Lecturas Matemáticas
Volumen **29** *(2008), páginas 51–70*
ISSN 0120–1980

Las supercónicas. Análisis preliminares y concepción de una ingeniería didáctica

Mercedes Anido, Roberto López & Héctor E. Rubio Scola
Universidad Nacional de Rosario, Argentina

Abstract. In this paper we seek to lay the theoretical grounds for and describe the epistemological and pedagogical analyses that constitute the preliminary phase of a Didactic Engineering process designed around a teaching subject pertaining to the Basic Mathematics training at our Univer-sity, namely the study of curve families, conceived and studied with the help of computational representation. In the analysis, the study of the mathematical value of developing visual thought is complemented with the consideration of the learning situations that, in the framework of Brousseau's theory, arise when the computer is used as a cognitive tool. The curve families chosen, superconicals, are especially interesting to stimulate the student's free creative play, the exploration of potential properties and the strengthening of their knowledge of conicals (circunference, elypse, parabola and hyperbola).

Key words and phrases. Didactic engineering, visual thought, didactic situation, cognitive tool, superconics.

2000 AMS Mathematics Subject Classification. 97C90, 97D50.

Resumen. En este trabajo se busca fundamentar y describir los análisis epistemológicos y didácticos que integran la fase preliminar de una Ingeniería Didáctica diseñada alrededor de un tema posible de ser incorporado al curriculum de la matemática Básica de la Universidad: el estudio de familias de curvas, concebidas y estudiadas a partir de las posibilidades de la representación computacional. En el análisis, se complementa el estudio sobre el valor matemático del desarrollo de un pensamiento visual con la consideración de las situaciones de aprendizaje que, en el marco de la teoría de Brousseau, se generan al utilizar el computador como una herramienta cognitiva. Las familias de curvas elegidas, las super cónicas son especialmente interesantes para estimular el libre juego creativo del alumno, la exploración de potenciales propiedades y el afianzamiento del conocimiento de las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola).

1. Introducción

Uno de los desafíos más importantes que debe ser encarado por los docentes de matemática en carreras donde su inclusión curricular tiene como objetivo las aplicaciones en distintas carreras, es la enseñanza de esa disciplina a alumnos que necesitan ser formados para hacer uso de la misma como instrumento de modelización y resolución de situaciones problemáticas en diferentes áreas.

En este trabajo se busca mostrar parte de "los análisis preliminares" y la "concepción", que corresponderían a las primera de las fases de una ingeniería didáctica construida en un tema correspondiente a una de las ramas de la matemática más apta para modelización: la geometría analítica.

ARTIGUE (1995) propone las siguientes fases para la ejecución de un trabajo de ingeniería didáctica:

- Análisis preliminar.
- Concepción y análisis *a priori*.
- Desarrollo y análisis *a posteriori*.
- Transferencia.

Los análisis preliminares comprenden, en su teoría:

- Conocimientos didácticos previamente adquiridos.
- Análisis epistemológico.
- Enseñanza tradicional en el tema.
- Concepciones de los estudiantes.
- Restricciones: cuadros conceptuales, competencias, herramientas.

Todos estos factores influyen, en el análisis previo del diseño anticipativo de una "unidad de enseñanza" (WITTMANN, 1995) del curriculum de la matemática básica. En el tema que proponemos: las supercónicas, habría que enfatizar, especialmente en el análisis, la interrelación entre los "cuadros" correspondientes a las distintas áreas de conocimiento que entrarían en juego (geometría, trigonometría, análisis matemático) para la determinación de la ventana conceptual (DOUADY *et al.*,1995) que enmarca el tema elegido y el rol que se le puede dar a una herramienta computacional en su aprendizaje.

Enfocaremos, en primer lugar, el análisis epistemológico vinculado a la enseñanza tradicional en el tema.

Estamos viviendo en una sociedad donde los aspectos visuales son, más que nunca, dominantes. Es por eso que una formación universitaria adecuada, sobre todo en carreras que hacen de la matemática una materia instrumental, debería incluir la solución de problemas articulados entre sí, exploraciones abiertas a la discusión, construcciones de modelos concretos en dos y tres dimensiones.

El estudio de la geometría debería integrar en sus contenidos curriculares (Villani, 1996) una metodología que contribuya a:

- Favorecer el desarrollo de la intuición espacial.
- Reconstruir mentalmente la imagen de un objeto tridimensional a partir de su diseño.
- Usar según sea la circunstancia lenguajes de distintos tipos: verbal, gráfico, algebraico, simbólico.
- Estimular la capacidad de traducción de un lenguaje a otro.
- Clasificar objetos según uno o más atributos.
- Habituar al razonamiento lógico sobre una parte circunscripta de una teoría.
- Dar un ejemplo significativo de un sistema hipotético deductivo.
- Razonar (incluso fuera del ámbito geométrico) en el modo hipotético deductivo en vista a operar con ciertos conceptos o tomar decisiones racionales en la vida cotidiana, social y profesional sobre la base de datos de los hechos disponibles.
- Entender modelizaciones geométricas de fácil interpretación que permitan resolver problemas de distintas áreas.

En la búsqueda de estos aspectos formativos de la enseñanza de la geometría, en el nivel inicial universitario, hemos consignado algunos interrogantes de naturaleza epistemológica sobre esta rama de la matemática que, en una primera instancia, se vincula a imágenes visuales. Es por esto, que enfocamos especialmente al valor matemático del conocimiento geométrico obtenido por visualización. Sintetizaremos, luego, en la aproximación a respuestas, algunas posiciones de la epistemología histórica (Anido & Rubio Scola, 2001).

2. **Algunos interrogantes fundamentales**

¿Qué se ha entiende por geometría en el momento actual?

La geometría ha crecido rápidamente desde su tradicional lugar de intentar dar una descripción matemática de los variados aspectos del espacio físico. Ahora incluye disciplinas como geometría discreta y geometría combinatoria, geometría de superficies, geometría diferencial, geometría fractal, geometría convexa, teoría de grafos, geometría computacional, para nombrar sólo algunas. Han pasado como consecuencia, a un primer plano algunas ramas dejadas anteriormente de lado, como por ejemplo la geometría descriptiva, cuyas coordenadas homogéneas son base de programas computacionales de representación tridimensional. Este rápido crecimiento ha sido acompañado por amplias aplicaciones en robótica, procesamiento de imágenes y computación gráfica entre otras. Estos enormes desarrollos crean, precisamente, desafíos en los educadores matemáticos para potenciar, en el alumno, la capacidad de integración de la geometría a la matemática básica del ciclo universitario y de allí a las aplicaciones a otras áreas emergentes. Una importante consideración es el uso de software para facilitar en la visualización y las exploraciones geométricas.

