**Lecturas Matemáticas**
*Volumen* **29** *(2008), páginas 95–112*
ISSN 0120–1980

# Teoría de modelos y geometría algebraica: una versión de un teorema de Weil en teorías $\omega$–estables

Jorge Cely[1]
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Abstract. We prove a weak version of a theorem by Weil on generically presented algebraic groups, for $\omega$–stable theories.

*Key words and phrases.* $\omega$–stability, Morley rank, Morley degree, strongly minimal set, algebraically closed fields, variety, generic point.

*2000 AMS Mathematics Subject Classification.* xxxx

Resumen. Demostramos una versión débil de un teorema de Weil sobre grupos algebraicos genéricamente presentados, para teorías $\omega$–estables.

## 1. Introducción

La teoría de modelos es una rama de la lógica matemática que consiste en el estudio abstracto de las estructuras matemáticas. En los primeros años de su desarrollo uno de los enfoques de estudio de la teoría de modelos fueron las estructuras algebraicas y en particular, los campos algebraicamente cerrados de característica $p$ ($p = 0$ ó $p$ un número primo). No pasó mucho tiempo para que los modelo teóricos de la época reconocieran la importancia de la teoría de campos algebraicamente cerrados de característica $p$, ésta resultó ser el mejor ejemplo de muchas propiedades modelo teóricas. Las primeras contribuciones importantes en esta dirección se deben a Tarski quien demostró que la teoría de campos algebraicamente cerrados de característica fija es completa y tiene eliminación de cuantificadores. La completitud de esta teoría puede ser vista

[1]Con el patrocinio de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes mediante el programa "Proyectos Semilla".

como el principio de transferencia de LEFSCHETZ en geometría algebraica. Otra contribución importante en esta línea y que siguió evidenciando conexiones entre la teoría de modelos y la geometría algebraica, es el teorema de AX [Ax68], el cual afirma que todo morfismo inyectivo de una variedad algebraica en sí misma debe ser sobreyectivo.

Hacia los años sesenta la teoría de modelos adoptó un nuevo enfoque que trajo consigo muchas ideas innovadoras que la llevarían a profundos resultados en la materia misma como en otras áreas de la matemática. A este nuevo enfoque se le conoce con el nombre de *Teoría de la Clasificación* o *Teoría de la Estabilidad*. El trabajo pionero en esta nueva línea fue *Categorically in Power*, publicado en 1965 por MICHAEL MORLEY [Mor65]. En este trabajo el autor responde de manera afirmativa a una conjetura planteada por JERZY ŁOŚ en 1954: si $T$ es una teoría contable y categórica en algún cardinal no enumerable, entonces es categórica en todos los cardinales no enumerables. Una de las motivaciones a esta pregunta es que este fenómeno de transferencia de categoricidad lo tienen los campos algebraicamente cerrados de característica fija (Teorema de Steinitz). Como muchas veces sucede en matemáticas, cuando un resultado importante aparece no sólo queda el "Teorema", sino también una gran cantidad de ideas y métodos, que como en este caso abrieron las puertas a toda una nueva rama en las matemáticas. MORLEY introduce nociones como los espacios (topológicos) de tipos, define un rango en los tipos y en las fórmulas. Estos se conocen hoy en día como el rango de Morley. Pocos años más tarde aparece en escena SAHARON SHELAH, quien será la figura central durante el desarrollo de la teoría de la clasificación; la referencia de su trabajo en esta materia es [She90]. Hablando muy vagamente y con el fin de contextualizar de lo que trata nuestro trabajo, vamos a explicar en qué consiste la teoría de la clasificación que desarrolló SHELAH. La idea es la siguiente: dada una teoría de primer orden, se busca clasificar a través de una familia de invariantes todos sus modelos módulo isomorfismo. Una de las cosas que hace SHELAH para atacar el problema es buscar posibles dicotomías que permitan determinar sobre qué teorías es posible tener una clasificación. Es aquí donde aparecen las nociones de $\omega$–estabilidad, estabilidad, superestabilidad entre otras. Otra parte importante del trabajo de SHELAH, consistió en desarrollar la relación abstracta de independencia en teorías estables llamada "no bifurcación", esta noción coincide con la independencia algebraica que se tiene en los campos algebraicamente cerrados.

En 1955, ANDRÉ WEIL publica *On algebraic groups of transformations* [Wei55]; en este artículo él demuestra que si se tiene una variedad algebraica $V$ sobre un campo algebraicamente cerrado $F$ y una operación binaria en $V$ la cual tiene buenas propiedades en un pedazo "grande" de $V$, sus puntos genéricos, entonces existe un grupo algebraico $G$ sobre $F$ cuya multiplicación es una extensión de la dada en los puntos genéricos y el cual es birracionalmente equivalente a $V$. En vista de que los campos algebraicamente cerrados de característica $p$ tienen una teoría con un muy buen comportamiento modelo teórico, vale la pena indagar y ver hasta qué punto podemos generalizar teoremas de la geometría algebraica a este contexto más amplio. Nuestro trabajo consistirá en hacer este ejercicio con este teorema de Weil. Este teorema fue extendido por Hrushovski [Hru86] al contexto de estabilidad, mostrando así que este resultado no es algo exclusivo de la geometría. Mencionamos todo esto a manera de información, ya que el objetivo de este trabajo no es exponer las ideas de Hrushovski ni la demostración de su teorema. Otra aproximación a este teorema, esta vez desde un punto de vista topológico, se debe a van den Dries [vdD90]. Más específicamente, de lo que se trata este artículo es de entender que resultado análogo al de Weil puede valer en un contexto $\omega$–estable y seguir sus argumentos y ver hasta qué punto estos tienen una "traducción" del caso algebraico al caso $\omega$–estable. Logramos un resultado (teorema 4.9) el cual puede ser visto como una versión débil del teorema de Weil en teorías $\omega$–estables.

Estos resultados se obtuvieron en mi tesis de pregrado [Cel07], bajo la dirección de Alf Onshuus, quien me sugirió realizar este proyecto y a quien también agradezco haberme introducido en el tema y ayudarme en la comprensión del mismo. También agradezco a Alexander Berenstein sus explicaciones y revisiones del documento. Por último quiero agradecer al revisor científico sus valiosas sugerencias y correcciones.

## 2. Preliminares modelo teóricos

En geometría algebraica, siguiendo a Weil [Wei62], se trabaja fijando un campo algebraicamente cerrado $\mathbb{F}$ de grado de trascendencia infinito sobre su campo primo, el cual él llama *dominio universal*. Uno puede tomar este campo tan grande como quiera de tal forma que los únicos campos en consideración se puedan ver como subcampos de $\mathbb{F}$ (módulo isomorfismos), sobre los cuales $\mathbb{F}$ tiene grado de trascendencia infinito. Shelah observó que para facilitar un poco el trabajo en teoría de modelos y dar mayor claridad en la exposición, se podían considerar modelos para ciertas teorías que tuvieran propiedades semejantes a las de un dominio universal en geometría algebraica. Las propiedades deseadas para estos modelos son la saturación, la homogeneidad y la universalidad, aunque las dos últimas son consecuencias de la primera vale la pena hacerlas explícitas. Como es estándar en teoría de modelos trabajaremos sobre dominios universales (también llamados modelos monstruo). Nosotros estamos interesados en trabajar en teorías $\omega$–estables donde es relativamente fácil demostrar [Mar02], [Bue96], que existen dominios universales.

