachillerato y en los primeros años de universidad. En estos grados de escolaridad el concepto se explica de manera intuitiva, exponiendo las definiciones con palabras para evitar la simbología necesaria en un tratamiento riguroso.

Es común creer que la comprensión de los procesos en los cuales esta involucrado el concepto de aproximación local no debería presentar obstáculos para los alumnos y por ello se pasa rápidamente de las definiciones presentadas en forma verbal a los problemas algebraicos, sin tener en cuenta el desarrollo del razonamiento inherente a los conceptos que requieren el paso al límite.

La recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella es una manifestación del concepto de aproximación local, que para su estudio se puede dotar de una componente visual y geométrica (mecanismo del haz de secantes), lo que ayuda al alumno a comprender los procesos de razonamiento en los que está involucrado el paso al límite, a la vez que hace explícitos mediante el lenguaje los procesos mentales que efectúa para obtener conclusiones. Según ESTEBAN ([13], pág. 123) “El poder dotar la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella de una componente visual, y el hecho intrínseco de ser geométrico fue lo que permitió extender el modelo de van Hiele al campo del análisis matemático, en particular, al concepto de aproximación local, al llevarlo fuera del ámbito de la geometría elemental.” Esto facilita detectar los descriptores para los distintos niveles de razonamiento propuestos por el modelo.

Los descriptores que debe superar un alumno para progresar del nivel 2 al nivel 3 entorno a esta manifestación del concepto, fueron obtenidos por ESTEBAN ([13], pág. 105) y se enuncian de la siguiente manera:

- El alumno no dará, en general, respuesta a las situaciones patológicas, es decir, aquellas en las que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación. Por ejemplo, para la recta y para los ángulos (valor absoluto). En este nivel, el mecanismo del haz de secantes no se tiene como un mecanismo para encontrar la recta tangente para todas aquellas curvas en las cuales se puede aplicar, presentándose desconcierto en las situaciones patológicas. No define la tangente a una curva en un punto a partir del haz de secantes y la capacidad de deducción de propiedades no se tiene aún desarrollada. Estas son diferencias que marcan la separación entre los niveles 2 y 3 de razonamiento.
- Un alumno no progresará desde el nivel 2 al nivel 3 mientras mantenga dualidades entre el concepto imagen (la progresión de las secantes que pasan por un punto A de la curva y por otros puntos situados sobre la curva cada vez más cercanos a A) y el concepto definición (reconocer la tangente como el límite del haz de secantes, es un proceso infinito). El nivel de razonamiento que permite la comprensión de los conceptos

avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre concepto imagen y concepto definición. La plena integración entre los conceptos intuitivos estáticos (tangente a una circunferencia) con los dinámicos (aproximación infinita mediante el haz de secantes) caracteriza el acceso al nivel 3.

A continuación se presenta el mecanismo seleccionado para explorar el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente, y que de acuerdo con los descriptores presentados, sirve como base para crear las experiencias de aprendizaje para cada una de las fases que ayudan a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

### 5. Manejo del mecanismo “haz de secantes” y su relación con el modelo de van Hiele

El mecanismo haz de secantes permite explorar el concepto de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. A partir de él, ESTEBAN ([13]) caracterizó los niveles de razonamiento 0, I, II y III del modelo de van Hiele con relación al concepto objeto de estudio, encontrando los descriptores para cada uno de ellos y permitiendo a partir de su implementación clasificar a un grupo de alumnos en un determinado nivel de razonamiento.

Dicho mecanismo puede definirse como “las rectas que pasan por  $A$  y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a  $A$ ”. Esto permite definir la tangente en  $A$  como “el límite de las secantes  $AM$  cuando el punto  $M$  tiende a  $A$  a lo largo de la curva”, tal como se ilustra en la Figura 1 (pág. 83).

La construcción del mecanismo es laboriosa puesto que requiere trazar rectas bien sea con regla o con la ayuda de un programa gráfico que permita hacerlo rápidamente. De otro lado, desde el comienzo se recalca la localidad (se hace sobre un punto de la curva), hecho fundamental en el concepto de tangente. Según ESTEBAN ([13], pág. 67) “este mecanismo permite explorar el concepto imagen que los alumnos tienen de la tangente a una curva en un punto y pone en crisis a los alumnos que no razonan en un nivel elevado, el concepto imagen de tangente como recta que toca a la curva en un punto (caso de la circunferencia), o que la tangente no puede cortar a la curva (en algunos casos especiales), permitiéndoles ver que la tangente debe cumplir una propiedad adicional que depende de la propia curva y del paso al límite intrínseco en este proceso”. Así mismo, permite a los alumnos, realizar procesos de formalización<sup>\*\*\*</sup> verbal, es decir, permite explorar el razonamiento en niveles avanzados (nivel 3 y 4 del modelo educativo de van Hiele).