¿Qué se ha entendido por geometría en la epistemología histórica?

¿Cuál es el rol de la geometría en la enseñanza de la matemática básica de la universidad?

¿Por qué se enseña?

¿Qué rol se atribuye a la definición?

¿Es necesaria una memorización recitada o basta en geometría una conceptualización implícita?

¿Qué rol formativo tiene la memorización y reproducción de una demostración?

¿Una enseñanza formativa de la geometría debe priorizar los tiempos dedicados a procesos demostrativos?

¿La formación en un pensamiento riguroso exige demostrar como teorema toda propiedad toda postulada?

¿Qué rol se atribuye a la conjetura?

¿A la argumentación?

¿Qué contenidos geométricos se deberían estudiar en el momento actual?

¿Con qué grado de rigor demostrativo?

¿Cuál es la validez matemática del conocimiento geométrico obtenido por visualización y si es compatible con la formación en un pensamiento riguroso?

¿Es prioritaria la exposición "formal" de la matemática?

¿Son inútiles o perjudiciales, los apoyos en la intuición visual de los conceptos y procesos del pensamiento matemático, fundamentalmente formativo, del pensamiento geométrico? ¿Qué aspectos se deben priorizar en la enseñanza?

¿El aspecto sintético?

¿El aspecto analítico?

¿Utilizar como base y herramienta unificadora el álgebra vectorial?

¿La teoría debe preceder a la práctica ó surgir partir de esta?

¿Es importante presentar explícitamente todas las hipótesis al comienzo de una demostración o se pueden ir explicitando a medida que se necesite?

¿Qué problemas seleccionar para que un estudiante capte la belleza y armonía de la geometría juntamente con su utilidad?

¿Cómo evitar que el formalismo inhiba la intuición geométrica?

¿Y cuál es el valor de esta última?

¿Qué auxilios didácticos y tecnológicos utilizar?

¿Y con qué finalidad?

¿Los distintos tipos de *software* que se usan para el trazado de curvas o la representación tridimensional favorecen el proceso de conceptualización y sistematización del conocimiento geométrico?

¿Hasta que punto la "evidencia" de la existencia de una propiedad de una figura geométrica, que resista todas las posibilidades de deformación visualizables en pantalla, nos exime de la necesidad de demostración de dicha propiedad? (Guzmán, 1996)

¿Cómo hacer que se establezcan sistemáticamente lazos entre la teoría general abstracta y su contrapartida intuitiva y visual de tal manera que las herramientas informáticas sirvan para un conocimiento significativo de la geometría?

¿Cómo introducir y aprovechar la herramienta computacional sin perder el rol esencialmente formativo de la geometría?

3. Los fundamentos de la geometría y el método axiomático

Por más de 2000 años la geometría euclídea ha representado un rol central en la enseñanza aprendizaje de la matemática, como un modelo privilegiado del espacio físico.

La colección de leyes y elementos geométricos idealizan el espacio de tres dimensiones. La idealización del espacio de tres dimensiones es la noción representacional abstracta que nosotros tenemos de nuestro lugar de vida y en él cada cosa conocida para nosotros está ubicada. Se supone que la comprensión de la geometría ayudará al estudiante a comprender mejor el mundo y a operar más efectivamente en éste. La geometría ha ligado la realidad y la formalización. Históricamente se ha presentado como una teoría axiomática deductiva.

No obstante la reconstitución histórica de la ciencia ha evidenciado que la geometría, antes de alcanzar el grado racional, atravesó un grado empírico, en que las adquisiciones eran fruto de observaciones y experiencias. Muchos pueblos no pasaron del grado empírico. Los griegos sobre todo, promovieron el desarrollo de una geometría racional en la que las proposiciones vienen deducidas como consecuencias de otras aceptadas como axiomas, sin constituir precisamente experiencias.

La axiomatización de una teoría consiste en establecer un grupo de conceptos llamados conceptos primitivos, un grupo de proposiciones relacionadas, llamadas proposiciones y relaciones primitivas. Los conceptos primitivos no se definen explícitamente, únicamente se enuncian y las proposiciones primitivas se aceptan como verdaderas sin demostración. Las proposiciones primitivas deben caracterizar en forma unívoca y completa a los conceptos primitivos. También a las relaciones primitivas que, unidas a la de la lógica, constituirán los recursos operatorios con los cuales deberá edificarse deductivamente toda la disciplina (Toranzos, 1948).

Las proposiciones primitivas suelen llamarse indistintamente axiomas o postulados de la teoría. La caracterización de los conceptos primitivos mediante el sistema de axiomas se dice que constituye una definición implícita de estos conceptos. Se llama demostración o raciocinio matemático a la combinación o enlace de dos o más proposiciones para obtener nuevas proposiciones y relaciones.

El sistema de axiomas de una disciplina no es único. Pueden darse diversos sistemas equivalentes e igualmente aceptables; una misma proposición puede ser axioma en un sistema y teorema en otro. La condición para que dos sistemas de axiomas sirvan de fundamento a la misma disciplina es que los axiomas de uno de los sistemas, no comunes con el otro, sean proposiciones deductibles en éste, y viceversa.

Teóricamente son posibles tantas disciplinas matemáticas como sistemas de postulados. Desde el punto de vista lógico, estos sólo deben regirse por las condiciones de compatibilidad, independencia y completitud.

En la matemática el método axiomático fue iniciado por Euclides, quien ya organiza, o pretende organizar, la matemática, partiendo de un sistema de proposiciones fundamentales, los postulados y axiomas, de los cuales deduce lógicamente toda la matemática.

Para Hilbert y su escuela el complejo Lógica–Sistema axiomático, constituye la única fuente en la cual el matemático debe buscar los procedimientos que le permitan elaborar su disciplina. La formalización de la matemática es una característica esencial de ella; suele también expresarse diciendo que la matemática es una ciencia racional, deductiva o exacta (Klimovsky, 1999).

4. **La intuición en la construcción de espacios abstractos**

Frente a estas posiciones, los intuicionistas reclaman para las proposiciones matemáticas un cierto momento que corresponde a la intuición. Esta intuición no debe confundirse con la acepción habitual del término intuición; no se trata aquí, en modo alguno, de algo que sea visible, manifiesto o captado por los sentidos, sino que se refiere a lo que se caracteriza como “inteligible”, como “evidente”.

