Lecturas Matemáticas
Volumen **35** *(2) (2014), páginas 115–150*
ISSN 0120–1980

El problema del espacio, formas de rango superior y geometría de rango superior

The space problem, higher–rank forms and higher–rank geometry

Victor Tapia
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Thatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen.

Der nächst einfache Fall würde wohl die Mannigfaltigkeiten umfassen, in welchen sich das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdrucke vierten Grades ausdrücken lässt.

Riemann, 1854

Resumen. Las formas de rango superior son generalizaciones de las formas cuadráticas, mientras que la geometría de rango superior es una generalización de la geometría riemanniana (la cual está basada en una forma cuadrática: el tensor métrico). Hasta el momento existen pocos resultados matemáticos que permitan caracterizar las formas y la geometría de rango superior y sus propiedades. Se presentan las motivaciones, matemáticas y físicas, para considerar estas generalizaciones y algunos resultados obtenidos hasta el momento.

Key words and phrases. Higher–rank forms, higher–rank geometry.

Abstract. Higher–rank forms are generalisations of quadratic forms, while higher–rank geometry is a generalisation of Riemannian geometry (which is based on a quadratic form: the metric tensor). Until now there are few mathematical results allowing a complete characterisation of higher–rank forms, higher–rank geometry and their properties. We present the mathematical and physical motivations in order to consider these generalisations and some of the results obtained up to the moment.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 53-00, 15-00, 83D05

1. **Introducción**

El *problema del espacio* consiste en determinar cuál es la geometría del espacio físico, y por qué se da tal geometría y no otra.

El problema del espacio ya había sido abordado, en forma tácita, en la antigua Grecia,dado que se afirmaba que la geometría del espacio físico era la geometría euclideana. Durante la Edad Media y el Renacimiento la formulación axiomática de la geometría euclideana comenzó a ser objeto de debate, lo cual concluyó en la aparición de la geometría no–euclideana a principios del siglo XIX. La conclusión fue que existían dos tipos de geometría: la *geometría física*, la que se da en la naturaleza, y la *geometría matemática*, la cual se puede formular en forma puramente axiomática, lógica y no necesariamente tiene una contraparte en la naturaleza.

En 1854 Riemann [30] trató de responder a la pregunta de por qué todas estas geometrías eran lógica y matemáticamente posibles. Aunque Riemann no logró dar una respuesta definitiva a la pregunta, sí logró formular la pregunta en un lenguaje matemático más preciso y, además, elaboró los fundamentos de lo que posteriormente sería la geometría riemanniana. Asimismo, una observación importante hecha por Riemann es que la geometría física se tiene que determinar por medios puramente empíricos, experimentales y observacionales, y no se puede decidir *a priori*.

En 1868 Helmholtz [45] intentó determinar cuál de todas las posibles geometrías riemannianas es la que se da en la naturaleza. La conclusión de su argumento, basado en la existencia de cuerpos rígidos, fue que la única geometría física posible era la euclideana. El trabajo de Helmholtz tiene el mérito de ser el primero en el cual se aborda en forma explícita el problema del espacio. No obstante, el argumento de Helmholtz es falaz dado que se presupone justamente aquello que se desea demostrar; por lo tanto, no se puede considerar como un argumento válido.

Aun cuando el problema del espacio no había sido resuelto en forma satisfactoria, éste fue olvidado hasta principios del siglo XX cuando Einstein en 1915 [10] desarrolló la teoría de la Relatividad General, la cual afirma que la geometría física es riemanniana. La pregunta entonces ya no era determinar cuál geometría riemanniana se da en la naturaleza, sino determinar por qué tal geometría es riemanniana, es decir, basada en formas cuadráticas.

El problema del espacio fue reformulado por Weyl en 1923 [46], quien además le dio el nombre *das Raumproblem*, es decir, *el problema del espacio*, con el cual se conoce desde entonces. Para Weyl, un problema más importante que explicar por qué la geometría física es riemanniana era el de explicar el carácter pitagórico, es decir, cuadrático, de la geometría física. Sin embargo, Weyl estaba realmente más interesado en justificar la geometría que él había introducido recientemente. La geometría de Weyl, que posteriormente llevó al concepto de teorías de gauge, está basada en el concepto de grupo, en el cual una operación de composición binaria es fundamental. De ahí el interés de Weyl por el carácter pitagórico de la geometría física.

El problema del espacio se traduce en el problema de determinar las relaciones métricas que existen entre los distintos puntos del espacio físico, lo cual es una tarea que corresponde a la física y a la cosmología. De hecho, Sandage [34] se refiere al problema como *geometría experimental*.

La física teórica tuvo grandes desarrollos durante el siglo XX. Además de la Relatividad General, se desarrolló la mecánica cuántica, la cual fue capaz de explicar los procesos atómicos y moleculares. La cuantización del campo electromagnético dio origen a la electrodinámica cuántica, cuyas predicciones son hasta ahora las más precisas de la física. Los intentos por abordar el problema del espacio se enmarcan dentro de los marcos teóricos de la Relatividad General y de la mecánica cuántica. Sin embargo, los argumentos de la física teórica que buscan dar respuesta al problema del espacio también son falaces.

Por otra parte, a pesar de los grandes éxitos de la física teórica durante el siglo XX, la cuantización de la gravitación, debido a varias inconsistencias matemáticas, no ha sido posible. Esto ha hecho que en física teórica se empiecen a considerar teorías en las cuales el campo gravitacional aparece ya cuantizado, lo cual llevó, entre otras, al desarrollo de *la teoría de cuerdas*. La necesidad de reconciliar la renormalizabilidad, la invariancia de escala y la integrabilidad obliga a que esta teoría se deba formular en un espacio de dos dimensiones. Sin embargo, dos es bastante diferente de cuatro, la dimensión aceptada del espacio–tiempo. Este hecho y la falta de un sustento experimental de la teoría de cuerdas han obligado a nuevas consideraciones teóricas.

Debido a un notable teorema [40], la integrabilidad se puede obtener en cuatro dimensiones si se considera una geometría de cuarto rango, es decir, una geometría en la cual la distancia está definida por una forma cuártica. Otros desarrollos independientes en la física teórica de altas energías también han mostrado la necesidad de considerar una geometría de rango superior. En forma concomitante se deben considerar campos de spin superior, campos de spin fraccionario y gravedad de cuarto rango. Por lo tanto, se hace necesario el estudio de las formas de rango superior y de la geometría de rango superior.

El estudio de la geometría de rango superior, y de las formas de rango superior, es reciente. De hecho, gran parte de las matemáticas está basada en el concepto de formas cuadráticas y de operaciones binarias. Pero, cuando se intenta ir a formas cúbicas, cuárticas o de algún orden superior, y a operaciones de una aridad superior, aparecen grandes dificultades técnicas. El propósito de este artículo es describir algunos de los desarrollos alcanzados en esta dirección.