---

<sup>\*\*\*</sup> Es importante aclarar, que este proceso de formalización no se refiere a dar una definición formal ( $\epsilon-\delta$ ) del concepto objeto de estudio, sino a que los alumnos expresen verbalmente definiciones matemáticamente válidas para dicho concepto.

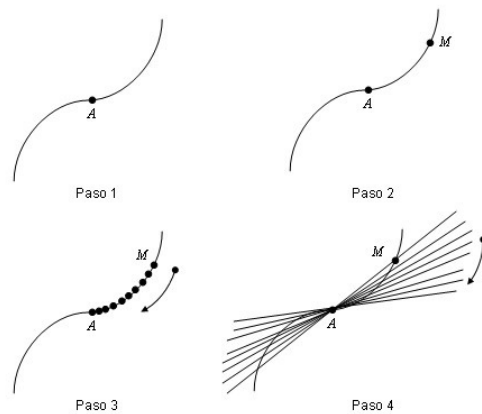


FIGURA 1. Proceso de construcción del mecanismo del haz de secantes en cuatro (4) pasos. Paso 1, marque un punto  $A$  sobre la curva. Paso 2, marque un punto  $M$  sobre la curva a la izquierda o derecha de  $A$ . Paso 3, marque puntos sobre la curva a partir de  $M$  cada vez más próximos a  $A$ . Paso 4, trace las rectas secantes que pasen siempre por  $A$  y por los puntos marcados cada vez más próximos a  $A$ .

### 6. Pautas para la elaboración de un módulo de instrucción con base en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele

Las fases de aprendizaje buscan que, en el transcurso de su aplicación, el alumno reelabore el lenguaje empleado con relación al concepto estudiado para que pueda progresar del nivel de razonamiento en que se encuentra al inmediatamente superior. Las fases de aprendizaje del modelo se definen de la siguiente manera ([6], pág. 22):

- Fase 1. Información. Se explora mediante tests, entrevistas, gráficas o exposiciones realizadas por los alumnos. Con ello se busca que expliciten la información que tienen en su estructura cognitiva acerca del concepto objeto de estudio.
- Fase 2. Orientación dirigida. El profesor propone actividades en las que el concepto se relacione con situaciones de la vida diaria y anima a los alumnos para que encuentren sus propias relaciones, las compartan y discutan con sus compañeros.
- Fase 3. Explicitación. Los alumnos aplican el concepto para resolver problemas que correspondan a situaciones reales en diferentes contextos.
- Fase 4. Orientación libre. Se completa la red de relaciones que se comenzó a formar en las fases anteriores y se adquiere el lenguaje propio

del siguiente nivel de razonamiento. Partiendo del concepto estudiado y de sus propios intereses los alumnos deben formular y solucionar sus propios problemas.

- Fase 5. Integración. El concepto estudiado se reorganiza y adquiere un nuevo significado. Se hace explícita la nueva red conceptual y el conjunto de habilidades de razonamiento adquiridas.

Tomando como base estas definiciones y los diferentes trabajos enmarcados dentro del modelo de van Hiele (ver [11], [13], [8], [2]) en lo relativo a conceptos del análisis matemático, se presentan las pautas teóricas que se tuvieron en cuenta para el diseño de experiencias de aprendizaje en cada una de las fases de aprendizaje que conforman el módulo de instrucción con relación al concepto de aproximación local. En particular, estas pautas han sido implementadas en la manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