El rango de Morley proporciona una buena noción de dimensión para los subconjuntos definibles en estructuras $\omega$–estables. La siguiente presentación del rango de Morley tiene un carácter geométrico y permite tener una buena intuición de muchas propiedades, una definición equivalente en términos del rango de Cantor-Bendixson sobre el espacio de Stone del modelo monstruo es desarrollada en [Bue96], esta otra versión, aunque a primera vista no parezca tan intuitiva como la primera, ayuda a entender un concepto fundamental en teoría de la estabilidad: las extensiones no bifurcantes.

**Definición 2.1.** Supongamos que $\mathbb{M}$ es el modelo monstruo de una $\boldsymbol{\mathcal{L}}$–teoría completa $T$. Sea $\varphi(\bar{v})$ una $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbb{M}}$–fórmula. Vamos a definir $RM(\varphi)$, el *Rango de Morley* de $\varphi$ en $T$. Dado un ordinal $\alpha$ definiremos inductivamente $RM(\varphi) \geq \alpha$ de la siguiente manera:

- $RM(\varphi) \geq 0$ si y sólo si $\varphi(\mathbb{M})$ no es vacío.
- Dado $\alpha$ ordinal mayor que cero, $RM(\varphi) \geq \alpha + 1$ si y sólo si existen $\psi_1(\bar{v}), \psi_2(\bar{v}), \ldots$ $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbb{M}}$-fórmulas tal que $\psi_1(\mathbb{M}), \psi_2(\mathbb{M}), \ldots$ es una familia de subconjuntos de $\varphi(\mathbb{M})$ disyuntos dos a dos y $RM(\psi_n) \geq \alpha$ para todo $n$.
- Para $\alpha$ ordinal límite, $RM(\varphi) \geq \alpha$ si y sólo si $RM(\varphi) \geq \beta$ para todo $\beta < \alpha$.

Ahora,

- Si $\varphi(\mathbb{M}) = \emptyset$, definimos $RM(\varphi) = -1$.
- Si $RM(\varphi) \geq \alpha$ pero $RM(\varphi) \not\geq \alpha + 1$, definimos $RM(\varphi) = \alpha$.
- Si $RM(\varphi) \geq \alpha$ para todo ordinal $\alpha$, definimos $RM(\varphi) = \infty$.

La expresión $RM(\varphi) < \infty$ significará que $RM(\varphi)$ es un número ordinal o $-1$, en este caso, diremos que el rango de Morley de $\varphi$ es no infinito.

En este artículo no desarrollamos en detalle el rango de Morley, solamente damos las definiciones o mencionamos resultados (sin demostración) de lo que será importante en este trabajo. Referimos al lector a [Mar02] para los detalles.

Todas las fórmulas en el monstruo de una teoría $\omega$–estable tiene rango de Morley no infinito. Si $X$ es un subconjunto definible de rango de Morley $\alpha$, entonces no podemos partir a $X$ en infinitos subconjuntos definibles disyuntos dos a dos de rango de Morley $\alpha$. De hecho, se puede demostrar que la "geometría" de $X$ posee cierta rigidez: existe un número natural $d$ tal que $X$ no puede partirse en más de $d$ subconjuntos definibles disyuntos dos a dos, todos de rango de Morley $\alpha$. Este número se conoce como el grado de Morley de $X$ y es denotado por $\deg_M(X)$.

La noción de rango y grado de Morley se extiende de forma natural a los tipo:

**Definición 2.2.** Sea $A \subseteq \mathbb{M}$ y $\bar{a} \in \mathbb{M}^n$. Si $p \in S_n(A)$, definimos el *rango de Morley* de $p$ como $RM(p) = \text{mín}\{RM(\varphi) : \varphi \in p\}$. Si el rango de Morley de $p$ es un ordinal, entonces definimos el *grado de Morley* de $p$ como $\deg_M(p) = \text{mín}\{\deg_M(\varphi) : \varphi \in p \text{ y } RM(\varphi) = RM(p)\}$.

Definimos el *rango de Morley* de $\bar{a}$ sobre $A$ como $RM(\bar{a}/A) = RM(tp(\bar{a}/A))$.

El concepto de bifurcación que definimos a continuación es la base para definir una relación abstracta de independencia en teorías $\omega$–estables. Vale la pena observar que esta definición de bifurcación no fue la definición original de Shelah, pues la definición que da no hace uso del rango de Morley ni de la hipótesis de $\omega$–estabilidad, la cual garantiza que todo tipo tiene rango de Morley no infinito.

**Definición 2.3.** Sea $\mathbb{M}$ el modelo monstruo de una teoría $\omega$–estable y sean $A \subseteq B \subset \mathbb{M}$, $p \in S_n(A)$, $q \in S_n(B)$, y $p \subseteq q$. Si $RM(q) < RM(p)$ diremos que $q$ es una *extensión bifurcante* de $p$ y que $q$ *bifurca* sobre $A$. Si $RM(q) = RM(p)$ diremos que $q$ es una extensión *no bifurcante* de $p$.

**Teorema 2.4.** [Existencia de extensiones no bifurcantes]*Sean $A \subseteq B \subset \mathbb{M}$ y $p \in S_n(A)$.*

(i) *Existe $q \in S_n(B)$ extensión no bifurcante de $p$.*
(ii) *Existen a lo sumo $\deg_M(p)$ extensiones no bifurcantes de $p$ en $S_n(B)$. En particular, si $\deg_M(p) = 1$, entonces $p$ tiene una única extensión no bifurcante en $S_n(B)$.*

El concepto de bifurcación sirve para definir una noción abstracta de independencia en teorías $\omega$–estables:

**Definición 2.5.** Sean $T$ una teoría $\omega$–estable, $\mathbb{M}$ su modelo monstruo, $A, B \subset \mathbb{M}$ y $\bar{a} \in \mathbb{M}^n$. Diremos que $\bar{a}$ es *independiente* de $B$ sobre $A$ si $tp(\bar{a}/A \cup B)$ no bifurca sobre $A$ (*i.e.* $RM(\bar{a}/A) = RM(\bar{a}/A \cup B)$), en símbolos $\bar{a} \perp_A B$.

Intuitivamente esta relación de independencia funciona como todas las relaciones naturales de independencia que se usan en matemáticas, provee una "teoría de la información". En este caso la estamos midiendo con el rango de Morley: $\bar{a}$ es *independiente* de $B$ sobre $A$ si $RM(\bar{a}/A) = RM(\bar{a}/A \cup B)$, es decir, lo que podemos decir de $\bar{a}$ usando $A \cup B$ como parámetros es básicamente lo mismo que podemos decir si usamos solamente parámetros en $A$, ya que el rango de Morley no baja al aumentar el conjunto de parámetros, no se puede dar una fórmula con más información (más especifica) sobre $\bar{a}$ que haga descender el rango de Morley. El siguiente teorema muestra algunas de las propiedades que posee. Una de las más importantes es simetría.

**Teorema 2.6.**Sean $T$ una teoría $\omega$–estable y $\mathbb{M}$ su modelo monstruo.

(i) (Extensión) Para cualesquiera $\bar{a}, A, B \subset \mathbb{M}$ existe $\bar{a}'$ realización de $tp(\bar{a}/A)$ con $\bar{a}' \perp_A B$.
(ii) (Monotonía) Si $\bar{a} \perp_A B$ y $C \subseteq B$ , entonces $\bar{a} \perp_A C$.
(iii) (Transitividad) $\bar{a} \perp_A \bar{b}, \bar{c}$ si y sólo si $\bar{a} \perp_A \bar{b}$ y $\bar{a} \perp_{A\cup\{\bar{b}\}} \bar{c}$.
(iv) (Carácter finito) $\bar{a} \perp_A B$ si y sólo si para todo $B_0$ subconjunto finito de $B$ $\bar{a} \perp_A B_0$.
(v) (Simetría) Si $\bar{a} \perp_A \bar{b}$, entonces $\bar{b} \perp_A \bar{a}$.