En la primera parte se muestran los desarrollos convencionales relacionados con las formas cuadráticas, la geometría riemanniana y los resultados básicos de la física. La selección de temas y de enfoques se ha hecho de manera tal que sean evidentes las diferencias que aparecen cuando se consideran las formas y la geometría de rango superior. La segunda parte de este trabajo está dedicada a presentar algunos resultados para formas y geometría de rango superior y sus aplicaciones a la física.

2. **Geometría euclideana**

Las primeras referencias a la geometría se pueden encontrar en Babilonia y Egipto. Pero fueron los griegos quienes comenzaron el estudio sistemático de objetos tales como líneas, planos, polígonos, círculos, secciones cónicas y esferas, y lograron, a partir de muy pocas suposiciones acerca de estos objetos, obtener un gran número de resultados.

Las suposiciones de los griegos acerca de puntos, líneas y planos, involucraban una doble idealización de las relaciones entre puntos, barras rígidas y superficies planas. En primer lugar, se despreciaba la extensión de los puntos como también el grosor de las barras y de las superficies. En segundo lugar, se suponía que la longitud de las barras, rectas, se podía hacer tan grande como se quisiera.

Los resultados de los estudios geométricos en la antigua Grecia fueron resumidos por EUCLIDES en *Los Elementos*, en el siglo III antes de nuestra era. Por muchos siglos *Los Elementos* de EUCLIDES fueron el paradigma del rigor matemático y los mejores textos de geometría estaban escritos siguiendo el estilo de la obra de EUCLIDES.

EUCLIDES estructuró su geometría de acuerdo con el *método deductivo* en el cual las definiciones, axiomas y postulados sirven de base para los teoremas. Entre ellos el Postulado de las Paralelas[1] es especial en el sentido de que es uno de los aspectos más polémicos de la geometría euclideana. De acuerdo con el Postulado de las Paralelas, dos líneas son paralelas si se encuentran en un mismo plano y, si se prolongan en forma indefinida en ambas direcciones, nunca se intersectan en ninguna de las dos direcciones. El Postulado de las Paralelas no es suficientemente evidente como para ser aceptado en forma intuitiva, como sucede con los otros postulados, y de ahí los múltiples intentos de demostrarlo a partir de otros postulados y teoremas de la geometría.

La epistemología mejor formulada en esa época era la de ARISTÓTELES, en la cual se hace una clara distinción entre conceptos “primitivos” y “derivados”. De la misma manera se hace una distinción entre los postulados (afirmaciones primitivas) y los teoremas (afirmaciones derivadas). Los teoremas se debían demostrar, mientras que los postulados simplemente se suponían y aceptaban

[1] Este postulado también se conoce como ‘postulado de Euclides’ o ‘quinto postulado’.

tal como eran. Los postulados de Euclides estaban elegidos de manera tal que garantizaban la existencia de los conceptos geométricos usuales.

Los griegos intentaron desarrollar la geometría a partir de supuestos que no involucraran suposiciones *a priori* acerca de la naturaleza de la geometría. Pero, una teoría deductiva, tal como lo es la geometría, contiene conceptos que, dentro de la teoría misma, quedan indefinidos, y de proposiciones que, dentro de esta misma teoría, no se pueden demostrar. Es este enfoque axiomático el que se encuentra en la estructura lógica de *Los Elementos* de Euclides.

Desde una perspectiva contemporánea la geometría euclideana se puede caracterizar como una geometría en la cual es válido el Teorema de Pitágoras, el cual afirma que la distancia entre dos puntos se obtiene como la suma de los cuadrados de las distancias a lo largo de direcciones independientes. La fórmula correspondiente es

$$c^2 = a^2 + b^2 \,. \tag{2.1}$$

Es esta propiedad pitagórica de la geometría euclideana la que marca todo el desarrollo posterior, no sólo de la geometría, sino que también, en general, de gran parte de las matemáticas.

3. La geometría en el Renacimiento

Durante el Renacimiento, uno de los problemas que seguía preocupando a los geómetras era la presunta dependencia del Postulado de las Paralelas de los otros postulados.

En 1773 (año de su muerte) Saccheri [33] publicó el tratado *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* [*Euclides reivindicado de toda mancha*] en donde por primera vez no se supone la validez del Postulado de las Paralelas.

Saccheri habla de tres hipótesis: la del ángulo obtuso, la del ángulo recto y la del ángulo agudo, de las cuales una y sólo una puede ser válida. Todas las demostraciones son correctas y en consecuencia todos los teoremas de Saccheri son válidos. Hoy se sabe que estas geometrías tienen la misma consistencia lógica que la geometría euclideana. Saccheri demostró rigurosamente sus teoremas, pero nunca creyó que su nueva geometría estuviera exenta de alguna contradicción.

La fuerza de la intuición hacía parecer irreal la geometría no–euclideana, lo cual impidió que Saccheri creyera lo que su razón había descubierto.

La característica distintiva de los escritos geométricos de Saccheri se encuentra en su método de demostración lógica, el cual es simplemente un método particular de razonamiento, ya usado por Euclides, el cual consiste en suponer como hipótesis que la proposición que se va a demostrar es falsa, llegar a una contradicción, y de esta manera llegar a que la proposición original debe ser verdadera. Adoptando esta idea SACCHERI supone que el Postulado de las Paralelas es falso y busca algún resultado que le permita afirmar la verdad del postulado.

El aporte más valioso y profundo de SACCHERI a la resolución de la problemática planteada por el Postulado de las Paralelas fue su descubrimiento de un método adecuado para asegurar que se lograría el esclarecimiento de la cuestión propuesta.

Tanto en el *Euclides ab omni naevo vindicatus* como en *Los Elementos* se encuentra un sistema axiomático en el cual los términos o conceptos se toman del mundo físico y cuyos sucesivos teoremas enuncian proposiciones verdaderas del espacio físico. Hay que tener en cuenta esta filosofía de las matemáticas si se quiere evaluar históricamente el avance obtenido con la creación de la geometría no–euclideana. Las actuales teorías de sistemas axiomáticos y el concepto más abstracto de una geometría matemática, se basan en conceptos que no son exclusivamente tomados del mundo físico (aunque no prescindan totalmente de él) y sus teoremas enuncian proposiciones válidas, aunque no necesariamente verdaderas. Por otra parte, la geometría no está necesariamente supeditada a la geometría física.