Debe aclararse que el intuicionismo no pretende que todo lo evidente deba aceptarse en matemáticas, ni que lo que no lo sea deba rechazarse. Por el contrario, el progreso de la matemática consiste en eliminar la intuición de sus razonamientos. Los intuicionistas sólo afirman que los fundamentos de la matemática contienen una serie de proposiciones primarias que provienen de la intuición.

Caben ahora las siguientes preguntas: ¿Cuál es el origen de los axiomas? ¿Son ellos reductibles a principios lógicos, o son arbitrarios, o provienen de la intuición, o son producto de la experiencia? En la metodología de la matemática los axiomas se consideran en su aspecto formal, es decir como proposiciones convencionalmente elegidas y a las que sólo se les exige que cumplan las condiciones anteriormente enunciadas.

F. Enriques (1948) nos dice que cuando una verdad geométrica o mecánica antes de ser verificada por la experiencia viene deducida por la intuición, se tiene la impresión de que su base es más cierta. Distingue el espacio intuitivo, que es el concepto que hayamos ya formado en nuestra mente para representar, merced a una abstracción sistemática de las otras propiedades físicas, ciertas relaciones espaciales o de posición de los cuerpos, del espacio físico, esto es, el conjunto de estas relaciones como puede resultar definido por una experiencia sobre los cuerpos, en cierto orden de aproximación proseguible indefinidamente.

Aun cuando la Lógica pueda ayudar al proceso de abstracción constructivo de los conceptos, no puede por sí sola sustituir a las asociaciones psicológicas que constituyen este mismo proceso. Si no se quiere una abstracción ilusoria, se necesita educar la capacidad representativa de lo abstracto recurriendo también a medios experimentales.

En especial el oficio del análisis lógico en este proceso es distinguir los actos de intuición, y ayudar por "abstracciones sucesivas"; así se prosigue el desarrollo de la intuición geométrica que alcanza a espacios intuitivos superiores diversamente interesantes (Enriques, 1948).

La idea que comúnmente nos formamos de la "línea y de la superficie" obtenida por abstracción de pocos casos particulares es mucho menos general que la adoptada por el geómetra. El que visualiza solamente el plano, la esfera, conos, cilindros y otras superficies análogas que constan de puntos elípticos o parabólicos no alcanza a imaginarse fácilmente una superficie de puntos hiperbólicos atravesada en cada punto por un plano tangente. La demostración analítica de este caso no podría mirarse más que como la anticipación de la construcción del hiperboloide reglado (Enriques, 1948).

Es así que el conocimiento de la superficie de puntos hiperbólicos y de las superficies unilaterales extiende el concepto común de la superficie, permitiendo abarcar con la intuición mayor número de casos. Con el progreso de esa intuición se puede llevar a considerar otras situaciones y a avanzar en el conocimiento geométrico. Deberían pues estimularse los tipos de experiencia que la favorecen.

Para Enriques (1948) el resultado de las observaciones y de las experiencias autoriza, por tanto, prácticamente la geometría que procede de la intuición; pero teóricamente queda siempre la duda sobre el resultado de experiencias más precisas, y esta duda, es un motor de los procesos de demostración.

Al estudiar los fundamentos del aprendizaje de la geometría vemos dos aspectos complementarios en los trabajos de Piaget (1970-72) y van Hiele (1986). Mientras el primero analiza como se construyen las relaciones espaciales en la mente de los individuos. van Hiele analiza los distintos niveles de conocimiento que sobre las cuestiones geométricas se pueden tener.

PIAGET distingue en su teoría psicogenética los siguientes niveles de organización espacial: un espacio sensomotor de las percepciones sensoriales de las relaciones espaciales, un espacio intuitivo en un nivel preoperatorio, un espacio concreto de operaciones reversibles con materiales concretos y el espacio abstracto caracterizado por las operaciones formales abstractas que sería el espacio de la geometría en la concepción de EUCLIDES y HILBERT. Supone que todos los niveles de organización espacial propuestos ponen en juego actividades de construcción por parte del sujeto. Así la percepción espacial no es una simple actividad de copia de la realidad, como la que hace una máquina fotográfica, sino que es el resultado de actividades de organización y de codificación de las informaciones sensoriales.

VAN HIELE propone un modo en que se estructura el aprendizaje de la geometría coherente con un conocimiento geométrico que se construye por las abstracciones sucesivas, que hemos mencionado en el pensamiento de ENRIQUES (1948). El trabajo de VAN HIELE presenta un modelo de estratificación, en una serie de niveles de conocimiento, que permiten categorizar los distintos grados de representación del espacio, en los siguientes niveles:

Nivel 0: Los individuos perciben las figuras como un todo global. No reconocen las partes y componentes de las figuras.

Nivel 1: Los individuos pueden analizar las partes y propiedades particulares, pero no explicitan relaciones entre distintas familias de figuras.

Nivel 2: Los individuos determinan las figuras por sus propiedades.

Nivel 3: Los individuos pueden desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra.

Nivel 4: Los individuos están capacitados para analizar el grado de rigor (consistencia, independencia y completitud) de los sistemas deductivos.

Este modelo de estratificación del conocimiento ha sido validado por psicólogos soviéticos. Las investigaciones de VAN HIELE y de los psicólogos soviéticos han demostrado que el paso de un nivel a otro es independiente de la edad, muchos adultos se encuentran en un nivel 0. No se relaciona, en sus investigaciones, con una génesis por edad análoga a la que propone PIAGET.

Según CLAUDI ALSINA (1987) un profesor a través de los contenidos y los métodos de enseñanza puede provocar el paso de un nivel a otro.

La construcción del espacio es, pues, un proceso cognitivo de interacciones. Desde un espacio intuitivo o sensomotor, que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.; a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia, prediciendo y manipulando mentalmente (ALSINA *et al.*, 1987)

5. El valor matemático del pensamiento visual

Como respuesta al cuestionamiento del valor del conocimiento matemático adquirido por visualización, nos dice Miguel de Guzmán (1996) que nuestra percepción es muy prioritariamente visual y así no es de extrañar en absoluto que el apoyo continuo en lo visual esté tan presente en las tareas de matematización, no sólo en aquellas que, como la geometría, se refieren más directamente a la exploración específica de aspectos del espacio, sino también en otras, como el cálculo, que nacieron para explorar los cambios de los objetos materiales en sí mismos y en sus aspectos espaciales. Y aun en aquellas actividades matemáticas en las que la abstracción parece llevarnos mucho más lejos de lo perceptible por la vista, los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos y diagramas visuales.