- **Fase 1, Información:**
  - Aplicación de una técnica que permita detectar la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva frente a la manifestación del concepto de recta tangente a una curva en un punto dado sobre ella.
  - Puesta en común del lenguaje que los alumnos deben tener para estar ubicados en este nivel.
  - Manejo del mecanismo seleccionado.
  - Análisis de los datos obtenidos en esta fase y diseño de las experiencias de aprendizaje para la siguiente fase.
- **Fase 2, Orientación dirigida:**
  - Análisis de distintas situaciones que con lleven por parte del alumno a la interiorización de la noción de aproximación.
  - Apropiación del infinito potencial con el cual se abordará el estudio de la manifestación del concepto de aproximación local seleccionado.
  - Integración y diferenciación de las situaciones desarrolladas con el manejo del mecanismo.
  - Verificación del lenguaje adquirido y el significado dado a las nuevas relaciones válidas que realicen los alumnos.
- **Fase 3, Explicitación:**
  - Recapitulación del proceso realizado, mediante la implementación de actividades que conlleven a la aplicación del concepto de tangente. Dichas actividades pueden ser orientadas a través de asistentes matemáticos, como el Derive®, Matlab®, entre otros, o de tests de razonamiento.
  - Revisión del lenguaje adquirido, como base del nuevo nivel de razonamiento. Debe hacerse énfasis en la forma de expresarse de



los alumnos y las relaciones y propiedades establecidas o creadas durante el transcurso del trabajo.

- Análisis del lenguaje y de las relaciones presentadas por los alumnos. Esta etapa del proceso debe realizarse en forma individual y grupal, dando mayor importancia a los conceptos básicos del trabajo. Además, se deben realizar actividades que inviten al descubrimiento de nuevas situaciones que lleven a la implementación del mecanismo para determinar si existe o no la tangente en un punto de una curva o en una situación práctica.

▪ **Fase 4, Orientación libre:**

- Planteamiento y análisis de problemas cotidianos en diferentes contextos que con lleven a la implementación del mecanismo y argumentar cuando la solución existe y cuando no.
- Revisión y evaluación general del proceso haciendo énfasis en el lenguaje adquirido y el significado que el alumno le da al mismo, las nuevas relaciones válidas construidas y la aplicación del mecanismo en situaciones favorables o desfavorables. Como es una fase de evaluación del proceso, si no es superado a satisfacción debe retornar a la fase 2 y revisar cuidadosamente las actividades propuestas en esta y en las fases 3 y 4.

▪ **Fase 5, Integración:**

- Integración de las actividades presentadas anteriormente con otros campos del saber que se hayan estudiado previamente.
- Planteamiento por parte de los alumnos de situaciones amplias, aplicadas a otras áreas del saber, en donde la manifestación del concepto estudiado tenga relevancia en la solución de las mismas.
- Verificación de la incorporación del lenguaje propio del nuevo nivel.

A continuación se ilustran las experiencias de aprendizaje correspondientes a la fase de información y de orientación dirigida a partir de las pautas propuestas en esta sección. Esto se debe, a que en las fases seleccionadas, se hace mayor énfasis en la aplicación del mecanismo y muestran los cambios iniciales más relevantes en los procesos de razonamiento en los cuales está involucrado el paso al límite.

**7. Aplicación de las pautas propuestas, para la fases de información y orientación dirigida**

A partir de las pautas presentadas en la sección 6 (pág. 83), se diseñaron las experiencias de aprendizaje adaptadas a las características propias de los alumnos, buscando que un alumno ubicado en el nivel 2 progrese al nivel 3 de razonamiento, frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

Es importante resaltar que las experiencias de aprendizaje se aplicaron a 39 alumnos de un total de 154 del primer semestre de universidad. Dichos alumnos fueron clasificados en el nivel 2 de razonamiento con la aplicación del test “Curvas y tangentes”, diseñado por ESTEBAN ([13]). A continuación se describen en forma detallada, las experiencias de aprendizaje diseñadas para la fase de información con sus respectivos objetivos.

**7.1. Fase 1; Información.** Para esta fase se diseñaron las siguientes actividades:

**Actividad 1:** Elaborar un mapa conceptual con los conceptos geométricos de punto, curva, recta y tangente.

El objetivo de esta actividad es la de indagar por la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado.

Con esta actividad se da cumplimiento al objetivo propuesto. Según ESTEBAN “los mapas conceptuales, permiten al alumno poner de manifiesto las relaciones significativas entre los conceptos propuestos (punto, curva, recta y tangente), la forma como comprenden estos y qué relaciones relevantes les faltan para completar los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel” ([15], pág. 154).

Cabe resaltar que antes de comenzar con la aplicación de las experiencias de aprendizaje, el grupo de alumnos fue instruido en el manejo de la técnica de los mapas conceptuales. Con ello se buscaba evitar “errores operativos” en la construcción de los mismos.

La Figura 2 (pág. 87), presenta un mapa conceptual representativo \*\*\*\* del grupo realizado durante la intervención pedagógica.