La influencia de SACCHERI en la creación de la geometría no–euclideana es sustancial en el sentido de que hizo una contribución decisiva en el desarrollo y separación de las geometrías. La importancia del *Euclides ab omni naevo vindicatus* es que contiene un comienzo notablemente exacto y extenso del desarrollo posterior de la geometría no–euclideana llevado a cabo casi simultáneamente por GAUSS, BOLYAI y LOBACHEVSKI. Una de las consecuencias inevitables del método introducido por SACCHERI es que a la larga los matemáticos establecerían una nueva geometría que entraría en competencia con la geometría de EUCLIDES en el sentido de determinar cuál es verdadera, y no sólo válida.

4. **Coordenadas**

Hubo que esperar hasta el siglo XVII para que empezaran a aparecer cambios en el estudio de la geometría. DESCARTES y FERMAT introdujeron métodos basados en el uso de coordenadas. Por otra parte, la aplicación del cálculo diferencial e integral a la geometría dio origen a la descripción de las propiedades locales de las curvas, tales como sus pendientes, radios de curvatura, etc. Esta *geometría diferencial* es un desarrollo que va más allá de la formulación usual de la geometría euclideana, aunque sin cuestionar sus fundamentos.

Con la introducción de las coordenadas por parte de DESCARTES y la invención del cálculo infinitesimal el Teorema de Pitágoras se reexpresa como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \,. \tag{4.1}$$

Esta expresión se extiende fácilmente a tres dimensiones como

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \,. \tag{4.2}$$

Las dos expresiones anteriores corresponden a formas cuadráticas. Por lo tanto, lo que ahora caracteriza la pitagoricidad de la geometría física son las formas cuadráticas.

La relación contenida en el Teorema de Pitágoras es una forma cuadrática (o binaria). Es difícil decidir cuánto este hecho haya determinado el que gran parte de las matemáticas esté basada en operaciones y relaciones binarias.

Por otra parte, la geometría no–euclideana (la cual se desarrolló a principios del siglo XIX) también está basada en formas cuadráticas.

5. Geometría no–euclideana

La geometría no–euclideana tiene su origen en los intentos de los geómetras por dilucidar la independencia del Postulado de las Paralelas de los otros postulados de la geometría euclideana.

Hasta antes de Gauss, el concepto de geometría era bastante sencillo en dos aspectos. En primer lugar, no hacía distinción, como se hace ahora, entre la geometría matemática y la geometría física. En segundo lugar, debido a que la geometría estaba todavía en sus comienzos y a la identificación mencionada anteriormente de los dos conceptos de geometría, sólo se consideraba la noción de geometría que se obtenía a partir del espacio físico.

Al parecer, Gauss fue el primero en tener una visión clara de una geometría independiente del Postulado de las Paralelas. Gauss comenzó sus investigaciones acerca del Postulado de las Paralelas en 1792. Probablemente en 1808, y quizás ya en 1799, Gauss había ido mucho más lejos que Saccheri en los desarrollos de la geometría no–euclideana. En 1821, Gauss se enfrentó a problemas de geometría diferencial y publicó los resultados de su trabajo en 1827 en *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [*Investigaciones generales de superficies curvas*] [11]. Para esa época, ya estaba convencido de que el Postulado de las Paralelas no se podía demostrar y que otra geometría, no–euclideana,[2] era matemáticamente posible. Gauss fue el primero en darse cuenta de que tenía en sus manos una geometría no–euclideana consistente y bastante completa, la misma desarrollada por Saccheri casi cien años antes. Sin embargo, Gauss publicó sus resultados treinta años después, es decir, después de Lobachevski en 1826 [20] y Bolyai en 1832 [4] habían ya publicado los suyos.

La nueva geometría fue descubierta en forma independiente por el matemático húngaro János Bolyai (1802–1860). Su investigación original del problema de las paralelas fue publicada en 1832 [4] en la forma de un apéndice, el cual contiene una exposición elemental de los fundamentos de la nueva geometría, al primer volumen de un curso de matemáticas escrito y publicado por su padre Farkas Bolyai (1775–1856).

[2] El término "geometría no–euclideana" fue acuñado por Gauss en 1824.

La geometría no–euclideana fue en gran parte una curiosidad para la mayor parte de los estudiosos de la primera mitad del siglo XIX. A diferencia de Saccheri, Gauss creía en la realidad de la geometría no–euclideana y propuso métodos para medir la curvatura espacial [11].

La necesidad de determinar la geometría física llevó a Gauss a realizar en 1827 un experimento: la triangulación en las montañas Harz de los picos Hohenhagen, Inselsberg y Brocken. La intención del experimento era determinar la suma de los ángulos internos del triángulo, es decir, medir desviaciones con respecto a la geometría euclideana de un espacio plano y determinar cuál de las geometría no–euclideanas apenas descubiertas describía mejor el resultado que se obtuviera. El resultado de las mediciones fue que los ángulos internos sumaban (dentro del error de las mediciones)180°, y por lo tanto la geometría física (al menos en las montañas Harz) es euclideana. Recientemente, la experiencia de Gauss ha sido reinterpretada [36] y al parecer la intención de Gauss de determinar la desviación con respecto a la geometría euclideana es sólo un mito.

Schwarzschild en 1900 [37], adelantándose en forma notable a los desarrollos de la Relatividad General, realizó mediciones que permitían colocar límites, a escalas cosmológicas, al valor de la curvatura usando la distribución de paralajes estelares.

6. **Geometría riemanniana**

El desarrollo de las geometría no–euclideana mostró que existían dos tipos de geometrías:

1. la geometría física, que es la que se da en la naturaleza; y
2. la geometría matemática, la cual se puede formular de manera puramente axiomática, lógica, y no necesita de una contraparte en la naturaleza.

La idea de separar los dos conceptos de geometría y admitir que ambas geometrías son igualmente válidas aparece por primera vez en el trabajo de Riemann.

Por una parte, Gauss estudió las superficies definidas en forma intrínseca —esto es, sin ninguna referencia al espacio en el cual estaban inmersas— y las consideró como generalizaciones del plano. Estas superficies están caracterizadas por el *tensor métrico*, cuyas componentes, por su mismo carácter, dependen del sistema de coordenadas considerado. La gran contribución de Gauss fue el haber descubierto la existencia de un invariante diferencial que caracterizaba las propiedades de tal superficie y que no dependía de las coordenadas. Este invariante corresponde a lo que hoy en día se llama *curvatura*. En el caso de una superficie definida en forma extrínseca (un caso especial del caso intrínseco), es decir, a través de su inmersión en un espacio euclidiano, el invariante descubierto por GAUSS es sólo el producto de los inversos de los radios de curvatura máximo y mínimo, y por lo tanto es una medida de la curvatura de la superficie.

Los desarrollos iniciados por GAUSS culminaron con el trabajo de RIEMANN, quien extendió la descripción de GAUSS a espacios de n dimensiones. El trabajo que marcó este cambio radical es la tesis de RIEMANN *Acerca de las hipótesis en las cuales se basa la geometría*, de 1854 [30].