Alsina Catalá, Furtuny Aymemi & Pérez Gómez (1997) distinguen entre pensamiento visual y visualización.

Visualizar es, tal como ya se ha apuntado anteriormente, tener la capacidad de producir imágenes que ilustren o representen determinados conceptos, propiedades o situaciones, y también es la capacidad de realizar ciertas lecturas visuales a partir de determinadas representaciones. La visualización genera un pensamiento visual.

El pensamiento visual incluye la habilidad de visualizar, pero va más allá, al poder operar con imágenes y explorar, seleccionar, simplificar, abstraer, analizar, comparar, completar, resolver, combinar con las mismas.

Uno de los objetivos de la enseñanza de la geometría en un nivel universitario es el desarrollo de un pensamiento visual.

> *Desarrollando el pensamiento visual, no sólo abrimos nuevos horizontes a la forma de enseñar geometría y a las temáticas curriculares, sino que facilitamos nuevas maneras de descubrir e investigar. En este sentido, la exploración espacial mediante el uso de ordenadores es un claro ejemplo de cómo se ha revolucionado la aproximación docente a las estructuras tridimensionales y cómo se han abierto nuevas fronteras investigadoras.* (Alsina Catalá, Furtuny Aymemi & Pérez Gómez, 1997).

6. Un tema de geometría analítica para el desarrollo de un pensamiento visual

Las posiciones epistemológicas que hemos mencionado, potencian el desarrollo de un pensamiento visual como forma de construcción del conocimiento geométrico.

Con el objeto de valorizar el conocimiento matemático que se puede obtener por la visualización de la pantalla de un computador, utilizado como facilitador de un aprendizaje significativo, presentaremos la concepción y el análisis a priori de un tema de geometría analítica.

Se trata de realizar propuestas de situaciones de aprendizaje destinadas a asegurar de manera controlada la emergencia de conceptos matemáticos en el contexto de aprendizaje.

La actividad matemática consiste con frecuencia en la elaboración de una estrategia, de un procedimiento, que permita anticipar el resultado de una acción aún no realizada, o no actual, sobre la cual se dispone de información. El rol de la anticipación es entonces fundamental.

En la primera mitad del siglo XVII nace la geometría analítica. Su aparición no fue accidental, coincide con el desarrollo de otros campos como la navegación, el arte de la guerra, la astronomía, la mecánica, etc. Fermat y especialmente Descartes están considerados como sus creadores. Descartes deseaba crear un método que pudiera aplicarse a todos los problemas de la geometría, es decir, formular un método general de resolución. Su teoría se basa en dos conceptos: el concepto de las coordenadas y el concepto de representación geométrica en forma de curva plana cualquier ecuación algebraica en dos incógnitas, valiéndose para ello del método de las coordenadas y de los métodos analíticos. La geometría analítica representa una nueva concepción epistemológica de la geometría ya que aparece un nuevo espacio geométrico el espacio de puntos, y una nueva forma de hacer geometría apoyada en la herramienta del álgebra. Se inicia la confrontación metodológica análisis síntesis (Bolea Catalán, 1995).

Los antiguos griegos se ocuparon ampliamente de las propiedades geométricas de las cónicas: circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. Hubo que esperar unos 1900 años, en los inicios del siglo XVII, a que las importantes aplicaciones de las cónicas quedaran puestas de manifiesto y las cónicas tuviesen, de hecho, un papel preponderante en el desarrollo del cálculo.

La conceptualización de una cónica como lugar geométrico definido por una condición referida a elementos geométricos dados y la relación entre esos elementos dados y los coeficientes de la ecuación canónica que se obtiene, es particularmente rica, tanto desde el punto de vista geométrico como analítico–geométrico.

No obstante no se ha avanzado, respecto al siglo XIX en la inclusión en el curriculum de la Matemática Básica, de otras curvas fácilmente representables con recursos computacionales. Algunas de estas curvas, además de una extraordinaria riqueza de formas, pueden brindar un campo propicio para que los alumnos planteen situaciones adidácticas de "exploración" del conocimiento y "formulación" de posibles propiedades que a su vez motivarían el desarrollo de situaciones de "justificación" e incluso "institucionalización" de un nuevo conocimiento, en el marco de la teoría de aprendizaje (Brousseau, 1988).

Uno de los avances más importantes de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, es que dichas situaciones pueden estudiarse y se encuentran, en relación con las diversas formas de los conocimientos matemáticos y los correspondientes modos de dichos conocimientos.

En esta concepción teórica, se llama "situación adidáctica" a la situación matemática específica del conocimiento concreto que por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional del profesor, provoca un cambio, en la estrategia de aprendizaje, generado por el alumno.

La situación didáctica comprende una serie de intervenciones del profesor sobre la dupla alumno–medio destinadas a hacer funcionar, en forma controlada, las situaciones adidácticas y los aprendizajes que ellas disparan.

En la búsqueda de una ampliación de las fronteras de los contenidos tradicionales se han elegido, para este trabajo, curvas cuyo estudio ha surgido de la representación computacional: las supercónicas (Anido & Villalonga, 1989).

Las supercónicas posibles de ser representadas y estudiadas con los recursos de la computación gráfica son utilizadas a nivel de diseño industrial hace más de una década. Su estudio no ha sido incorporado aún a los programas de geometría analítica de la Universidad. Su obtención a partir de una generalización de las ecuaciones de las cónicas es fácil. La riqueza de formas a que dan lugar, con los recursos del software matemático para la representación geométrica, es infinita.

Se propone en este trabajo una forma general de obtención de su representación a partir de sus ecuaciones paramétricas. Estas ecuaciones se podrían considerar una generalización de las ecuaciones paramétricas de las cónicas, donde se afectan las funciones trigonométricas que aparecen, con exponentes que generan para cada valor que se le asigna, deformaciones análogas en las distintas familias de curvas.

Son útiles para la comprensión de la relación entre la representación geométrica y la analítica y especialmente interesantes para el libre juego del alumno en la búsqueda de nuevas formas, exploración de potenciales propiedades y afianzamiento del conocimiento de las cónicas. Mediante la experimentación numérica y gráfica, por la exploración computacional se inducen incluso propiedades de reglaje que luego pueden ser demostradas analíticamente.