**Actividad 2:** Aplicación del test “Exploración de la idea de punto”.

El test, fue diseñado por ESTEBAN ([14]) y se aplicó con el objetivo de detectar el lenguaje que emplean los alumnos en este nivel, pues este tiene un papel crucial dentro del proceso de formación de conceptos y en el aprendizaje significativo de los mismos.

Con esta actividad se logra que los alumnos reconozcan los objetos básicos en el sentido visual o geométrico, pero con sus propiedades matemáticas elementales, por ejemplo: un punto no tiene dimensiones y no tiene una única representación; una recta no tiene “grosor”, pero si tiene “longitud”; las curvas están formadas por puntos, algunas son cerradas, otras no tienen principio ni fin, como las rectas; las rectas son una clase especial de curvas de las que solo es posible dibujar un trozo.

---

\*\*\*\*Entiéndase por mapa representativo aquel, que construido según el tipo de actividad, grupal o individual, muestra el esquema presentado por la mayoría de los alumnos intervenidos. Para la selección se utilizó la tabla de evaluación dada por NOVAK ([10], pág. 167)

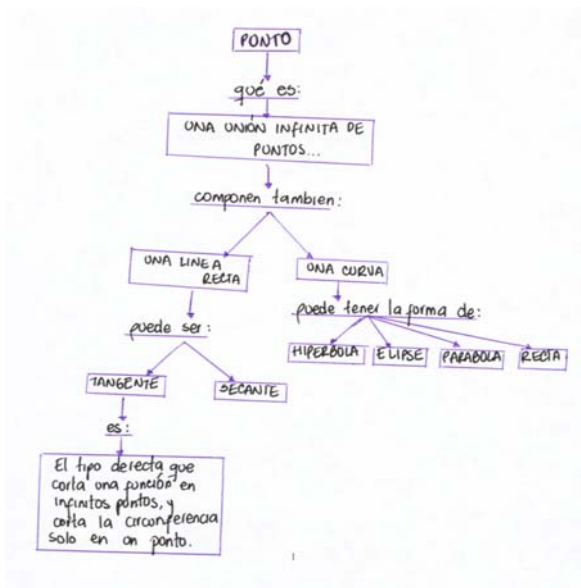


FIGURA 2. Mapa representativo en la Actividad 1, realizada en la fase de información y clasificado como “debe ser re-formulado”. Dicha expresión, puede entenderse como; debe ser construido a partir de experiencias de aprendizaje presentadas por el docente.

**Actividades 3, 4, 5 y 6:** Manejo y apropiación del mecanismo seleccionado

Las actividades propuestas en esta etapa del proceso tienen como finalidad que ninguno de los alumnos presente dualidades en el manejo del mecanismo, en especial en situaciones patológicas como las que se ilustran en la Figura 3 (pág. 87), las cuales presentan mayor dificultad en los puntos indicados.

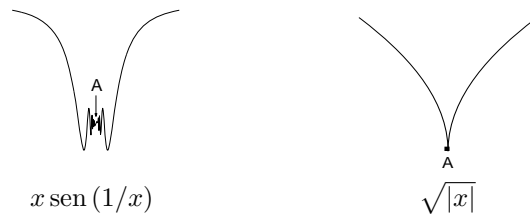


FIGURA 3. Modelos de curvas patológicas propuestas a los alumnos durante la intervención pedagógica.

De las actividades descritas se obtiene un acercamiento a su estructura cognitiva del alumno con respecto al concepto de recta tangente. Además se logra

establecer un lenguaje común frente al concepto objeto de estudio. Se implementó el mecanismo seleccionado en diversas situaciones que le generaron conflictos cognitivos y se observó su comportamiento en su proceso de resolución.

Con la aplicación y discusión de la Actividad 6 (“recapitulación”), el grupo de alumnos, al mostrarle o pedirle que realicen el proceso del haz de secantes sobre un punto fijo  $A$  de una curva y por puntos situados sobre la curva, cada vez más cercanos a  $A$ , reconoce visualmente que el haz de secantes se estabiliza en una línea recta. Para ello utilizan expresiones verbales tales como “las secantes se van juntando cada vez más”, “las secantes no se pueden distinguir, cuando se acerca el punto móvil al punto fijo  $A$ ”, “las líneas se unen formando una nueva línea recta que se estabiliza” y algunos de ellos empiezan a relacionar la estabilización del proceso del haz de secantes con la recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, entendiendo la tangente como el final de un proceso de aproximación local.