Una clase importante de fórmulas en una estructura $\omega$–estable son las fuertemente minimales, fórmulas de rango y grado de Morley uno. La razón por la cual estas fórmulas (y los conjuntos que ellas definen) son importantes es que en ellas la clausura algebraica satisface la propiedad de intercambio, ésta permite definir dentro del conjunto fuertemente minimal una noción de independencia que generaliza la independencia lineal en espacios vectoriales y la independencia algebraica en campos algebraicamente cerrados (estos dos tipos de estructuras son los ejemplos canónicos de conjuntos fuertemente minimales). Estas nociones de dimensión e independencia en teorías fuertemente minimales (teorías cuyo monstruo es fuertemente minimal) coinciden con las nociones dadas por el rango de Morley.

## 3. Campos algebraicamente cerrados

En esta sección se presentan los campos algebraicamente cerrados de característica fija desde un punto de vista modelo teórico, los detalles pueden encontrarse en [Pil98]. Se introducen algunas herramientas y resultados de geometría algebraica para poder desarrollar con cierto detalle el concepto de punto genérico, el cual será definido en el contexto $\omega$—estable en la siguiente sección. Estos puntos son fundamentales en el teorema de Weil y en nuestra versión del mismo.

El lenguaje formal con el cual se estudian los campos algebraicamente cerrados en teoría de modelos es el lenguaje de los anillos $\boldsymbol{\mathcal{L}}_A = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Los axiomas de la teoría de campos son los axiomas universales para los dominios de integridad y el axioma $\forall x \exists y (x = 0 \vee xy = 1)$. Dado que todo dominio de integridad puede ser extendido a su campo de fracciones, los dominios de integridad son realmente subestructuras de los campos.

Sea $ACF$ el conjunto de axiomas de la teoría de campos junto con el axioma

$$\forall a_0 \dots a_{n-1} \exists x \ x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i = 0$$

para cada $n$. Claramente $ACF$ no es una teoría completa dado que no decide la característica del campo. Para cada $n$ sea $\phi_n$ la fórmula

$$\forall x \ \underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ veces}} = 0.$$

Dado $p$ un número primo, sea $ACF_p$ la teoría $ACF \cup \{\phi_p\}$ y sea $ACF_0 = ACF \cup \{\neg\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$.

El siguiente teorema es básico para desarrollar la teoría de modelos de los campos algebraicamente cerrados.

**Teorema 3.1.** *Sea $p$ un número primo o cero y sea $\kappa$ un cardinal no enumerable. La teoría $ACF_p$ es $\kappa$-categórica y completa.*

La categoricidad no contable de la teoría es el teorema de Steinitz, ver [Lan02]. La completitud de $ACF_p$ fue demostrada por Tarski, ver [Mar02], ésta puede ser vista como el principio de transferencia de Lefschetz el cual afirma que toda proposición valida en los complejos vale en cualquier campo algebraicamente cerrado de característica cero, en lenguaje modelo teórico: Dada $\varphi$ una sentencia en el lenguaje $\boldsymbol{\mathcal{L}}_A$,

$$\langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1\rangle \models \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad ACF_0 \models \varphi.$$

**Teorema 3.2.** *$ACF$ tiene eliminación de cuantificadores.*

La eliminación de cuantificadores para campos algebraicamente cerrados fue demostrada por Tarski quien dio un algoritmo explícito para eliminar los cuantificadores. Esta es la herramienta principal para entender los subconjuntos definibles en campos algebraicamente cerrados. Sea $F \models ACF$, analicemos primero el caso en que $Y \subseteq F$ es definible. Por eliminación de cuantificadores $Y$ es una combinación booleana finita de conjuntos de la forma $\{x \in F : f(x) = 0\}$, donde $f(X) \in F[X]$. Si $f(X)$ no es idénticamente cero, entonces el conjunto de ceros de $f(X)$ es finito. Esto muestra que $ACF$ es una teoría fuertemente minimal. Como veremos más adelante, también es posible decir cosas acerca de los subconjuntos definibles en potencias mayores de un campo algebraicamente cerrado.

**Definición 3.3.** Sea $F$ un campo, decimos que $Y \subseteq F^n$ es un *cerrado de Zariski* si él es una unión finita de conjuntos de la forma $\{\bar{x} \in F^n : \bigwedge_{i=1}^m f_i(\bar{x}) = 0\}$, donde $f_1, \ldots, f_m \in F[\bar{X}]$. El Teorema de la base de Hilbert nos muestra que una intersección infinita de cerrados de Zariski es un cerrado de Zariski, de esta forma obtenemos una topología en $F^n$ que llamaremos la *topología de Zariski* en $F^n$. Un subconjunto de $F^n$ lo llamamos *construible* si es una combinación Booleana finita de cerrados de Zariski. Un cerrado de Zariski se dice *irreducible* si él no puede escribirse como la unión de dos cerrados propios. Llamaremos *variedades* a los cerrados irreducibles.

**Definición 3.4.** Sea $F$ un campo.

- Dado un subconjunto $V \subseteq F^n$, definimos el *ideal* de $V$ como el conjunto $\mathcal{I}(V) = \{f \in F[X_1, \ldots, X_n] : f(\bar{x}) = 0$ para todo $\bar{x} \in V\}$. Si $V = \{\bar{a}\}$ denotaremos su ideal como $\mathcal{I}_{\bar{a}}$.
- Dado un ideal $I \subseteq F[X_1, \ldots, X_n]$, definimos los *ceros* de $I$ como el conjunto $\mathcal{Z}(\mathcal{I}) = \{\bar{\S} \in \mathcal{F}^\setminus : \{(\bar{\dashv}) = \prime$ para todo $f \in I\}$.

Dado $F$ un campo, no necesariamente modelo de $ACF$, vemos que los cerrados de Zariski en $F^n$ son exactamente los conjuntos de la forma $\mathcal{Z}(\mathcal{I})$ con $I$ ideal de $F[X_1, \ldots, X_n]$. No es un ejercicio difícil comprobar que $V \subseteq F^n$ es una variedad si y sólo si su ideal $\mathcal{I}(V)$ es un ideal primo de $F[X_1, \ldots, X_n]$, ver [Har77]. Dado que $F[X_1, \ldots, X_n]$ es un anillo Noetheriano, no existen cadenas infinitas descendentes de cerrados de Zariski, esto implica que todo cerrado de

Zariski es una unión finita de variedades y estas variedades son únicas, nuevamente referimos al lector a [Har77] para los detalles.

**Definición 3.5.** Sean $F$ un campo y $V \subseteq F^n$ un cerrado de Zariski.

- Definimos el *anillo de coordenadas* de $V$, el cual denotaremos por $F[V]$, como $F[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(V)$.
- Si $V$ es una variedad, entonces $F[V]$ es un dominio de integridad, definimos el *campo de funciones* de $V$ como el campo de fracciones de $F[V]$, este campo será denotado por $F(V)$.

Si $F$ es un campo algebraicamente cerrado, entonces la eliminación de cuantificadores nos dice que los subconjuntos definibles de $F^n$ son exactamente los subconjuntos construibles. El siguiente teorema de CHEVALLEY es la forma geométrica de ver la eliminación de cuantificadores.

**Teorema 3.6.** *Si $F$ es un campo algebraicamente cerrado y $X \subseteq F^n$ construible, entonces la proyección de $X$ sobre cualesquiera de sus componentes es un conjunto construible.*

A continuación definiremos la noción clásica de dimensión que se tiene en geometría algebraica.