Con este trabajo de RIEMANN la pregunta cambia. La pregunta es ahora: ¿por qué todas esas geometrías son lógicamente posibles? Al intentar responder esta pregunta RIEMANN llega a los siguientes resultados:

1. Determinación de los requisitos mínimos para que una estructura matemática se pueda considerar como una geometría. Esencial en estos desarrollos es el concepto de distancia.
2. Desarrollo de la geometría riemanniana, basada en un elemento de línea de la forma:
$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,. \tag{6.1}$$
3. La geometría física se debe, y puede, determinar sólo por medios empíricos, experimentales u observacionales, y no se puede determinar *a priori* (lo anterior es una cita casi textual del trabajo de RIEMANN).

A continuación se describen algunas de las propiedades básicas de la geometría riemanniana. El determinante de un tensor de segundo rango (una matriz) está dado por
$$g = \det(\mathbf{g}) = \frac{1}{d!}\, \epsilon^{i_1\cdots i_d}\, \epsilon^{j_1\cdots j_d}\, g_{i_1 j_1}\, \cdots\, g_{i_d j_d}\,. \tag{6.2}$$
La matriz inversa (o tensor métrico contravariante) está dada por
$$g^{ij} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{(d-1)!}\,\frac{1}{g}\, \epsilon^{i i_1\cdots i_{d-1}}\, \epsilon^{j j_1\cdots j_{d-1}}\, g_{i_1 j_1}\, \cdots\, g_{i_{d-1} j_{d-1}}\,. \tag{6.3}$$
Esta matriz (o tensor) satisface la relación
$$g^{ik}\, g_{jk} = \delta^i_j\,, \tag{6.4}$$
es decir, es la matriz inversa.

A partir del tensor métrico es posible construir una conexión, a saber, *el símbolo de Christoffel*
$$\left\{{k \atop ij}\right\}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2}\, g^{k\ell}\, \left(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}\right)\,. \tag{6.5}$$
El tensor de Riemann–Christoffel está dado por
$$\begin{aligned} R^{\ell}{}_{kij}(\mathbf{g}) \;&=\; \partial_i \left\{{\ell \atop jk}\right\}(\mathbf{g}) - \partial_j \left\{{\ell \atop ik}\right\}(\mathbf{g}) \\ &\quad + \left\{{\ell \atop im}\right\}(\mathbf{g}) \left\{{m \atop jk}\right\}(\mathbf{g}) - \left\{{\ell \atop jm}\right\}(\mathbf{g}) \left\{{m \atop ik}\right\}(\mathbf{g})\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Con el tensor métrico $\mathbf{g}$ se puede construir un tensor de Riemann–Christoffel completamente covariante como

$$R_{k\ell ij}(\mathbf{g}) = g_{km}\, R^m{}_{\ell ij}(\mathbf{g})\,. \tag{6.7}$$

En forma explícita se tiene

$$\begin{aligned} R_{ijk\ell}(\mathbf{g}) &= \frac{1}{2}\left(\partial_{ik}g_{j\ell} + \partial_{j\ell}g_{ik} - \partial_{i\ell}g_{jk} - \partial_{jk}g_{i\ell}\right) \\ &\quad + g_{mn}\left[\left\{{m \atop ik}\right\}(\mathbf{g})\left\{{n \atop j\ell}\right\}(\mathbf{g}) - \left\{{m \atop i\ell}\right\}(\mathbf{g})\left\{{n \atop jk}\right\}(\mathbf{g})\right]. \end{aligned} \tag{6.8}$$

La única contracción no trivial del tensor de Riemann–Christoffel con el tensor métrico es el tensor de Ricci

$$R_{kj}(\mathbf{g}) = g^{\ell i}\, R_{\ell kij}(\mathbf{g})\,. \tag{6.9}$$

Por medio de una contracción adicional del tensor de Ricci con el tensor métrico se obtiene el escalar de Ricci

$$R(\mathbf{g}) = g^{ij}\, R_{ij}(\mathbf{g})\,. \tag{6.10}$$

7. Helmholtz y el carácter euclidiano del espacio físico

Después del desarrollo de la geometría riemanniana se hizo claro que existían muchas geometrías posibles, de las cuales la geometría euclideana era sólo una de varias posibilidades. Una pregunta que surgió en forma natural era por qué, de todas las posibles geometrías riemannianas, la geometría física es euclideana, y no alguna de las otras geometrías riemannianas o no–euclideanas que, desde un punto de vista lógico y matemático, estaban en igualdad de condiciones.

La primera formulación sistemática de este problema es debida a Helmholtz en 1868 [45]; véase también [19]. La argumentación de Helmholtz se basa en la existencia de cuerpos rígidos, y con esta suposición es posible demostrar que la única posibilidad es la geometría euclideana, lo cual excluye a la geometría no–euclideana y a todas las otras posibles geometrías riemannianas.

Que un cuerpo sea rígido significa que las distancias entre sus partes permanecen invariantes, no cambian, bajo traslaciones y rotaciones. Esto significa que el elemento de línea debe ser invariante bajo traslaciones

$$x \to x + a\,, \tag{7.1}$$

y rotaciones

$$\begin{aligned} x &\to x + \alpha\, y\,, \\ y &\to y - \alpha\, x\,, \end{aligned} \tag{7.2}$$

junto con relaciones similares para las otras coordenadas. La solución es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,. \tag{7.3}$$

Es decir, el elemento de línea depende de los diferenciales sólo a través de la combinación que se muestra en (7.3), y por lo tanto se obtiene la geometría euclideana.

Sin embargo, el argumento de Helmholtz no es completamente satisfactorio dado que se ha supuesto lo que se pretende demostrar (*petición de principio*). Un cuerpo rígido se define como un cuerpo que no cambia de forma con respecto a traslaciones y rotaciones, operaciones que existen sólo en un espacio euclidiano.

La argumentación de Helmholtz y la verificación experimental indirecta de Gauss son válidas para la escala de distancias macroscópicas de la vida diaria y, debido a estos hechos, se consideró que el carácter euclidiano de la geometría física era un principio de la naturaleza.

8. **La Relatividad General**

Aun cuando el problema del espacio no había sido resuelto en forma satisfactoria, el problema fue casi olvidado hasta la aparición de la Relatividad General.

Intuitivamente, la geometría que los sentidos observan en el mundo exterior parece ser euclideana. Las áreas, usando la definición intuitiva de r, aumentan como r^2 y los volúmenes como r^3. El concepto de curvatura espacial es ajeno a la intuición e irreal para quien no esté familiarizado con las matemáticas.