Utilizado en está forma el computador es una herramienta del aprendizaje. Esto nos lleva a una concepción de la herramienta computacional como "herramienta cognitiva" en un proceso de aprendizaje que comprometa activamente al que aprenda y que refleja su comprensión y concepción de la información más que la reproducción del conocimiento del profesor.

Una herramienta cognitiva es todo aquel instrumento del que pueden servirse las personas para amplificar su capacidad de comprender y operar en el mundo. La cualidad de herramienta cognitiva no es intrínseca a un instrumento. En el caso de la computadora tenemos que ésta no es por sí sola un medio cognitivo; para llegar a serlo tiene que ser utilizada dentro de un cierto dominio conceptual de manera que ayude al usuario a comprender mejor dicho dominio y actuar con mayor eficacia en el mismo. Si consideramos a la geometría como un dominio conceptual, entonces utilizar la computadora como herramienta cognitiva en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina significa que la máquina se utiliza en formas que ayuden a comprender y operar en ese dominio conceptual (Jonassen, 1995).

En la enseñanza de la geometría, que debe producir una formación adecuada de un alumno universitario, las herramientas computacionales no deben ser simples "fingertip tools" (Jonassen, 1995) que mecanicen el trabajo sin una real compresión del mismo en cuanto a que se debe educar en un rigor conceptualizado y una visión unificada entre la geometría y sus aplicaciones, compenetrados con la idea que, para la parte operativa, la computadora es la que nos da la solución siempre el que la use sepa lo que quiere y entienda lo que le ofrece como resultado.

Se ha elegido para la representación el programa *Scilab.* Este además de su origen y características científicas, es un programa de distribución gratuita y de fácil acceso todos los alumnos.

Scilab es una herramienta CAS (Computer Algebraic Systems) desarrollado en el Instituto Nacional de Investigaciones en Informática y Automática de Francia (INRIA). Este software es desarrollado con el objeto de proveer a los expertos en matemática aplicada de una poderosa herramienta de cálculo. Es un sistema totalmente interactivo que ofrece una gran comodidad para la visualización de las soluciones obtenidas, sea gráfica o alfanumérica. Este sistema puede manipular la mayor parte de los objetos estándares de la matemática aplicada, vectores, matrices, polinomios, matrices polinomiales reales o complejas, etc. Es un sistema totalmente abierto lo cual le permite al usuario definir nuevas funciones, crear nuevas tipos de variables y definir sus propias operaciones. *Scilab* es de distribución gratuita y se encuentra disponible para diversos sistemas operativos tal como *Unix, Linux* o *Windows.*

7. Las supercónicas

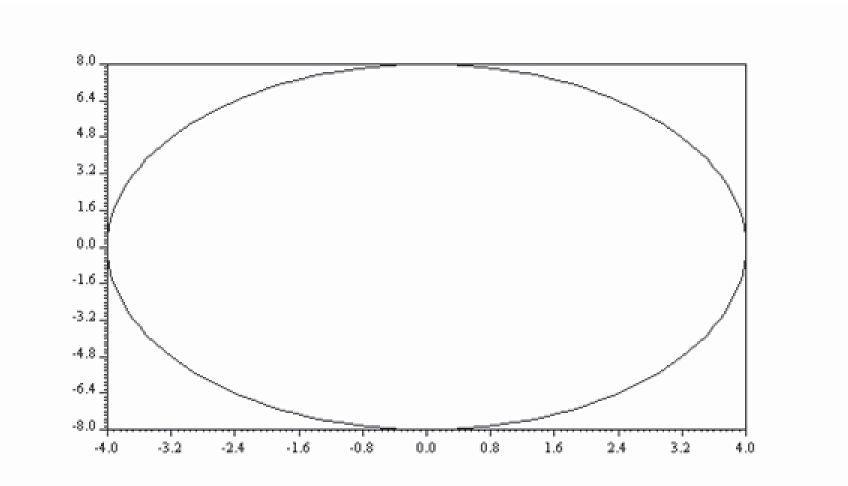
Trataremos de mostrar, en este punto, los conceptos matemáticos esenciales de nuestro análisis, en relación al tema elegido. ¿Cómo se podría generar o definir una superelipse? ¿Cómo se podría generar o definir una superhipérbola?

Como su nombre lo sugiere recurriremos a las ya conocidas ecuaciones de elipses e hipérbolas utilizando la forma paramétrica de las ecuaciones. Con el fin de que se entienda la idea de la generación de estas nuevas formas geométricas, podríamos considerar a la ecuación paramétrica de una curva en el plano como una máquina a la que alimentamos con números reales y nos produce puntos.

$\theta \in \mathbb{R} \longrightarrow$ | Ecuaciones paramétricas de una curva en el plano | $\longrightarrow$ | (x, y) coordenadas de un punto del plano |

En el caso que representaremos, las ecuaciones de la elipse de partida serían:

$$X(\theta) = (4\cos\theta, 8\operatorname{sen}\theta) \quad \text{con} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$



Problema introductorio. ¿Qué representación geométrica se obtiene, si afectamos a las funciones trigonométricas de la ecuación anterior, con un determinado exponente numérico ε? ¿Qué tipo de imagen nos devuelve la pantalla del computador? Dar valores racionales al parámetro e investigar el comportamiento de la representación para cada uno de ellos. La ecuación una vez que se afecte con el exponente sería:

$$X(\theta) = (4\cos^{\varepsilon}\theta\,,\, 8\operatorname{sen}^{\varepsilon}\theta) \quad \text{con} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

Sin disponer de herramientas computacionales, las dificultades de cálculo y representación harían casi imposible la respuesta a este problema en un tiempo razonable. Basta recordar las pesadas tablas trigonométricas, ya históricas, y pensar solo en los distintos valores enteros que, se asignarían a cada exponente, para tener una idea de la complicación que eso significaría.

Ni hablar de lo que ocurriría con exponentes fraccionarios donde aparecerían raíces.

Los programas CAS nos permiten hacer en forma casi mágica la representación. Pero ¿qué clase de magia?

¿Se trata solo de apretar teclas que den distintos valores al parámetro y observar pasivamente las curvas obtenidas? ¿El alumno se transforma así en un presionador de teclas?

Es aquí que donde entra en juego el sistema "alumno–docente–tema matemático" en el "medio" constituido esencialmente por el Laboratorio.