**Definición 3.7.** Sea $F$ un campo algebraicamente cerrado. Sea $V \subseteq F^n$ una variedad. Sea $\mathcal{I}(V)$ el ideal primo correspondiente a $V$. La *dimensión de Krull* de $V$ es el máximo número natural $m$ tal que existe una cadena de ideales primos

$$\mathcal{I}(V) = I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots \subsetneq I_m \subsetneq F[X_1, \ldots, X_n].$$

Si $V$ tiene dimensión de Krull 0, entonces $\mathcal{I}(V)$ es un ideal maximal y $\mathcal{I}(V) = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$ para algún $(a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ y $V = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$, esto es consecuencia del Teorema de los ceros de Hilbert, ver los detalles en [Har77]. Dado $X \subseteq F^n$ cerrado de Zariski, no necesariamente irreducible, definimos la *dimensión de Krull* de $X$ como el máximo de las dimensiones de Krull de sus componentes irreducibles.

El siguiente teorema es una caracterización de la dimensión de Krull de una variedad, su demostración se puede encontrar en [AM80].

**Teorema 3.8.** *Si $F$ es un campo algebraicamente cerrado y $V \subseteq F^n$ es una variedad, entonces la dimensión de Krull de $V$ es igual al grado de trascendencia de su campo de funciones $F(V)$ sobre $F$.*

La siguiente es la definición clásica de independencia algebraica que existe en campos, notemos la similitud con la definición 2.5 que hicimos para las teorías $\omega$–estables.

**Definición 3.9.**Sea $F < \mathbb{F}$ una extensión de campos, por ejemplo, $\mathbb{F}$ puede ser el modelo monstruo de $ACF_0$ y $F$ un submodelo de este. Sean $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{F}$, diremos que $\bar{a}$ es *algebraicamente independiente* de $\bar{b}$ sobre $F$ si:

$$\text{tr. deg}_F F(\bar{a}) = \text{tr.deg}_{F(\bar{b})} F(\bar{a}).$$

Dado que $ACF_0$ es una teoría fuertemente minimal y por lo tanto $\omega$–estable, existe nociones modelo teóricas de dimensión e independencia, estas nociones coinciden con las clásicas que se tienen en geometría algebraica y que fueron previamente definidas.

Supongamos que $F$ es un campo algebraicamente cerrado y $\mathbb{F}$ es un modelo saturado con $F \prec \mathbb{F}$, es decir, $\mathbb{F}$ es el modelo monstruo de la teoría de $F$. Si $V \subseteq F^n$ es una variedad definida por ecuaciones polinomiales con coeficientes en $F$, entonces podemos considerar $V(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}^n$ definido como el conjunto de ceros en $\mathbb{F}$ del mismo sistema de ecuaciones que define a $V$. Por modelo completitud, $V(\mathbb{F})$ sigue siendo irreducible como subconjunto de $\mathbb{F}^n$ y por lo tanto $V(\mathbb{F})$ es una variedad en $\mathbb{F}^n$. Estaremos considerando puntos en $V(\mathbb{F})$ y tendremos en cuenta las siguientes convenciones: el rango y grado de Morley se calcula sobre $F$, la topología de Zariski sobre $V(\mathbb{F})$ está definida por polinomios en $F[X_1, \ldots, X_n]$, en particular no todos los puntos de $V(\mathbb{F})$ son cerrados; si $\bar{a} \in V(\mathbb{F})$ el ideal de polinomios $\mathcal{I}_{\bar{a}}$ que anulan a $\bar{a}$ es un ideal en $F[X_1, \ldots, X_n]$.

**Definición 3.10.** Sea $V \subseteq F^n$ una variedad definida por polinomios en $F[X_1, \ldots, X_n]$ y sea $\bar{a} \in V(\mathbb{F})$. Diremos que $\bar{a}$ es un *punto genérico* de $V$ sobre $F$ si $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}_{\bar{a}}$.

Intuitivamente podemos pensar los puntos genéricos de una variedad $V \subseteq F^n$ definida por polinomios en $F[X_1, \ldots, X_n]$, como los que capturan la información algebraica de la variedad: si un punto genérico satisface alguna propiedad expresada por medio de polinomios con coeficientes en $F$, entonces todos los puntos de la variedad satisfacen dicha propiedad. Si $V$ es un cerrado de Zariski reducible, el lema 3.11 nos permitirá definir lo que sería un punto genérico de $V$, veremos que estos corresponderán a los puntos genéricos de las componentes irreducibles de $V$ que tienen la misma dimensión que $V$.

El siguiente lema nos muestra un par de definiciones alternativas del concepto de punto genérico, una de ellas es usando la topología de Zariski en $V(\mathbb{F})$ definida sobre $F$ y la otra es en términos de la dimensión de la variedad. Como veremos en la siguiente sección esta última servirá de motivación para definir el concepto modelo teórico de punto genérico.

**Lema 3.11.** *Sea $V \subseteq F^n$ una variedad definida por polinomios en $F[X_1, \ldots, X_n]$ y sea $\bar{a} \in V(\mathbb{F})$. Las siguientes son equivalentes:*

(i) *$\bar{a}$ es un punto genérico de $V$ sobre $F$.*
(ii) *En la topología de Zariski de $V$ (definida a partir de $F$), $V = \overline{\{\bar{a}\}}$.*
(iii) *El homomorfismo $\Psi : F(V) \to F(\bar{a})$ definido por $X_i + \mathcal{I}(V) \to a_i$ y la identidad en $F$ es un isomorfismo, y por lo tanto el grado de trascendencia de $F(\bar{a})$ sobre $F$ es $\dim(V)$.*

*Demostración.* (i)⇒(ii). Razonando por contradicción supongamos que existe $\bar{b} \in V \setminus \overline{\{\bar{a}\}}$ luego existe una variedad $W \subsetneq V$ tal que $\bar{b} \notin W$ y $\bar{a} \in W$. Si $p_1, \ldots, p_m \in F[\bar{X}]$ son los polinomios que definen a $W$, entonces $p_k(\bar{b}) \neq 0$ para al menos un $k$ mientras que $p_i(\bar{a}) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, en particular $p_k(\bar{a}) = 0$ y por lo tanto $p_k \in \mathcal{I}_{\bar{a}} = \mathcal{I}(V)$, lo cual es una contradicción.

(ii)⇒(iii). Supongamos que $\Psi$ no es un isomorfismo, lo que implica que

$$\Psi \restriction_{F[V]} : F[\bar{X}]/\mathcal{I}(V) \to F[\bar{a}]$$

tampoco es un isomorfismo. Es claro que lo único que puede fallar es la inyectividad, por lo tanto existe $p \in F[\bar{X}]$ tal que $p \notin \mathcal{I}(V)$ y $p(\bar{a}) = 0$. Como $p \notin \mathcal{I}(V)$ existe $\bar{b} \in V$ tal que $p(\bar{b}) \neq 0$, lo que produce un abierto alrededor de $\bar{b}$ que no contiene a $\bar{a}$. Contradicción. (iii)⇒(i). Sea $\Phi : F[\bar{X}] \to F[\bar{a}]$ el homomorfismo sobreyectivo que manda a $X_i + \mathcal{I}(V)$ en $a_i$. Como $Ker\,\Phi = \mathcal{I}_{\bar{a}}$, $F[\bar{X}]/\mathcal{I}_{\bar{a}} \cong F[\bar{a}]$ y por lo tanto $(F[\bar{X}]/\mathcal{I}_{\bar{a}}) \cong F(\bar{a})$. Componiendo isomorfismos tenemos que

$$F(V) = (F[\bar{X}]/\mathcal{I}(V)) \cong (F[\bar{X}]/\mathcal{I}_{\bar{a}})$$

mediante un isomorfismo que manda a $X_i + \mathcal{I}(V)$ en $X_i + \mathcal{I}_{\bar{a}}$. Esto implica que $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}_{\bar{a}}$. ☑