No obstante, si se considera la estructura de la Relatividad General como una definición de la realidad, entonces la materia realmente curva al espacio. Las partículas se mueven a lo largo de geodésicas (líneas rectas) en un espacio curvo en vez de a lo largo de trayectorias curvas en un espacio plano. Las componentes del tensor métrico quedan determinados por la distribución de materia. Es en este sentido que la Relatividad General ha geometrizado la dinámica.

La Relatividad General está basada en el lagrangiano de Einstein–Hilbert en el vacío, a saber,

$$\mathcal{L}_{EH}(\mathbf{g}) = R(\mathbf{g})\, g^{1/2}\,. \tag{8.1}$$

A partir de una variación de este lagrangiano con respecto al tensor métrico se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{ij}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2}\, R(\mathbf{g})\, g_{ij} = 0\,. \tag{8.2}$$

Las predicciones de las ecuaciones de campo de Einstein están en muy buen acuerdo con las observaciones y dan un soporte a la Relatividad General. No obstante, debido a varias razones teóricas y observacionales, es necesario considerar modificaciones de esta teoría.

Con el desarrollo de la Relatividad General el problema del espacio volvió a tomar importancia. De acuerdo con la Relatividad General la geometría del espacio–tiempo es riemanniana.

9. La conexión

En 1917 Levi–Civita [18] introdujo el concepto de *conexión* como una manera de definir la derivada covariante.

La conexión $\mathbf{\Gamma}$ es un objeto geométrico con componentes $\Gamma^k{}_{ij}$ tal que la derivada covariante de un vector está dada por

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma^k{}_{ji}\, v_k\,, \tag{9.1}$$

A partir de la conexión es posible construir el tensor de Riemann

$$R^k{}_{\ell ij}(\mathbf{\Gamma}) = \partial_i \Gamma^k{}_{j\ell} - \partial_j \Gamma^k{}_{i\ell} + \Gamma^k{}_{im}\, \Gamma^m{}_{j\ell} - \Gamma^k{}_{jm}\, \Gamma^m{}_{i\ell}\,, \tag{9.2}$$

A partir de una contracción se obtiene el tensor de Ricci

$$R_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = R^k{}_{ikj}(\mathbf{\Gamma}) = \partial_k \Gamma^k{}_{ji} - \partial_j \Gamma^k{}_{ki} + \Gamma^k{}_{km}\, \Gamma^m{}_{ji} - \Gamma^k{}_{jm}\, \Gamma^m{}_{ki}\,. \tag{9.3}$$

En el caso en que la conexión es igual al símbolo de Christoffel, el tensor de Riemann se reduce al tensor de Riemann–Christoffel.

10. El método de Palatini

En 1919 Palatini [27] desarrolló una formulación variacional alternativa y equivalente de la Relatividad General.

El punto de partida de Palatini es el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{Pal}(\mathbf{g}, \mathbf{\Gamma}) = g^{ij}\, R_{ij}(\mathbf{\Gamma})\, g^{1/2}\,. \tag{10.1}$$

A partir de una variación de este lagrangiano con respecto al tensor métrico se obtiene

$$R_{ij}(\mathbf{\Gamma}) - \frac{1}{2}\, g^{k\ell}\, R_{k\ell}(\mathbf{\Gamma})\, g_{ij} = 0\,. \tag{10.2}$$

A pesar del parecido, éstas todavía no son las ecuaciones de campo de Einstein (8.2). A partir de una variación del lagrangiano (10.1) con respecto a la conexión se obtiene

$$\nabla^{\Gamma}_k g_{ij} = 0\,. \tag{10.3}$$

Esta ecuación es una relación entre la conexión $\mathbf{\Gamma}$ y el tensor métrico $\mathbf{g}$ y se conoce como 'condición de metricidad'. Su solución es

$$\Gamma^k{}_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} (\mathbf{g})\,. \tag{10.4}$$

Es decir, la conexión es el símbolo de Christoffel del tensor métrico $\mathbf{g}$. En este caso el tensor de Riemann se reduce al tensor de Riemann–Christoffel y las ecuaciones (10.2) se reducen a las ecuaciones de campo de Einstein (8.2).

11. El problema del espacio

En 1923 Weyl [46] replanteó *el problema del espacio*. El problema ya no era determinar por qué de entre todas las posibles geometrías riemannianas la geometría euclideana es la que se da en la naturaleza, sino más bien por qué la geometría que se da en la naturaleza es precisamente riemanniana, es decir, pitagórica.

Weyl se acerca bastante a una enunciación correcta del problema del espacio, de hecho, el nombre que Weyl da a sus estudios, *das Raumproblem*, que es el nombre con el cual se lo conoce desde entonces, hace pensar que el problema haya sido estudiado con un enfoque adecuado. Sin embargo, en sus estudios posteriores Weyl se aleja de su propósito original. En primer lugar Weyl se limita a estudiar cómo las propiedades de grupo restringen las posibles geometrías. Aquí es necesario recordar que el concepto de grupo aparece del estudio de las simetrías de las formas cuadráticas. Por lo tanto, Weyl se limitó a estudiar las geometrías que pueden servir de soporte a simetrías descritas por la teoría de grupos. No es extraño que Weyl concluyera (cayendo en un error similar al de Helmholtz) que la geometría física debe estar descrita por una forma cuadrática. Entre las geometrías que sobreviven están la geometría riemanniana y lo que hoy se conoce como *geometría de Weyl*. Alrededor del trabajo de Weyl se ha formado la creencia de que el problema fue resuelto. No obstante, aquí se tiene un mito histórico bien establecido debido sólo a su frecuente repetición.

En conclusión, la formulación de Weyl del problema del espacio, es decir, por qué la geometría del espacio debe ser riemanniana, pitagórica, sigue abierta.

12. El aporte de la física

En 1949 Robertson [31], en un volumen dedicado a Einstein, publica un artículo titulado *Geometry as a branch of physics*. Este provocativo título significó una clara toma de posición de la física con respecto al problema del espacio.

Posteriormente, Sandage [34] elaboró el concepto de 'geometría experimental' estudiando la aplicación de la Relatividad General a situaciones de carácter cosmológico. De acuerdo con este concepto, la geometría física es un problema que concierne a la geometría experimental, es decir, a la física y a la cosmología. Ligado con la física, está el concepto de *geometría teórica*. En este caso la física intenta predecir cuál es la geometría que se debe dar en la naturaleza. Las teorías físicas que han intentado responder a esta pregunta (no siempre en forma consciente) son la Relatividad General, la Mecánica Cuántica y la Electrodinámica Cuántica. Esta última teoría es particularmente notable dado que es una teoría exitosa (en sus predicciones) y es consistente (en el sentido de que es renormalizable).