Algunas de las observaciones realizadas por el grupo de alumnos, se pueden ver en las Figuras 4 (pág. 88), 5 (pág. 89) y 6 (pág. 89).

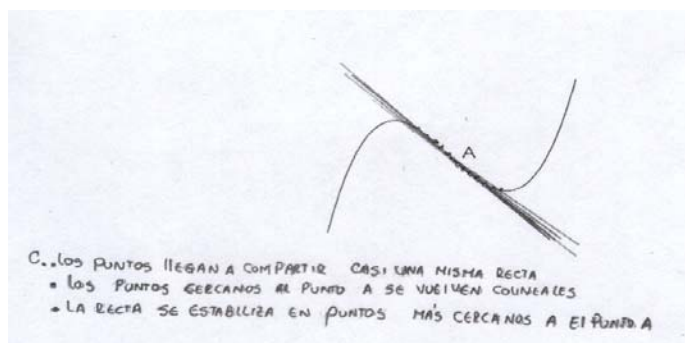


FIGURA 4. Observación que realiza un alumno, al pedirle que describa lo que observa al trazar el haz de secantes, a uno y otro lado del punto dado. Expresión técnica utilizada: *Estabilización de las rectas*.

Del análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las actividades presentadas en esta fase, se puede concluir que la técnica de los mapas conceptuales permitió detectar y analizar la información que los alumnos poseen en su estructura cognitiva frente al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella. Además, se logró establecer un punto de partida con respecto al lenguaje empleado por los alumnos en este nivel. Finalmente, los alumnos dan muestras del manejo correcto del mecanismo del haz de secantes en curvas suaves, presentando dificultades en el manejo del mismo en curvas patológicas.

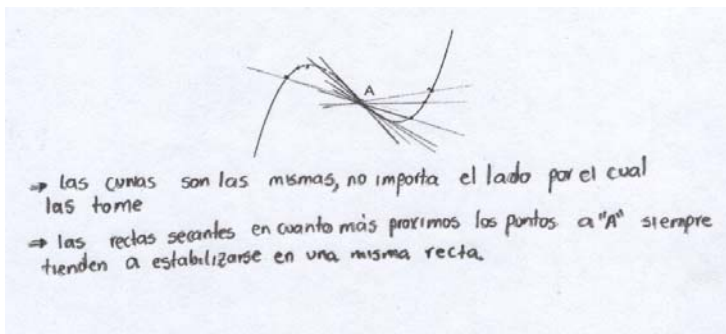


FIGURA 5. Observación que realiza un alumno al pedirle que describa lo que observa al trazar el haz de secantes, a uno y otro lado del punto dado. Expresión técnica: *rectas secantes en cuanto más próximos los puntos a "A" siempre tienden a estabilizarse.*

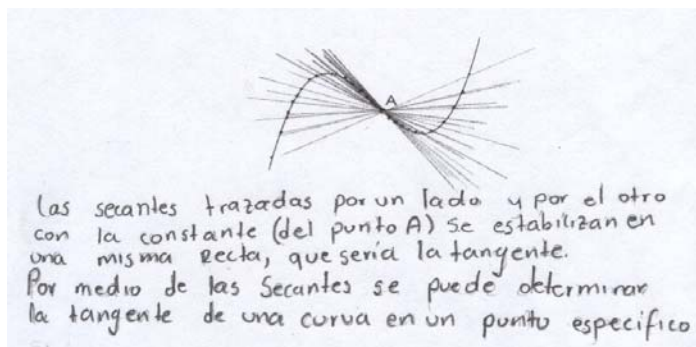


FIGURA 6. Observación que realiza un alumno al pedirle que describa lo que observa al trazar el haz de secantes, a uno y otro lado del punto dado. Expresión técnica: *Las secantes trazadas por uno y otro lado del punto A, se estabilizan en la misma recta, que sería la tangente.*

**7.2. Fase 2, Orientación dirigida.** Durante el análisis de la información obtenida en la fase anterior se observó que los alumnos aplican correctamente el mecanismo del haz de secantes en curvas suaves, presentando dificultades en el manejo del mismo en curvas patológicas. Esto crea la necesidad de aplicar el mecanismo a diferentes situaciones físicas y geométricas que conlleven a la apropiación del concepto de infinito potencial, a la interiorización de la noción de aproximación y al establecimiento de su relación con el mecanismo seleccionado.