**Corolario 3.12.** *Si $V \subseteq F^n$ una variedad definida por polinomios en $F[X_1, \ldots, X_n]$ y $\bar{a} \in V(\mathbb{F})$, entonces $RM(\bar{a}/F) = RM(V)$ si y sólo si $\bar{a}$ es un punto genérico de $V$.*

**Proposición 3.13.** *Si $V \subseteq F^n$ una variedad definida por polinomios en $F[X_1, \ldots, X_n]$, entonces $\deg_M(V) = 1$.*

*Demostración.* Supongamos que $\deg_M(V) > 1$, por lo tanto existen $\psi(\bar{v}) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_F$ tal que $V = \psi(F) \cup \neg\psi(F)$ y $RM(V) = RM(\psi) = RM(\neg\psi)$. Sean $p_1, p_2 \in S(F)$ extensiones no bifurcantes de $\psi$ y $\neg\psi$ respectivamente. Sean $\bar{a}, \bar{b} \in V(\mathbb{F})$ tales que $\bar{a}$ realiza $p_1$ y $\bar{b}$ realiza $p_2$, estos son puntos genéricos de $V$ sobre $F$ tales que $\bar{a} \in \psi(\mathbb{F})$ y $\bar{b} \in \neg\psi(\mathbb{F})$. Por eliminación de cuantificadores tenemos que $\psi(\bar{v})$ es equivalente a una fórmula de la forma

$$\bigvee_{k=1}^{l} \Big( \bigwedge_{i=1}^{m} f_{k,i}(\bar{v}) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{k,j}(\bar{v}) \neq 0 \Big)$$

donde los $f_{k,i}$'s y los $g_{k,j}$'s son polinomios con coeficientes en $F$. Entonces,

$$F \models \bigvee_{k=1}^{l} \Big( \bigwedge_{i=1}^{m} f_{k,i}(\bar{a}) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{k,j}(\bar{a}) \neq 0 \Big)$$

luego

$$F \models \bigwedge_{i=1}^{m} f_{\hat{k},i}(\bar{a}) = 0 \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} g_{\hat{k},j}(\bar{a}) \neq 0$$

para algún $\hat{k} \in \{1, \dots, l\}$. Por otro lado,

$$F \models \bigwedge_{k=1}^{l} \Big( \bigvee_{i=1}^{m} f_{k,i}(\bar{b}) \neq 0 \vee \bigvee_{j=1}^{n} g_{k,j}(\bar{b}) = 0 \Big)$$

en particular,

$$F \models \bigvee_{i=1}^{m} f_{\hat{k},i}(\bar{b}) \neq 0 \vee \bigvee_{j=1}^{n} g_{\hat{k},j}(\bar{b}) = 0.$$

Pero esto contradice el hecho de que $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}) = \mathcal{I}_{\bar{\mathfrak{a}}} = \mathcal{I}_{\bar{\mathfrak{b}}}$. ☑

## 4. Una visión modelo teórica del teorema de Weil

En esta sección demostraremos una versión débil de lo que en un principio uno podría pensar que sería el teorema de Weil en el caso $\omega$–estable.

**4.1. El teorema original de Weil.** El siguiente es el teorema original de Weil en geometría algebraica.

**Teorema 4.1.**[Teorema de Weil] *Sea $V$ una variedad irreducible definida sobre un campo $F$. Sea $f$ una función racional de $V \times V$ en $V$, la cual está definida sobre $F$ y satisface las siguientes condiciones:*

(G1) *Si $\bar{a}, \bar{b}$ son puntos genéricos independientes de $V$ sobre $F$ y $\bar{c} = f(\bar{a}, \bar{b})$, entonces $F(\bar{a}, \bar{b}) = F(\bar{b}, \bar{c}) = F(\bar{a}, \bar{c})$ (en particular $\bar{c}$ es un punto genérico de $V$ sobre $F$ e independiente de $\bar{a}$ y de $\bar{b}$ sobre $F$).*

(G2) *Si $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ son puntos en $V$ independientes y genéricos sobre $F$, entonces $f(f(\bar{a}, \bar{b}), \bar{c}) = f(\bar{a}, f(\bar{b}, \bar{c}))$.*

*Entonces existe un grupo algebraico $G$ definido sobre $F$ y un isomorfismo birracional $h : V \to G$ definido sobre $F$ tal que: para $\bar{a}, \bar{b} \in V$ genéricos independientes sobre $F$, $h(f(\bar{a}, \bar{b})) = h(\bar{a}) \cdot h(\bar{b})$.*

El teorema que HRUSHOVSKI obtiene en [Hru86] y que es considerado como la versión estable del teorema de Weil, no implica directamente el resultado original de WEIL, pero combinado con el siguiente teorema, también probado por HRUSHOVSKI, ver [Bou89], se obtiene el resultado original de WEIL.

**Teorema 4.2.** *Sean $F$ un campo algebraicamente cerrado y $(G, \cdot)$ un grupo interpretable en $F$, entonces $(G, \cdot)$ es definible isomorfo a un grupo algebraico sobre $F$.*

Vale la pena observar que ambos teoremas de HRUSHOVSKI hacen uso de los elementos imaginarios, una herramienta muy útil en teoría de modelos que no desarrollamos en este artículo.

**4.2. Puntos genéricos.** De ahora en adelante $\mathbb{M}$ será el modelo monstruo de alguna teoría $\omega$–estable. La definición que damos a continuación es motivada por el lema 3.11.

**Definición 4.3.** Sea $X \subseteq \mathbb{M}^n$ definible sobre $A$ con $\deg_M(X) = 1$. Sea $\bar{a} \in X$, diremos que $\bar{a}$ es un *punto genérico* de $X$ sobre $A$ si $RM(X) = RM(\bar{a}/A)$.

Usando propiedades del rango de Morley no es difícil demostrar que dado $X \subseteq \mathbb{M}^n$ definible sobre $A$, siempre existen puntos genéricos sobre cualquier superconjunto de $A$ con cardinalidad menor que la del monstruo.

Vale la pena observar que en variedades los puntos genéricos, como se definieron en el contexto algebraico de la sección anterior, coinciden con los puntos genéricos según esta nueva definición: lema 3.11 y el hecho que el rango de Morley coincide con la dimensión algebraica en $ACF_0$.

La pregunta natural que surge ahora, motivada como siempre por lo que ocurre en $ACF_0$, es: ¿dado un conjunto $X$ definible sobre $A$ y dados $\bar{a}$ y $\bar{b}$ puntos genéricos de $X$ sobre $A$, tienen ellos el mismo tipo sobre $A$? En $ACF_0$ este hecho es bastante conocido, incluso antes de que existiera la teoría de modelos, los algebristas sabían que dos puntos que satisfacen los mismos polinomios sobre un campo (lo cual es el caso de los puntos genéricos sobre la variedad que su ideal define), son indistinguibles desde el punto de vista algebraico; en términos modelo teóricos tienen el mismo tipo, la demostración es simplemente eliminación de cuantificadores. El resultado correspondiente que se logra en el contexto de $\omega$–estabilidad es el siguiente:

**Lema 4.4.** *Sea $X \subseteq \mathbb{M}^n$ definible sobre $A$ con $\deg_M(X) = 1$. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son puntos genéricos de $X$ sobre $A$, entonces $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$.*