Por otra parte, existen algunos fenómenos físicos que se pueden identificar con aspectos cuánticos de los fenómenos gravitacionales. Se esperaría que éstos fueran descritos por una versión cuántica de la Relatividad General, es decir, por lo que más generalmente se conoce como *gravedad cuántica*. Desafortunadamente no ha sido posible desarrollar tal teoría. Se debe enfatizar que esto no ha sido posible teóricamente, lo cual no quiere decir que el fenómeno físico no exista.

El problema de la pitagoricidad del espacio–tiempo ha sido reconsiderado desde el punto de vista de la física teórica. La situación aquí es difícil pues de las pocas contribuciones que han aparecido la mayoría de ellas ignora que la pregunta hace parte del problema del espacio, y por lo tanto desconocen los intentos anteriores por responderla por parte de HELMHOLTZ, LIE, WEYL y otros. Por otra parte, estos enfoques, de una u otra manera, se reducen a argumentos circulares en los cuales se supone lo que se desea demostrar, a saber, la pitagoricidad del espacio; es decir, son explicaciones *a posteriori* [9, 2, 15].

Quizás una de las propuestas más serias desde el lado de la física es la que está implícitamente sugerida en el trabajo de KAPLUNOVSKY y WEINSTEIN [14]. La idea es construir una teoría en la cual no se haga referencia a un espacio–tiempo. Las ecuaciones de campo correspondientes tendrán un grupo de simetría. Si se considera el límite de bajas energías, definido convenientemente a través de algunos parámetros de la teoría, entonces el grupo de simetría debiera ser el de las formas cuadráticas. De esta forma una teoría en la cual no se ha incorporado el concepto de espacio–tiempo puede dar origen al concepto de espacio–tiempo riemanniano para bajas energías.

Uno de los ideales de la física teórica es acercarse cada vez más a una descripción unificada de los fenómenos que se observan en la naturaleza. En los intentos para conseguir este propósito es necesario desarrollar teorías que satisfagan ciertos criterios que posibilitan esta unificación. También, muchas veces es necesario desarrollar nuevas matemáticas para describir estas propiedades. Los ejemplos clásicos en este sentido son la supersimetría y la teoría de cuerdas.

La necesidad de conciliar varios requisitos de consistencia, tal como la renormalizabilidad, la integrabilidad y la invariancia conforme, llevaron al desarrollo de la teoría de cuerdas. Sin embargo, esta conciliación se puede lograr sólo en dos dimensiones. Para desarrollar una teoría física algo más realista, es decir, en cuatro dimensiones, es necesario considerar espacios descritos por elementos de línea de rango superior, en particular, de cuarto rango. En este caso, además, es necesario considerar la geometría de cuarto rango como responsable por los fenómenos gravitacionales.

En trabajos anteriores [40, 42] se ha considerado la geometría asociada con un elemento de línea de rango superior. Debido a un notable teorema [40] las teorías de campo basadas en este tipo de geometría son integrables más allá de la restricción $d = 2$ impuesta por la geometría riemanniana; véase [40] para los detalles. En consecuencia, se ha desarrollado una teoría gravitacional basada en la geometría de cuarto rango. Resultados preliminares [42] muestran que este modelo puede acomodar varios resultados observacionales, tal como una constante cosmológica Λ [26] y una anisotropía del universo [25].

13. El concepto de distancia

Al parecer, el concepto de distancia, aunque en forma implícita, fue considerado por vez primera por Riemann en 1854 [30]. A continuación se presenta una recreación libre de los argumentos de Riemann.

Antes de comenzar el análisis es necesario advertir que el concepto de distancia que se usa en geometría diferencial es distinto del concepto más tradicional de distancia que aparece en el análisis para el cual es válida la desigualdad triangular. De hecho, la desigualdad triangular es válida en espacios euclidianos y otros espacios con propiedades similares, pero es sólo una propiedad de estos espacios más que una condición que permita elaborar una definición adecuada del concepto de distancia.

Sea $\mathcal{M}$ un espacio vectorial y sea $\mathbf{x}$ un sistema de coordenadas locales. Sean A y B dos puntos cualesquiera sobre $\mathcal{M}$, y sean x^μ_A y x^μ_B sus respectivas coordenadas. A continuación se considera una curva γ que une estos dos puntos. En coordenadas, la curva está dada por $x^\mu(t)$, donde t es algún parámetro afín a lo largo de la curva γ, tal que

$$\begin{aligned} x^\mu(t_A) &= x^\mu_A\,, \\ x^\mu(t_B) &= x^\mu_B\,. \end{aligned} \tag{13.1}$$

A continuación se exige que la distancia sea aditiva. Esto significa que la distancia entre los dos puntos A y B, medida a lo largo de la curva γ, se puede descomponer como la suma de las distancias entre A y un punto intermedio C y la distancia entre ese punto intermedio C y el punto final B, de modo tal que

$$d_{AB} = d_{AC} + d_{CB}\,. \tag{13.2}$$

Si se itera este procedimiento se concluye que d_{AB} se puede considerar como la suma de elementos infinitesimales de distancia y la expresión final debe estar dada por una integral

$$d_{AB}[t] = \int_A^B f[x(t)]\,dt\,, \tag{13.3}$$

donde $f[x(t)]$ es una función que depende de la curva γ, es decir de las coordenadas x^μ, y posiblemente de las derivadas de x^μ con respecto a t, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/dt, \ddot{x}^\mu = d^2x^\mu/dt^2, \cdots$. En este caso es más adecuado hablar de un funcional y este hecho es el que se indica a través del paréntesis cuadrado.

El problema, por lo tanto, se traduce en determinar la función f que se debe usar en (13.3). En otras palabras, se debe determinar cómo la función

f depende de la curva γ. Para hacer esto se debe imponer algunas restricciones sobre f. Se supone que la distancia entre A y B no depende de la parametrización que se use a lo largo de la curva γ. Para esto se considera una segunda parametrización de la curva γ en términos de un parámetro τ tal que $\tau = \tau(t)$ y $x^\mu = x^\mu(\tau)$. Entonces, se tiene

$$d_{AB}[\tau] = \int_A^B f[x(\tau)]\, d\tau\,. \tag{13.4}$$

La condición de independencia con respecto a la parametrización, $d_{AB}[t] = d_{AB}[\tau]$, se escribe como

$$\int_A^B f[x(\tau)]\, d\tau = \int_A^B f[x(t)]\, dt\,. \tag{13.5}$$

Para que τ sea una parametrización válida de la curva γ es necesario que $\tau = \tau(t)$ sea una función suave y monótona de t. Esto permite escribir

$$\int_A^B f[x(\tau(t))] \left(\frac{d\tau}{dt}\right) dt = \int_A^B f[x(t)]\, dt\,. \tag{13.6}$$