Es importante resaltar que al inicio del proceso, la concepción de los alumnos acerca del infinito potencial estaba asociada a la ausencia de límites o de fronteras, a la falta de conclusión o de fin de un proceso que se repite o progresa indefinidamente. La noción de infinito potencial estaba determinada por lo que no tiene fin, lo que siempre puede continuar pero sin alcanzar un límite o llegar a estabilizarse.

Para el estudio del cálculo se requiere que los alumnos comprendan por lo menos de manera intuitiva el concepto de infinito potencial, pues éste es la base del concepto de aproximación local en sus diversas manifestaciones. A partir de esto y de la información obtenida durante el análisis de las actividades presentadas en la fase 1, se diseñaron experiencias de aprendizaje para la fase 2 buscando que los alumnos descubrieran y comprendieran los conceptos, las relaciones y propiedades de los elementos con los que se iba a trabajar durante la intervención pedagógica.

Con las actividades propuestas para esta fase de aprendizaje se logra que los alumnos interioricen la noción de aproximación y se apropien de manera intuitiva del concepto de infinito potencial. Esto se evidencia con algunas de las respuestas presentadas por los alumnos. Por ejemplo al abordar la Actividad 1 que plantea al alumno: *“Dividir un trozo de cuerda dado por la mitad, que luego tome uno de los dos trozos resultantes y lo divida por la mitad nuevamente, y que continúe con este proceso hasta donde considere que se puede realizar”*, los alumnos hacen afirmaciones del siguiente tipo: *“las operaciones físicas para realizar el proceso tienen limitaciones, pero las operaciones mentales no”* y *“cuando se continúa con un proceso de corte, sobre el trozo de cuerda, siempre habrá, aunque muy pequeño, un trozo de cuerda que cortar”*, estas afirmaciones son características de la construcción del infinito potencial y del concepto de aproximación local abordado y son ilustradas en las Figuras 7 (pág. 91), 8 (pág. 91) y 9 (pág. 91), así mismo, se observa claramente la interiorización del concepto, por la mayor parte del grupo de alumnos al desarrollar la Actividad 4, tal como se muestra en la Figura 10 (pág. 92).

A partir de lo anterior se puede verificar el hecho de que los alumnos realmente interiorizaron el proceso y no estuvieron generando repeticiones escritas de lo solicitado por los investigadores. Para comprobarlo, se solicitó al grupo de alumnos elaborar un nuevo mapa conceptual, ya que, de acuerdo con AUSUBEL, *“La adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una interacción de la nueva información con ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una asimilación de significados nuevos y antiguos para formar una estructura altamente diferenciada”* ([3], pág. 71).

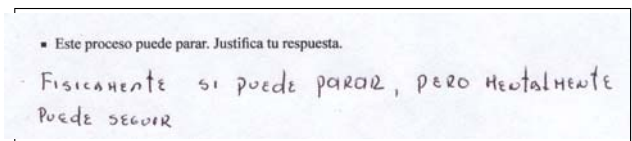


FIGURA 7. Con esta afirmación el alumno marca la diferencia entre realizar un proceso mental y un proceso físico.

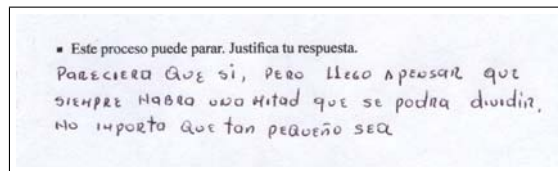


FIGURA 8. Con esta afirmación el alumno acepta, aunque de manera intuitiva el concepto de división como un proceso infinito.

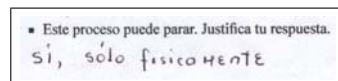


FIGURA 9. Al igual que en la Figura 7, el alumno marca una diferencia entre los procesos físicos y los mentales.

El mapa conceptual pedido en la Actividad 7, revela como los alumnos logran reformular y ampliar su red de relaciones válidas frente al concepto objeto de estudio.

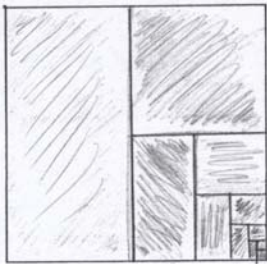
La Figura 11 (pág. 93), muestra un mapa conceptual representativo del grupo de alumnos más completo que el presentado en la fase anterior. En éste los alumnos conservan los conceptos básicos y sus propiedades y adicionalmente relacionan el mecanismo del haz de secantes como una propiedad adicional para la definición del concepto de recta tangente, siendo ésta una condición necesaria para progresar del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento del modelo educativo de van Hiele.