*Demostración.* Sea $\varphi(\bar{v})$ la $\mathcal{L}_A$-fórmula que define a $X$. Razonemos por contradicción y supongamos que existe una $\mathcal{L}_A$-fórmula $\psi(\bar{v})$ tal que $\psi(\bar{v}) \in tp(\bar{a}/A)$ y $\neg\psi(\bar{v}) \in tp(\bar{b}/A)$. Claramente, $\varphi \wedge \psi \in tp(\bar{a}/A)$ y $\varphi \wedge \neg\psi \in tp(\bar{b}/A)$. Dado que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son puntos genéricos de $X$ sobre $A$,

$$RM(X) = RM(\varphi \wedge \psi) = RM(\varphi \wedge \neg\psi),$$

lo que contradice el hecho de que el grado de Morley de $X$ es 1. ☑

**Lema 4.5.** *Sea $X \subseteq \mathbb{M}^n$ definible sobre $A$ con $\deg_M(X) = 1$. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$, entonces $tp(\bar{a}, \bar{b}/A) = tp(\bar{b}, \bar{a}/A)$.*

*Demostración.* Sea $\varphi$ la $\mathcal{L}_A$-fórmula que define a $X$. De nuevo, razonando por contradicción, supongamos que existe una $\mathcal{L}_A$-fórmula $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ tal que $\psi(\bar{v}, \bar{w}) \in tp(\bar{a}, \bar{b}/A)$ y $\neg\psi(\bar{v}, \bar{w}) \in tp(\bar{b}, \bar{a}/A)$. Claramente,

$$\varphi(\bar{w}) \wedge \psi(\bar{a}, \bar{w}) \in tp(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) \text{ y } \varphi(\bar{w}) \wedge \neg\psi(\bar{b}, \bar{w}) \in tp(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}).$$

Dado que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$,

$$RM(X) = RM(\varphi(\bar{w}) \wedge \psi(\bar{a}, \bar{w})) = RM(\varphi(\bar{w}) \wedge \neg\psi(\bar{b}, \bar{w})).$$

Por el lema 4.4 $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{b}/A)$ y por ende existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}/A)$ tal que $f(b) = a$. Dada la invarianza del rango de Morley bajo automorfismos tenemos que

$$RM(X) = RM(\varphi(\bar{w}) \wedge \psi(\bar{a}, \bar{w})) = RM(\varphi(\bar{w}) \wedge \neg\psi(\bar{a}, \bar{w})),$$

lo que contradice el hecho de que el grado de Morley de $X$ es 1. ☑

**Lema 4.6.** *Sea $X \subseteq \mathbb{M}^n$ definible sobre $A$ con $\deg_M(X) = 1$. Si $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in X$ y se cumple que:*

- *$\bar{b}, \bar{c}$ son puntos genéricos sobre $A$.*
- *$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{b}$ y $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{c}$,*

*entonces,*

(i) $tp(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) = tp(\bar{c}/A \cup \{\bar{a}\})$.
(ii) $tp(\bar{a}, \bar{b}/A) = tp(\bar{a}, \bar{c}/A)$.

*Demostración.*

(i) Como $\deg_M(X) = 1$ y $\bar{b}, \bar{c}$ son puntos genéricos de $X$ sobre $A$ tenemos que $\deg_M(tp(\bar{b}/A)) = \deg_M(tp(\bar{c}/A)) = 1$. Por el teorema 2.4 (ii) $tp(\bar{b}/A)$ tiene una única extensión no bifurcante en $S_n(A \cup \{\bar{a}\})$, por otro lado $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{a}$ luego $tp(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\})$ es la única extensión no bifurcante de $tp(\bar{b}/A)$. Este mismo argumento muestra que $tp(\bar{c}/A \cup \{\bar{a}\})$ es la única extensión no bifurcante de $tp(\bar{c}/A)$. Por el lema 4.4 $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{c}/A)$ y por lo tanto $tp(\bar{b}/A \cup \{\bar{a}\}) = tp(\bar{c}/A \cup \{\bar{a}\})$.
(ii) Se sigue de (i). ☑

**Lema 4.7.** *Sea $X \subseteq \mathbb{M}^n$ definible sobre $A$ con $\deg_M(X) = 1$. Si $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ son puntos genéricos de $X$ sobre $A$, $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{b}$ y $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_A \bar{d}$, entonces $tp(\bar{a}, \bar{b}/A) = tp(\bar{c}, \bar{d}/A)$.*

*Demostración.* Por el lema 4.4 $tp(\bar{a}/A) = tp(\bar{c}/A)$ y por homogeneidad existe $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}/A)$ tal que $f(a) = c$. Sea $h = f(b)$, dado que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$ también lo son $\bar{c}$ y $\bar{h}$, luego por el lema **??** tenemos que

$$tp(\bar{a}, \bar{b}/A) = tp(\bar{c}, \bar{h}/A) = tp(\bar{c}, \bar{d}/A). \quad ☑$$

**4.3. Versión débil del teorema de Weil en teorías $\omega$–estables.** Sea $X \subseteq \mathbb{M}$ definible sobre $A \subseteq \mathbb{M}$ con $\deg_M(X) = 1$. Sea $f$ una función de $X \times X$ en $X$, definida por una fórmula en el vocabulario $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. Consideremos la siguiente condición sobre $f$:

(G1) Si $a$, $b$ son puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$ y $c = f(a, b)$ entonces $dcl(A \cup \{a, b\}) = dcl(A \cup \{a, c\}) = dcl(A \cup \{b, c\})$ y $tp(a, b/A) = tp(a, c/A) = tp(b, c/A)$, en particular se tiene que $tp(a/A) = tp(b/A) = tp(c/A)$.

Esta condición implica que cualesquiera dos de los puntos $a$, $b$, $c$ son genéricos independientes de $X$ sobre $A$.

Sean $a$, $b$, $d$ puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$, $(G1)$ implica que $(f(a,b),d)$ y $(a,f(b,d))$ son dos parejas de puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$. Entonces, si asumimos $(G1)$, la siguiente condición sobre $f$ tiene sentido:

(G2) Si $a$, $b$, $d$ son puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$, entonces:

$$f(f(a,b),d) = f(a,f(b,d)).$$

Esta es, por supuesto, la condición de asociatividad para $f$, postulada solamente para puntos genéricos independientes.

Si (G1) y (G2) se satisfacen diremos que $f$ es una *ley normal interna de composición* en $X$ y que con esta ley $X$ es un *pregrupo*. Escribiremos $a \cdot b$ para denotar $f(a,b)$.

**Teorema 4.8.** *Sea $X$ un pregrupo definido sobre $A$. Existe una única función $\phi$ de $X$ en $X$, la cual está definida sobre $A$ y es tal que, si definimos $s^{-1} = \phi(s)$ para todo $s$ en $X$ en el cual $\phi$ esté definida, las siguientes condiciones valen cuando $a$, $b$ son puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$:*

(I) $dcl(A \cup \{a\}) = dcl(A \cup \{a^{-1}\})$ *y* $tp(a/A) = tp(a^{-1}/A)$.
(II) $(a^{-1})^{-1} = a$
(III) $b = (a^{-1}) \cdot (a \cdot b)$
(IV) $a = (a \cdot b) \cdot (b^{-1})$
(V) $(a \cdot b)^{-1} = (b^{-1}) \cdot (a^{-1})$

*Demostración.* Sea $c = a \cdot b$, como $dcl(A \cup \{b\}) \subseteq dcl(A \cup \{a,c\})$, existe una fórmula $\varphi(x,y,z)$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ tal que

$$\mathbb{M} \models \varphi(a,c,b) \wedge \forall v(\varphi(a,c,v) \to v = b).$$