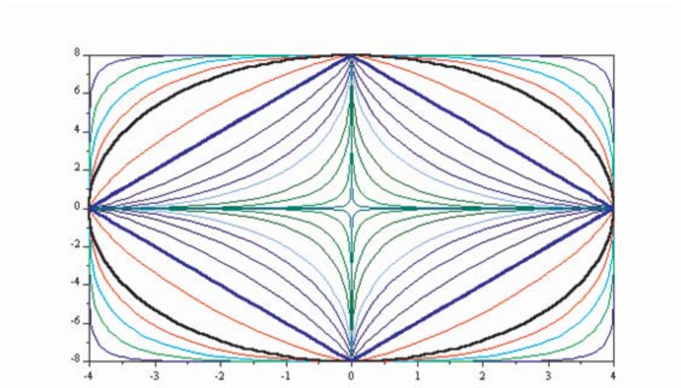
Precisamente por la naturaleza del problema elegido y el "medio computacional", a cada valor de ε, la respuesta obtenida en la pantalla del computador puede ser problematizadora en el juego de la interactividad entre alumno–alumno y docente–alumno. Con el objetivo de que el alumno aprenda el conocimiento matemático, se requerirá de la vigilancia y las intervenciones adecuadas del docente, para aprovechar en beneficio del aprendizaje cada situación adidáctica planteada por el alumno.

Por ejemplo, si se da a ε el valor $1/2$, en el dominio en que se representó la elipse, la pantalla no mostrará una representación geométrica.

Ante la pregunta ¿qué ha ocurrido? La búsqueda de respuestas o el análisis de las que se obtengan en pantalla, obligará al alumno a manejar cuadros relativos a conocimientos trigonométricos, al concepto de dominio de una función, y a la vinculación el campo real con el campo de los números complejos.

Se conjetura que, para los distintos valores que propongan los alumnos, las respuestas de las pantallas serán disparadoras de toda la gama de situaciones didácticas que categoriza BROUSSEAU, incluso situaciones de justificación, como la que pueden generarse cuando, al dar el valor 2 al exponente ε, la figura que mostrará la pantalla esté constituida por segmentos de rectas. Se espera que surja la pregunta: ¿por qué? Y que se justifique e institucionalice la respuesta mediante un teorema.

Hemos representado, a continuación, algunas curvas de la familia que se obtiene completando por simetría las gráficas, para aquellos casos en que por el tipo de exponente, existan restricciones en el dominio y observaremos regularidades de las que se pueden conjeturar posibles propiedades.



Para $\varepsilon = 2$ se obtienen segmentos de curvas rectilíneas. Para $\varepsilon < 2$ los segmentos de recta comienzan a curvarse aumentando las curvaturas hasta obtener para el valor 1, como ya hemos visto, una elipse.

Si se sigue disminuyendo el valor del exponente, aumenta la curvatura en cuatro zonas y las curvas que se obtienen toman un aspecto "cuadrangular" aproximándose sin llegar a alcanzarla, la forma de un rectángulo.

Vemos aquí la aparición de un nuevo "cuadro" (Douady, 1995), ya que nos encontramos ante un concepto del Análisis Matemático: el concepto de límite.

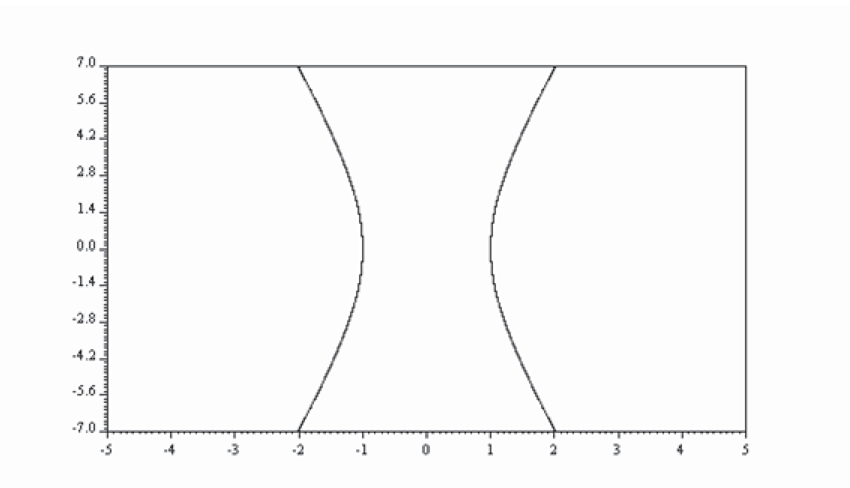
Para $\varepsilon > 2$ aparecen puntos cuspidales cuya agudeza aumenta a medida que lo hace el exponente. Se obtiene así una familia de cuadriláteros curvilíneos (astroides).

El mismo tipo de análisis se puede realizar con la definición y graficación de la familia de superhipérbolas que se obtiene a partir de la ecuación de la hipérbola.

Lo maravillosamente armónico y fascinante surge de la observación comparativa de ambas familias: superelipsoides y superhiperbolodes. En las gráficas aparecen deformaciones análogas (cúspides, rectificaciones y aumentos de curvatura) verificadas para $\varepsilon = 2$, para $\varepsilon < 2$ y para $\varepsilon > 2$, respectivamente.

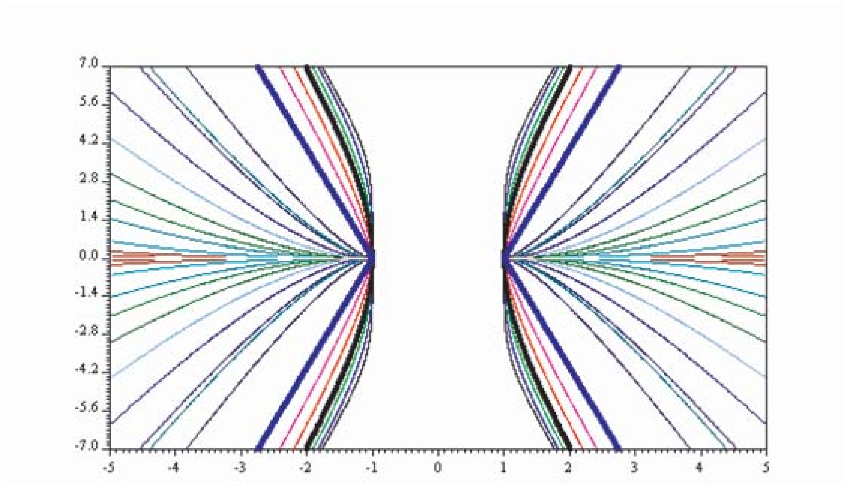
En el caso que representaremos, las ecuaciones de la hipérbola de partida son las siguientes:

$$X(\theta) = (\sec(\theta), 4\tan(\theta)) \quad \text{con} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,\ \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi \quad \text{y} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$



y las ecuaciones paramétricas de la superhipérbola:

$$X(\theta) = (\sec^{\varepsilon}\theta, 4\tan^{\varepsilon}\theta) \quad \text{con} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,\ \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi \quad \text{y} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$