Dado que el intervalo de integración es arbitrario, se debe tener

$$f[x(\tau(t))] \left(\frac{d\tau}{dt}\right) = f[x(t)]\,. \tag{13.7}$$

Para determinar la forma de f se debe recordar la manera explícita en que x^μ y sus derivadas transforman bajo un cambio de parametrización. Para las primeras derivadas se tiene

$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= x^\mu(\tau)\,, \\ \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)(t) &= \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)(\tau)\,, \\ \left(\frac{d^2x^\mu}{dt^2}\right)(t) &= \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right)(\tau) + \left(\frac{d^2\tau}{dt^2}\right)\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)(\tau)\,. \end{aligned} \tag{13.8}$$

Las derivadas de orden superior de x^μ involucran derivadas de orden superior de τ con respecto a t. Dado que en la condición (13.7) sólo aparecen primeras derivadas de τ con respecto a t se podría concluir que f depende a lo más de las primeras derivadas de x^μ.[3] Se tiene

$$f = f\left(x,\, \frac{dx}{dt}\right)\,. \tag{13.9}$$

[3] La condición (13.7) se puede satisfacer incluso si f depende de derivadas de orden superior de x^μ. Se llega entonces a los invariantes de Zermelo [47].

Entonces

$$\begin{aligned} f\left(x(t), \left(\frac{dx}{dt}\right)(t)\right) &= f\left(x(\tau), \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\left(\frac{dx}{d\tau}\right)(\tau)\right) \\ &= f\left(x(\tau), \left(\frac{dx}{d\tau}\right)(\tau)\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Esta condición se reescribe como

$$f(x,\, \lambda\, \dot{x}) = \lambda\, f(x,\, \dot{x})\,, \tag{13.11}$$

lo cual significa que f es una función homogénea de primer orden en $\dot{x}$.

Ahora la relación (13.3) se puede reescribir como

$$d_{AB} = \int_A^B f(x,\, \dot{x})\, dt = \int_A^B f(x,\, dx)\,. \tag{13.12}$$

La última relación expresa el hecho de que la distancia es independiente de la parametrización de la curva y depende sólo de los puntos extremos y de la curva. La relación anterior permite introducir la distancia infinitesimal

$$ds = f(x,\, dx)\,, \tag{13.13}$$

o *elemento de línea*, el cual es una función que satisface la condición de homogeneidad

$$f(x,\, \lambda\, dx) = \lambda\, f(x,\, dx)\,. \tag{13.14}$$

Un requisito adicional es que la distancia sea una cantidad definida positiva

$$f(x,\, dx) > 0\,. \tag{13.15}$$

La condición anterior fue escrita en un momento histórico en el cual las distancias todavía eran, por así decirlo, positivas. Sin embargo, la condición (13.15) estaba más orientada a garantizar que la distancia medida en una dirección a lo largo de una curva fuera igual a la distancia medida en el sentido opuesto. La condición anterior se puede relajar para permitir distancias negativas con la condición de que se mantengan siempre negativas. Entonces se puede imponer la condición más débil

$$f(x,\, -dx) = f(x,\, dx)\,. \tag{13.16}$$

Una manera de conciliar las relaciones (13.14) y (13.16) es

$$f(x,\, \lambda\, dx) = |\lambda|\, f(x,\, dx)\,, \tag{13.17}$$

ahora sin ninguna restricción sobre el signo de λ. Esta última condición es la forma más general en que se puede definir una distancia o elemento de línea.[4]

Por supuesto, existen muchas soluciones a la condición (13.17) anterior. Para fijar las ideas se consideran funciones monomiales de la forma

$$ds = [G_{\mu_1 \cdots \mu_r}(\mathbf{x})\, dx^{\mu_1}\, \cdots\, dx^{\mu_r}]^{1/r}\,, \tag{13.18}$$

[4] Los elementos de línea en los cuales f puede cambiar de signo se pueden usar en la descripción de fenómenos de histéresis y teoría de catástrofes; véase Asanov [1].

donde r es un entero positivo. La homogeneidad está garantizada por construcción. Para satisfacer la condición (13.17) es necesario que r sea un número par. La posibilidad más sencilla es $r = 2$, y en este caso se obtiene

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(\mathbf{x})\, dx^\mu\, dx^\nu \,, \tag{13.19}$$

lo cual corresponde a la geometría riemanniana. El '2' que aparece en (13.19) es el mismo '2' que aparece en (2.1), (4.1) y (4.2).

14. **Formas cuadráticas**

Antes de seguir adelante es necesario realizar algunas consideraciones de tipo algebraico.

En aritmética las operaciones fundamentales de adición y multiplicación son ambas operaciones binarias. Este hecho se refleja en desarrollos posteriores del álgebra en la cual conceptos tales como el de grupo se basan en operaciones binarias.

Los determinantes de matrices cuadradas ordinarias ya estaban en uso en el siglo XVIII. Sin embargo, la teoría de matrices, tal como se conoce hoy, fue desarrollada sólo a principios del siglo XIX. A principios de 1800 Cayley [6] desarrolló la teoría de matrices y de formas cuadráticas.

Otra de las propiedades algebraicas interesantes para matrices y tensores de segundo rango es el teorema de Cayley–Hamilton. Sea $\mathbf{A}$ una matriz y sea $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$ su traza. En forma análoga, las trazas de potencias de la matriz se denotan por $\langle \mathbf{A}^n \rangle = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^n)$. El teorema de Cayley–Hamilton establece que no todas las potencias de $\mathbf{A}$, y por lo tanto no todas las trazas de $\mathbf{A}$, son independientes.

Por ejemplo, para $d = 2$ se tiene

$$\mathbf{A}^2 - \langle \mathbf{A} \rangle\ \mathbf{A} + \frac{1}{2}\,\Big(\langle \mathbf{A} \rangle^2 - \big\langle \mathbf{A}^2 \big\rangle \Big)\,\mathbf{I} \equiv 0\,. \tag{14.1}$$

Las álgebras de división también están basadas en relaciones binarias y, debido al teorema de Hurwitz, sólo son cuatro: los números reales, $\mathbf{R}$, los números complejos $\mathbf{C}$, los números cuaterniónicos, $\mathbf{Q}$, y los números octoniónicos, $\mathbf{O}$. Una de las condiciones del teorema de Hurwitz es la binariedad de la operación de multiplicación.

15. **Formas de rango superior**

El concepto de formas de rango superior y de operaciones de una aridad superior aparecen, principalmente, junto con el desarrollo de la teoría de matrices.

Cayley en 1845 [7] publicó una generalización de los determinantes de matrices cuadradas de dimensión $n \times n$ a matrices de rango superior. Los determinantes de matrices de rango superior se conocen como *hiperdeterminantes*; una exposición actualizada se encuentra en [12].