De forma similar, existe $\psi(x,y,z)$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ tal que

$$\mathbb{M} \models \psi(c,b,a) \wedge \forall v(\psi(c,b,v) \to v = a).$$

Sea $d$ genérico en $X$ sobre $A \cup \{a,b,c\}$ (observemos que $d$ es genérico sobre $A$ e independiente de $a$, $b$ y $c$ sobre $A$), sean $\hat{b} = b \cdot d$, $\hat{c} = c \cdot d$; por asociatividad se tiene que $\hat{c} = a \cdot \hat{b}$. Por el lema 4.5, $tp(b,c/A) = tp(c,b/A)$ luego existe un único $u \in X$ tal que $\mathbb{M} \models \psi(b,c,u)$, es genérico sobre $A$ e independiente de $b$ y $c$ sobre $A$; y satisface $b = u \cdot c = u \cdot (a \cdot b)$. Por $(G1)$, esto implica que $dcl(A \cup \{u,c\}) = dcl(A \cup \{b,c\})$ y que $tp(u,c/A) = tp(b,c/A)$. De esta forma $u$, $c$, $d$ resultan ser puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$. Por $(G2)$, tenemos que $(u \cdot c) \cdot d = u \cdot (c \cdot d)$, lo cual puede ser escrito como $\hat{b} = u \cdot \hat{c}$, esto muestra que $u$ y $\hat{c}$ son puntos genéricos independientes sobre $A$. La última relación implica, por $(G1)$, que $dcl(A \cup \{u\}) \subseteq dcl(A \cup \{\hat{b},\hat{c}\})$ y como $\hat{c} = a \cdot \hat{b}$ podemos concluir que $dcl(A \cup \{u\}) \subseteq dcl(A \cup \{a,\hat{b}\})$. Por otro lado, $(G1)$ implica que $b$ y $\hat{b} = b \cdot d$ son puntos genéricos independientes sobre $A \cup \{a\}$ y por lo tanto $dcl(A \cup \{a\}) = dcl(A \cup \{a, b\}) \cap dcl(A \cup \{a, \hat{b}\})$, con esto tenemos que $dcl(A \cup \{u\}) \subseteq dcl(A \cup \{a\})$. Esta inclusión implica que existe una fórmula $\eta(x, y)$ en $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ tal que

$$\mathbb{M} \models \eta(a, u) \wedge \forall v(\eta(a, v) \rightarrow v = u).$$

Como $tp(b, c/A) = tp(c, b/A)$, existe $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathbb{M}/A)$ tal que $\sigma(b) = c$ y $\sigma(c) = b$, por lo tanto $\sigma(a) = u$ y $\sigma(u) = a$. Esto muestra que $tp(a, u/A) = tp(u, a/A)$ por lo que

$$\mathbb{M} \models \eta(u, a) \wedge \forall v(\eta(u, v) \rightarrow v = a)$$

y por lo tanto $dcl(A \cup \{a\}) \subseteq dcl(A \cup \{u\})$; de esta forma tenemos que $dcl(A \cup \{a\}) = dcl(A \cup \{u\})$. Definiendo $\phi(a) = u$, donde $\phi$ es una función parcial de $X$ en $X$, tenemos probado (i), (ii) y (iii). Nuevamente, por $(G1)$, cualesquiera dos de los puntos $a$, $b$, $c$ con $c = a \cdot b$ determinan el tercero de forma única siempre que se tenga que son genéricos independientes sobre $A$; de esta propiedad se sigue que $u$ está completamente determinado por la relación $b = u \cdot c$ y por lo tanto $\phi$ queda determinada por (iii). De ahora en adelante escribiremos $a^{-1}$ para denotar $\phi(a)$.

Sea $g$ genérico en $X$ sobre $A \cup \{a, b\}$, sea $s = (a \cdot b) \cdot g = a \cdot (b \cdot g)$. Como $a$ y $b \cdot g$ son puntos genéricos independientes sobre $A$, $s = a \cdot (b \cdot g)$ es equivalente a $b \cdot g = a^{-1} \cdot s$, por (iii); y de nuevo por (iii), esto es equivalente a $g = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot s)$ ya que $b$ y $b \cdot g$ son puntos genéricos independientes sobre $A$ por $(G1)$. Por (i), los puntos $a^{-1}$, $b^{-1}$ y $g$ resultan ser genéricos independientes sobre $A$ y por $(G2)$ la última relación puede escribirse como $g = (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot s$. Ya que $s = (a \cdot b) \cdot g$, y, $a \cdot b$ y $g$ son puntos genéricos independientes sobre $A$, esto muestra que $b^{-1} \cdot a^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$, lo cual es (v). Como $c = a \cdot b$ esto puede ser escrito como $c^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$; por (iii) esto es equivalente a $a^{-1} = b \cdot (c^{-1})$. Aplicando (v) a esta última relación obtenemos $a = (c^{-1})^{-1} \cdot (b^{-1})$, en virtud de (ii) obtenemos (iv). ☑

Los argumentos en este teorema son en buena parte "traducción" del caso algebraico. El siguiente resultado es la versión débil del teorema de Weil en teorías $\omega$–estables que logramos demostrar.

**Teorema 4.9.** [Teorema débil de Weil en teorías $\omega$–estables] *Sea $X \subseteq \mathbb{M}$ definible sobre $A \subseteq \mathbb{M}$ con $\deg_M(X) = 1$. Supongamos que $f$ es una función definida sobre todo $X \times X$ tal que:*

$(G1^*)$ *Si $a, b \in X$ y $c = f(a, b)$, entonces*

$$dcl(A \cup \{a, b\}) = dcl(A \cup \{a, c\}) = dcl(A \cup \{b, c\}).$$

$(G2^*)$ *Si $a, b, d \in X$, entonces*

$$f(f(a, b), d) = f(a, f(b, d)).$$

*Entonces existe $Y \subseteq X$ definible con $RM(Y) = RM(X)$ tal que $\langle Y, f \restriction_Y \rangle$ es un grupo.*

*Demostración.* La demostración se va a llevar a cabo de la siguiente manera: El teorema 4.8 garantiza que dado $a$ un punto genérico de $X$ sobre $A$ existe $a^{-1} \in X$ genérico sobre $A$ (de hecho definible a partir de $a$), tal que $a^{-1}$ se comporta como un inverso. Lo primero que vamos a hacer es mostrar un buen candidato para ser la identidad del grupo, para eso veremos que la función $a \to a^{-1} \cdot a$, definida cuando $a$ es genérico sobre $A$, es constante; este elemento al que llamaremos $e$ es el candidato obvio a ser la identidad de grupo. Luego definiremos a $Y$ y nos ocuparemos de encontrar inversos para los puntos no genéricos, con lo que quedará completa la demostración.

Sean $a$ y $b$ puntos genéricos independientes de $X$ sobre $A$ y sea $c = a \cdot b$, entonces

$$\begin{aligned} c^{-1} \cdot c &= (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot c \quad \text{teorema 4.8, (v)} \\ &= b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot c) \quad \text{por } (G2^*) \\ &= b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot (a \cdot b)) \\ &= b^{-1} \cdot b \quad \text{teorema 4.8, (iii).} \end{aligned}$$

Dado que $b^{-1} \in dcl(A \cup \{b\})$ y $c^{-1} \in dcl(A \cup \{c\})$ la $\boldsymbol{\mathcal{L}}_A$-fórmula que dice $c^{-1} \cdot c = b^{-1} \cdot b$ está en $tp(c, b/A)$, luego por el lema 4.7 $x^{-1} \cdot x = y^{-1} \cdot y$ para cualesquiera $x$ y $y$ genéricos independientes de $X$ sobre $A$. Veamos ahora que $a \to a^{-1} \cdot a$ es constante cuando $a$ es genérico sobre $A$. Sean $a$ y $b$ puntos genéricos de $X$ sobre $A$ (no necesariamente independientes), sea $c \in X$ genérico sobre $A$ tal que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A c$ y $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A c$, luego $a^{-1} \cdot a = c^{-1} \cdot c$ y $b^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot c$ de donde tenemos el resultado por transitividad de la igualdad. Haciendo $e = a^{-1} \cdot a$ y reemplazando $a$ por $a^{-1}$, por la propiedad (ii) del teorema 4.8 tenemos que $e = a \cdot a^{-1}$. Ahora veamos que $e$ funciona como identidad para los puntos genéricos. Sea $a$ un punto genérico y sea $b$ un punto genérico independiente de $a$ sobre $A$.