Se podría construir así, a la siguiente definición: "Llamaremos **supercónicas** a las curvas obtenidas modificando las ecuaciones paramétricas de las cónicas, elevando a exponentes racionales positivos las funciones trigonométricas de sus expresiones paramétricas"

De esta manera podemos obtener, por ejemplo, superelipses y superhipérbolas cuyas expresiones paramétricas generales son las siguientes:

Superelipses:

$$X(\theta) = (a\cos^{\varepsilon}\theta, b\,\mathrm{sen}^{\varepsilon}\theta) \quad \text{con} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\,.$$

Superhipérbolas:

$$X(\theta) = (a\sec^{\varepsilon}\theta, b\tan^{\varepsilon}\theta) \quad \text{con} \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2,\ \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi \quad \text{y} \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{+}\,.$$

8. Conclusión y prospectiva

Como conclusión de estos análisis preliminares conjeturamos que el impacto visual provocado por las imágenes que aparece en la pantalla despertará en los alumnos la curiosidad, e inducirá a situaciones adidácticas de **acción**, dirigidas a la indagación creativa en un diálogo implícito interactivo con el computador.

Se conjetura situaciones adidácticas de **formulación** en las que el alumno comunica las visualizaciones obtenida a una o varias compañeros y al docente y estos a su vez le devuelven sus propias producciones.

De este modo se podrían llegar a situaciones adidácticas de **validación**, en donde se pongan en juego los conocimientos previos de cónicas al tratar de interpretar y relacionar con otros cuadros disciplinarios las representaciones obtenidas o quede como propuesta lo que no pueda justifiar, sobrepasando los límites de la cuestión planteada.

Es además de interés, para la Didáctica de la matemática, observar que en el análisis preliminar que hemos realizado, se presenta una anticipación de "procesos de generalización" que surgen del paso de las cónicas a las respectivas familias de supercónicas. La generalización en Matemáticas aparece en varias formas. Pólya (1954) sugiere dos tipos de generalizaciones cuando nos dice: "nosotros generalizamos cuando pasamos de la consideración de triángulos a la de polígonos con un arbitraria número de lados. Nosotros generalizamos también cuando pasamos del estudio de funciones trigonométricas con un ángulo agudo a funciones trigonométricas con un ángulo irrestricto".

La complejidad de una generalización depende del concepto que será generalizado y de su representación.

En nuestro caso el pasaje de las ecuaciones paramétricas de una cónica donde el exponente de las funciones trigonométricas, vale uno, a una expresión más general donde puede tomar como valor, números racionales se puede considerar una generalización de las cónicas, a una familia de curvas cuyo comportamiento es visualisable: las supercónicas.

También es de interés la consideración en este trabajo, la consideración de dos formas de construcción de un conocimiento geométrico que entran en juego. En efecto la enseñanza de las cónicas, se realiza en forma tradicional, a partir de la presentación del problema en el que se solicita obtener la ecuación de un lugar geométrico dado, es decir se parte de la geometría y se realiza una traducción, desde las condiciones que definen el lugar geométrico, a su ecuación en el lenguaje del álgebra. En esta construcción del conocimiento de las supercónicas, por el contrario se parte de la ecuación dada en el lenguaje del álgebra, y a partir de ella, por su representación geométrica computarizada, se visualizan propiedades que podrían tratar de demostrarse, incluso con recursos de distintas ramas de la matemática, o dejar planteadas . Es un camino análogo al que se realiza cuando se estudian las cuádricas efectivamente incorporadas al curriculum.

Se observa también como la computadora puede ser pensada como un instrumento que favorezca el enriquecimiento de la metodología de trabajo, en cuanto a la estructuración y análisis de contenidos, e incluso a la formación de conceptos, puesto que al finalizar el juego interactivo descripto, los alumnos se podrían encuentrar en condiciones para comenzar la etapa de institucionalización teórica.

Ante las objeciones que surgen cuando se plantea cualquier modificación de los contenidos tradicionales deberíamos reflexionar sobre las adecuaciones metodológicas y temáticas que imponen los nuevos contenidos de la geometría, mencionados al comienzo de este artículo. El uso adecuado de los programas CAS que pueden calcular numéricamente, graficar en dos y tres dimensiones y realizar operaciones simbólicas, permitirá dedicar a la formación de nuevos conceptos el tiempo y el esfuerzo que tradicionalmente se ha dedicado a una operatoria estéril en sí misma.

Como propuesta de carácter prospectivo se podría encarar el estudio de nuevas superficies: las supercuádricas y los supertoros. La posibilidad de generalizar al espacio las formas de las cónicas: circunferencias a esferas, parábolas a paraboloides, elipses a elipsoides, hipérbolas a hiperboloides o generar a partir de curvas planas, rectas y cónicas otras superficies como las cilíndricas, superficies cónicas o superficies de revolución; implica un fluido manejo conceptual de todo la geometría, álgebra, y geometría analítica que se supone como competencia previa o adquirida en el escalón que antecede al estudio del tema (Anido *et al.*, 1999). A partir de este proceso, de generalización al espacio de tres dimensiones de las cónicas, se puede proponer al alumno, ya como una propuesta de carácter optativo, obtener por procesos de analogía y generalización, las ecuaciones de las supersuperficies: las supercuádricas, los supertoros y proceder a su estudio.

Las supercuádricas, posibles de ser representadas y estudiadas con los recursos de la computación gráfica, son utilizadas a nivel de diseño industrial hace mas de una década. Su obtención, a partir de una generalización de las ecuaciones parámetricas de las cuádricas, es fácil. La riqueza de formas a que dan lugar, con los recursos de rotación y cambio de unidades del software matemático para la representación geométrica, es infinita. Se propondría una forma general de obtención de la representación a partir de las cuádricas. Las ecuaciones de estas nuevas superficies se podrían considerar una generalización de las ecuaciones paramétricas de las cuádricas, donde en forma análoga a lo hecho con las cuádricas se afectan las funciones trigonométricas que aparecen en la expresión analítica de cada ecuación paramétrica, con exponentes que generan para cada valor asumido, deformaciones análogas en las respectivas superficies de partida. En algunos casos, emerge una especie de arista, formada por puntos cuspidales en los meridianos, en otros casos en los paralelos, o en ambos: meridianos y paralelos (López *et al.*, 2001). Las imágenes obtenibles son insólitas y con adecuados valores de las constantes y parámetros, bellísimas. La importancia didáctica radica en el desarrollo de un pensamiento visual que relacione en forma bidireccional la superficie con su representación algebraica y en la motivación que puede inducir en el alumno para la exploración de nuevos conocimientos.