Así mismo con el análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las actividades presentadas se puede concluir que las distintas situaciones empleadas en las experiencias de aprendizaje llevaron a la interiorización de la noción de aproximación local por parte del alumno, logrando la apropiación del concepto de infinito potencial. Además, los mapas conceptuales permitieron verificar el lenguaje adquirido por ellos y la manera como lo emplean.

### 7.3. Alcances obtenidos con la aplicación de las fases de aprendizaje.

Teniendo en cuenta las observaciones realizadas durante la aplicación de las

• Divide el cuadrado dado en dos partes iguales, sombrea una de ellas. A la parte del cuadrado que quedo sin sombreado divídela nuevamente en dos partes iguales y de nuevo sombrea una de ellas. Continúa este proceso hasta cuando consideres que se puede realizar con los instrumentos utilizados.



**Preguntas:**

- El proceso realizado, ¿puede terminar?  
 No, queda un espacio diminuto que no se llena con sombra
- ¿Qué pasa con la región sombreada?  
 Aumenta hasta casi cubrir toda el área del Cuadrado
- Imaginate un cuadrado ¿Si empezaras a realizar este proceso mentalmente, consideras que este podría terminar? ¿Qué pasaría con la región sombreada?  
 No, imaginando lo puedo dividir infinita/ ese espacio pequeño que me queda

FIGURA 10. En esta actividad el alumno muestra avances en su proceso de razonamiento frente al infinito potencial, lo relaciona con los procesos que terminan o tienen fin.

experiencias de aprendizaje, y los resultados obtenidos con su aplicación, se observa que los alumnos van adquiriendo el lenguaje propio del nuevo nivel de razonamiento frente al concepto objeto de estudio.

Así mismo, el diseño de módulos de instrucción para conceptos del análisis matemático permite planificar desarrollar y aplicar experiencias de aprendizaje para que el alumno pueda progresar a través de los niveles de razonamiento del modelo educativo de van Hiele. Además, se logra integrar las actividades propuestas en cada una de las fases y se dota a los alumnos de herramientas que les permiten potenciar la utilización del lenguaje y su razonamiento con respecto a los conceptos estudiados.

## 8. Conclusiones

Con respecto a la aplicación del módulo de instrucción y a las cinco (5) fases de aprendizaje estudiadas se destacan las siguientes conclusiones:



Actividad 7: Mapa Conceptual

- Elabora un mapa conceptual con los términos: Punto, Curva, Recta, Tangente, Aproximación y Haz de secantes.

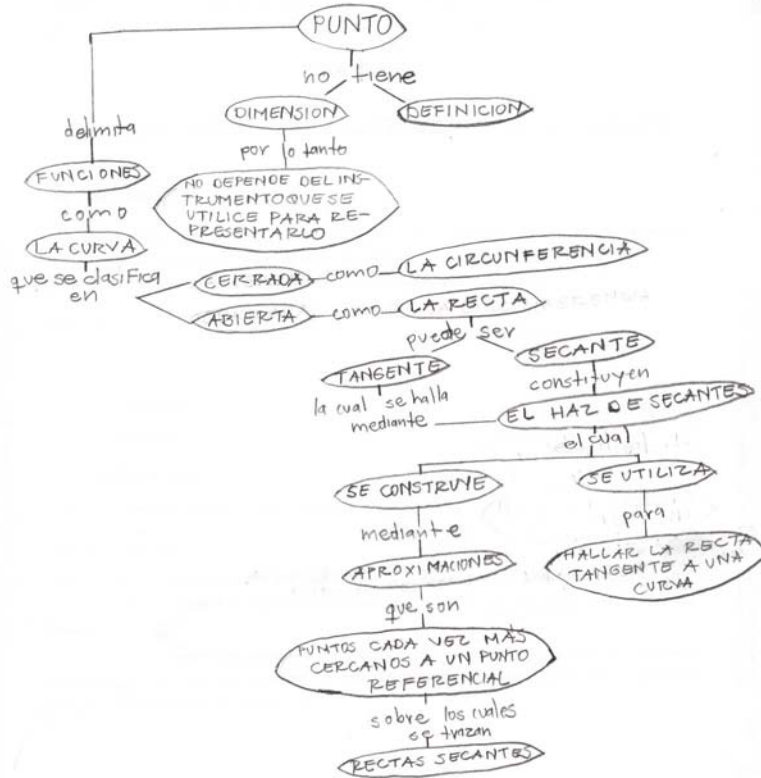


FIGURA 11. Mapa conceptual presentado en la Actividad final de la fase 2, donde se muestra un avance significativo en el lenguaje empleado por los alumnos.