$$\begin{aligned} a \cdot e &= a \cdot (b \cdot b^{-1}) \\ &= (a \cdot b) \cdot b^{-1} \quad \text{por } (G2^*) \\ &= a \quad \text{teorema 4.8 (iv).} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e \cdot b &= (a^{-1} \cdot a) \cdot b \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot b) \quad \text{por } (G2^*) \\ &= b \quad \text{teorema 4.8 (iii).} \end{aligned}$$

Por lo tanto las fórmulas que dicen $a \cdot e = a$ y $e \cdot b = b$ están en los correspondientes tipos de $a$ y $b$ sobre $A$, luego, por el lema 4.4 estas propiedades se transfieren a todos los genéricos. Sea $Y = \{x \in X : \mathbb{M} \models e \cdot x = x\}$. Es claro que $Y$ es un subconjunto definible de $X$ cerrado bajo $f$. Como todos los puntos genéricos de $X$ están en $Y$, debemos tener que $RM(Y) = RM(X)$.

Pasemos ahora a ocuparnos de los puntos no genéricos de $Y$.

Sea $a \in Y$ no genérico. Sea $b \in Y$ genérico sobre $A \cup \{a\}$. Por $(G1^*)$, $RM(b/A \cup \{a\}) = RM(b \cdot a/A \cup \{a\})$ y por lo tanto $b \cdot a$ es genérico. Definimos

$$a^{-1} := (b \cdot a)^{-1} \cdot b.$$

Observemos que $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$. Primero probemos que este inverso está bien definido. Sea $c \in Y$ genérico sobre $A \cup \{a\}$.

$$\begin{aligned} a^{-1} &= (b \cdot a)^{-1} \cdot b \\ (b \cdot a) \cdot a^{-1} &= b \\ a \cdot a^{-1} &= b^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

Como $c$ es genérico sobre $A$,

$$\begin{aligned} c^{-1} \cdot c &= a \cdot a^{-1} \\ c &= c \cdot a \cdot a^{-1} \\ (c \cdot a)^{-1} \cdot c &= a^{-1} \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora que $a^{-1}$ es el inverso de $a$.

$$\begin{aligned} a^{-1} \cdot a &= ((b \cdot a)^{-1} \cdot b) \cdot a \\ &= (b \cdot a)^{-1} \cdot (b \cdot a) \quad \text{por } (G2^*) \\ &= e \quad \text{ya que } b \cdot a \text{ es genérico.} \quad \boxtimes \end{aligned}$$

**Corolario 4.10.** *Sea $X \subseteq \mathbb{M}$ definible sobre $A \subseteq \mathbb{M}$ con $\deg_M(X) = 1$. Supongamos que $f$ es una función definida sobre todo $X \times X$ que satisface $(G1^*)$, $(G2^*)$ y es genéricamente conmutativa. Entonces existe $Y \subseteq X$ definible con $RM(Y) = RM(X)$ tal que $\langle Y, f \restriction_Y \rangle$ es un grupo conmutativo.*

*Demostración.* Por el Teorema 4.9, $\langle Y, f \restriction_Y \rangle$ es un grupo. Observemos que $(G1^*)$ implica que dado $a \in Y$, $a$ se puede escribir como el producto de dos genéricos sobre $A$. Ahora veamos que $\langle Y, f \restriction_Y \rangle$ es un grupo conmutativo. Sean $a, b \in Y$, escribimos $a = g_1 \cdot h_1$ y $b = g_2 \cdot h_2$, donde $g_1, h_1, g_2$ y $h_2$ son puntos genéricos de $Y$ sobre $A$. Entonces,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= g_1 \cdot h_1 \cdot g_2 \cdot h_2 \\ &= g_1 \cdot g_2 \cdot h_1 \cdot h_2 \\ &= g_2 \cdot g_1 \cdot h_2 \cdot h_1 \\ &= g_2 \cdot h_2 \cdot g_1 \cdot h_1 \\ &= b \cdot a. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

## Referencias

[Ax68] James Ax. *The elementary theory of finite fields.* Annals of Mathematics, **88** (1968) 239–271.

[AM80] MICHAEL F. ATIYAH & I.G. MACDONALD. *Introducción al Álgebra Conmutativa.* Editorial Reverté, S.A., 1980. Traducido del inglés.

[Bou89] ELISABETH BOUSCAREN. *Model Theoretic Versions of Weil's Theorem on Pregroups*, en [NP89], 177–185, 1989.

[Bou98] ELISABETH BOUSCAREN(Ed.) *Model Theory and Algebraic Geometry: An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell–Lang conjecture.* Springer–Verlag, 1998.

[Bue96] STEVEN BUECHLER. *Essential Stability Theory.* Springer–Verlag, 1996.

[Cas03] ENRIQUE CASANOVAS. *The recent history of model theory.* `http://www.ub.es/modeltheory/documentos/HistoryMT.pdf`

[Cel07] JORGE CELY. *Una visión modelo teórica del teorema de Weil.* Tesis de pregrado, Universidad de los Andes, 2007

[CK90] C. C. CHANG & H. J. KEISLER. *Model Theory.* North–Holland, tercera edición, 1990.

[vdD90] LOU VAN DEN DRIES. *Weil's group chunk theorem: A topological setting.* Illinois Journal of Mathematics, **34** (1990), 127–139.

[Har77] ROBIN HARTSHORNE. *Algebraic Geometry.* Springer–Verlag, 1977.

[Hru86] EHUD HRUSHOVSKI. *Contributions to Stable Model Theory.* Ph.D. Tesis, Universidad de California, Berkeley, 1986.

[Lan02] SERGE LANG. *Algebra.* Springer–Verlag, tercera edición revisada, 2002.

[Mar02] DAVID MARKER. *Model Theory: An Introduction.* Springer–Verlag, 2002.

[MMP06] DAVID MARKER, MARGIT MESSMER & ANAND PILLAY. *Model Theory of Fields.* Lecture Notes in Logic 5, Association for Symbolic Logic, segunda edición, 2005.

[Mor65] MICHAEL MORLEY. *Categoricity in Power.* Transactions of the American Mathematical Society,**114** (1965), 514–538.

[NP89] ALI NESIN & ANAND PILLAY. *The Model Theory of Groups.* Notre Dame Mathematical Lectures 11. Notre Dame Press, 1989.

[Pil98] ANAND PILLAY. *Model theory of algebraically closed fields*, en [Bou98], 61–84, 1998.

[Poi01] BRUNO POIZAT. *Stable Groups.* NUR AL-MANTIQ WAL-MA'RIFAH. American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs, 87, 2001. Traducido del francés.

[She90] SAHARON SHELAH. *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models.* North-Holland, segunda edición revisada, 1990.

[Wei55] ANDRÉ WEIL. *On algebraic groups of transformations.* American Journal of Mathematics,**77** (1955) 355–391.

[Wei62] ANDRÉ WEIL. *Foundations of Algebraic Geometry.* American Mathematical Society. Colloquium Publications, 29 Edición revisada y aumentada, 1962.

(Recibido en marzo de 2008. Aceptado para publicación en diciembre de 2008)

JORGE CELY
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, BOGOTÁ, COLOMBIA
*e-mail:* `celyje@gmail.com`