Agradecimientos. Este trabajo forma parte de estudios realizados en el marco del Programa 2-ECO-3 “La formación matemática en carreras no matemáticas” de la Universidad Nacional de Rosario que incluye a los siguientes proyectos vinculados a la temática del trabajo.

ECO-17 “La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares”.

ING-74 "La elaboración y evaluación de los materiales curriculares para la matemática Básica de carreras de Ingeniería", financiados por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Argentina. "La Enseñanza de la matemática con herramientas computacionales" Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Rosario (CIUNR), Argentina.

El proyecto FOMEC. No. 615 UNR "La Eenseñanza de la matemática con herramientas computacionales" financiado por el fondo para el mejoramiento de la calidad de enseñanza de la Secretaría de Políticas Universitarias, Ministerio de Cultura y Educación, Argentina.

Bibliografía

[1] Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J. & Pérez Gómez, R. (1997): *¿Por qué geometría?*. Síntesis: Madrid.

[2] Alsina Catalá, C., Fortuny Aymemí, J. & Burgués, C. (1987) *Invitación a la didáctica de la geometría.* Síntesis: Madrid.

[3] Anido, M., Co, P. & Guzmán, M. (1999) *La Enseñanza de la geometría en el Nivel Universitario con Herramienta Maple.* Revista IRICE del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, nº 13. CONICET. Universidad Nacional de Rosario. 155–169.

[4] Anido, M.& Rubio Scola, H. (2001) *Los fundamentos de la geometría y las nuevas tecnologías*, IN-MAT 2001, I Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería, Buenos Aires.

[5] Anido, M. & Villalonga, M. (1989) *Super-superficies: La super–superficie de Boi*, Actas del Congreso Internacional: Computadoras en Educación. Universidad de Mendoza, Argentina.

[6] Artigue, M. (1990) *Ingénierie Didactique.* Recherches en Didactique des Mathématiques **9.3**, 281–307.

[7] Bolea Catalán, P. (1995) *La transición didáctica de la geometría Elemental.* Universidad de Zaragoza: Zaragoza. 89–109.

[8] Brousseau, G. (1987) *Fondements et méthodes de la didactique.* Recherches en Didactique des Mathématiques **7.2**, 34–116.

[9] Brousseau, G. (1988) *Los diferentes roles del maestro.* U.Q.A.M. Buenos Aires.

[10] Brousseau, G.(1989) *Les obstacles epistémologiques et la Didactique des Mathématiques.* Constructions des savoirs. Obstacles et conflits. Otawa CIRADE-INC. 40–64.

[11] Chevallard, Y. (1998) *La transposición didáctica.* AIQUE: Buenos Aires.

[12] Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997) *Estudiar matemática.* ICE-Horsori: Barcelona, 213–225; 277–290.

[13] Douady, R. (1995) *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamericano: Bogotá, 61–97.

[14] Enriques, F., Amaldi, V., Guarducci, A., Vitali, G. & Vailati, G. (1948) *Fundamentos de la geometría.* Iberoamericana: Buenos Aires. 15–55.

[15] Guzmán, M. (1992) *Tendencias innovadoras en educación matemática.* OMA: Buenos Aires. 9-32.

[16] Guzmán, M.(1995) *El papel del matemático frente a los problemas de la educación matemática.* Memorándum de la Unión Matemática Argentina. Buenos Aires.

[17] Guzmán, M. (1996) *Papel de la tecnología en la educación matemática.* Ma–Tex, 1. Programa Escolar. Separata.

[18] GUZMÁN, M. (1996) *El Rincón de la Pizarra –Ensayos de visualización en análisis matemático*. Ed. Pirámide: Madrid.

[19] GUZMÁN, M. (1997) *Tendencias innovadoras en educación matemática*. OMA: Buenos Aires.

[20] JONASSEN, D.H. (1995) *Computers as Cognitive Tools: Learning with Tecnology. Not from Technology*. Journal of Computing in Hhiger Education, **6** (2), 40–73.

[21] KLIMOVSKY, G. (1999) *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología*. A Z editora: Buenos Aires, Argentina

[22] LÓPEZ, R., ANIDO, M. & RUBIO SCOLA, H. (2001) *Supercuádricas y supertoros en el aprendizaje de la geometría con Scilab*. INGERAF XII Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica, Badajoz, España, 50

[23] PIAGET, J. (1970) *Seis Estudios de Psicologia*. Seix Barral: Barcelona.

[24] PIAGET, J. (1972) *Psicología de la inteligencia*. Psique: Buenos Aires.

[25] TORANZOS, F. (1948) *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática*. Espasa Calpe: Buenos Aires.

[26] VAN HIELE, P. M. (1986) *Structure and Insight*. Academic Press, New York.

[27] VERGNAUD, G. (1991) *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactique des Mathématiques **4.1**.

[28] VILLANI, V. (1994) *L´insegnamiento della geometria nei nuovi programmi della scuola italiana*. L´insegnamiento della matemática e delle Scienze Integrate, **17A-17B** (6), 663–674.

[29] VILLANI, V. (1994) *L´insegnamiento preuniversitario della geometria: Molte Domante, Qualache Risposta*. L´insegnamiento della matemática e delle scienze integrate **17A-17B** (5), 439–458.

[30] VILLANI, V. (ed.) (1996) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21ST Century*. ICMI Study.

[31] VILLANI, V. (1995) *Le transformazione geometriche nella scuola secondaria superiore*. L´insegnamiento della matemática e delle scienze integrate **18A-18B** (6), 669–688.

[32] WITTMANN, E. CH. (1995) *Mathematics education as a design science*. Educational Studies in Mathematics **29**, 355–274.

(Recibido en marzo de 2007. Aceptado para publicación en abril de 2008)

MERCEDES ANIDO, ROBERTO LÓPEZ
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO, ARGENTINA
HÉCTOR E. RUBIO SCOLA
CONSEJO DE INVESTIGACIONES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO, ARGENTINA
e-mail: `erubio@fceia.unr.edu.ar`