De la aplicación de las actividades diseñadas para las fases 1 y 2 se resalta la adquisición del lenguaje necesario para referirse a los conceptos de punto, recta, curva e infinito potencial necesarios para que progresen en su nivel de razonamiento.

Cuando se les pide a los alumnos trazar secantes que pasen por el punto dado y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él, y se da el caso de que existe una recta de estabilización expresan que: “La recta tangente es el límite del haz de secantes”. Esta respuesta y otras equivalentes, manifiestan que hacen un uso riguroso del lenguaje y entienden que la tangente a una curva

en un punto, cuando existe, es el final de un proceso de aproximación infinito. Además, están manifestando que su razonamiento es avanzado respecto del concepto de tangente a una circunferencia en un punto ya que han hecho una cadena de elaboraciones mentales que les permite percibir este concepto como un proceso dinámico (paso al límite).

En este mismo sentido, el grupo de alumnos adquirió el lenguaje propio del nuevo nivel de razonamiento, usó correctamente el mecanismo del haz de secantes no solo en situaciones matemáticas, sino en situaciones presentadas en otros contextos, así mismo, lo utiliza para determinar si una recta es tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella e identifica claramente en qué curvas lo pueden aplicar, en cuales otras no y por qué.

Al finalizar la aplicación del módulo de instrucción se implementó nuevamente el test “Curvas y tangentes” y al procesar las respuestas ofrecidas por los alumnos, se encontró que 38 de los 39 alumnos expuestos a la intervención pedagógica progresaron al nivel 3 de razonamiento.

**Agradecimientos:** Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”, COLCIENCIAS 115-11-12704, y en el programa de Maestría en Educación con énfasis en docencia de las matemáticas, de la Universidad de Antioquia, en convenio con la Universidad Eafit.

### Referencias

- [1] A. F. DE LA TORRE, *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, (2000).
- [2] C. M. JARAMILLO, *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, (2000).
- [3] D. AUSUBEL & ET AL, *Psicología educativa*. Trillas, México, (1991).
- [4] D. FUYS & ET AL, *The van Hiele Model of Thinking Geometry among Adolescents*. National Council of Teachers of Mathematics, (1995).
- [5] D. TALL & S. VINNER, *Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Educational Studies in Mathematics, **12** (1981),151-169.
- [6] E. D. VASCO & J. A. BEDOYA, *Diseño de módulos de instrucción para el concepto de aproximación local en el marco de las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele*. Trabajo de investigación de Maestría, Universidad de Antioquia, (2005).
- [7] J. GUTIÉRREZ, *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele*, Rev. Teoría y práctica en educación matemática, **4** (1990), 295–384.
- [8] J. L. LLORENS, *Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, (1994).
- [9] M. A. NAVARRO, *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*, Universidad de Sevilla, Sevilla, España, (2002).
- [10] J. NOVAK & ET AL, *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca, México, (1999).
- [11] P. CAMPILLO, *La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, (1999).

- [12] P. M. VAN HIELE, *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. Developmental Psychology Series. Academic Press, Inc., Orlando, (1986).
- [13] P. V. ESTEBAN, *Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, (2000).
- [14] P. V. ESTEBAN, *La visualización en el cálculo diferencial*. Reporte de investigación, Universidad Eafit, (2002).
- [15] P. V. ESTEBAN, E. D. VASCO & J. A. BEDOYA, *Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele*. Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First International Conference on Concept Mapping, **2**(2004).151–154.

(Recibido en octubre de 2006. Aceptado para publicación en julio de 2007)

JORGE ALBERTO BEDOYA BELTRÁN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
 UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN, MEDELLÍN, COLOMBIA  
 PEDRO VICENTE ESTEBAN DUARTE, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
 UNIVERSIDAD EAFIT, MEDELLÍN, COLOMBIA  
 EDISON DARÍO VASCO AGUDELO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
 UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA, MEDELLÍN, COLOMBIA  
*e-mail: evasco24@gmail.com*