En 1851 Schläfli [35] publicó un método alternativo para obtener hiperdeterminantes. Usualmente este método da un invariante polinomial más grande, del cual el determinante de Cayley es sólo un factor.

Posteriormente, el concepto de *hiperdeterminante* ha adquirido un significado más general que ya no está relacionado sólo con matrices de rango superior, sino que más bien se acerca al concepto de *invariante*.

Se puede obtener un teorema de Cayley–Hamilton para matrices de rango superior [41]. Aquí se ilustran los resultados para el caso de cuarto rango. Los resultados son generalizaciones directas de las definiciones para el caso de segundo rango.

Sea $\mathbf{G}$ una matriz de cuarto rango con componentes $G_{ijk\ell}$. El determinante se puede definir, forzando la analogía con (6.2), como

$$G = \det(\mathbf{G}) = \frac{1}{d!}\, \epsilon^{i_1\cdots i_d}\, \epsilon^{j_1\cdots j_d}\, \epsilon^{k_1\cdots k_d}\, \epsilon^{\ell_1\cdots \ell_d}\; G_{i_1 j_1 k_1 \ell_1}\, \cdots\, G_{i_d j_d k_d \ell_d}\,. \tag{15.1}$$

La matriz inversa (o tensor métrico contravariante) está dada por

$$\begin{aligned} G^{ijk\ell} &= \frac{1}{G}\,\frac{\partial G}{\partial G_{ijk\ell}} \\ &= \frac{1}{(d-1)!}\,\frac{1}{G}\,\epsilon^{ii_1\cdots i_{d-1}}\,\epsilon^{jj_1\cdots j_{d-1}}\,\epsilon^{kk_1\cdots k_{d-1}}\,\epsilon^{\ell\ell_1\cdots \ell_{d-1}} \\ &\qquad \times G_{i_1 j_1 k_1 \ell_1}\,\cdots\, G_{i_{d-1} j_{d-1} k_{d-1} \ell_{d-1}}\,. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Esta matriz (o tensor) satisface la relación

$$G^{ik\ell m}\, G_{jk\ell m} = \delta^i_j\,, \tag{15.3}$$

es decir, es la matriz inversa.

Con estos ingredientes es posible formular un teorema de Cayley–Hamilton para matrices (y tensores) de cuarto rango. La expresión explícita es bastante compleja [41]. Pero el resultado importante es que existen identidades algebraicas para matrices de cuarto rango.

Otra situación en la cual también aparecen relaciones de aridad superior es en las álgebras de división. Una de las condiciones del teorema de Hurwitz es la binariedad de la operación de multiplicación. Si se levanta este requisito se obtienen otras álgebras de división de aridad superior [28].

Una geometría de rango superior lleva necesariamente a considerar operaciones de una aridad superior. Un concepto de grupo generalizado siguiendo estas líneas fue desarrollado por Dickson [8], que hoy se conoce como *álgebras de Dickson*.

Otro aspecto de las matemáticas en el cual se manifiesta el carácter binario fundamental es en la teoría de números. Por ejemplo, los números imaginarios se obtienen como la raíz cuadrada de números negativos. Nuevamente, la raíz cuadrada está relacionada con el carácter binario fundamental de las matemáticas. En una aritmética de rango superior se deben considerar raíces de rango superior de los números negativos. Aun cuando los números que aparecen de este modo se pueden expresar en términos sólo de números complejos, éstos, en un sentido laxo, se pueden considerar como nuevos números. Si se considera a los números complejos como una gradación $\mathbf{Z}_2$ de los números reales se llega inmediatamente al concepto de gradación $\mathbf{Z}_r$ de los números reales. Por otra parte, en física teórica una gradación de tipo $\mathbf{Z}_2$ está asociada con spin $1/2$. En forma análoga una gradación de tipo $\mathbf{Z}_r$ está asociada con spin $1/r$. Esto lleva al spin fraccionario, el cual ha sido ampliamente estudiado en la literatura [29].

El uso de formas de rango superior presenta algunos problemas de carácter técnico como los siguientes. El primer problema es la construcción de invariantes algebraicos. Para las matrices cuadradas existe un producto natural que es el producto cartesiano en el cual se multiplican filas por columnas. Esto se puede extender fácilmente a tensores, donde filas y columnas son representadas por índices covariantes y contravariantes. Sin embargo, para tensores de orden superior esta analogía con el cálculo matricial ya no es posible. Para tal construcción es necesario utilizar cuadrados semimágicos, los cuales permiten contar el número de posibles invariantes para cada orden. Entre los invariantes algebraicos se puede considerar el determinante y la matriz inversa.

Las formas diferenciales más familiares son las formas de segundo rango y éstas en general están asociadas con la geometría riemanniana. Éstas están tan profundamente enraizadas en la manera de pensar que es sólo matemáticamente, y no en forma intuitiva, que se puede identificar lo que es propio de una forma de segundo rango y cuáles son propiedades de un tipo general. Esto es evidente cuando se hace uso de rotaciones y otros trucos mecánicos para excluir el uso de formas de rango superior.

El enfoque que se considera a continuación está basado en formas y elementos de línea de rango superior. Aunque en este caso no es necesario desarrollar una matemática esencialmente nueva no ha sido posible describir estos objetos debido a dificultades técnicas que hacen de este problema algo "prohibitivo".

16. **Geometría de rango superior**

Al final de la sección 11 se mencionó que la posibilidad más sencilla para r en (13.18) era $r = 2$. La siguiente posibilidad es $r = 4$ y en este caso se tiene

$$ds^4 = G_{ijk\ell}(\mathbf{x})\, dx^i\, dx^j\, dx^k\, dx^\ell\,. \tag{16.1}$$

Esta posibilidad fue mencionada por Riemann en su tesis, pero no la consideró con mayor profundidad dado que no contenía el Teorema de Pitágoras. A pesar de que en la misma tesis Riemann había afirmado que la geometría física se debía determinar por medios empíricos, aquí se confunde y excluye la geometría de cuarto rango como lógicamente imposible dado que no contiene el Teorema de Pitágoras. Sin embargo, la exclusión de esta posibilidad debe hacerse a través de una argumentación más rigurosa.

El objeto fundamental de la geometría de cuarto rango es el tensor "métrico" $\mathbf{G}$ con componentes $G_{ijk\ell}$. Para mayores desarrollos es necesario caracterizar tanto las propiedades algebraicas como las propiedades diferenciales de este tipo de geometría. El método más sencillo es la construcción de invariantes algebraicos y diferenciales.

Para construir una geometría diferencial similar a la geometría riemanniana es necesario construir invariantes diferenciales para el tensor $\mathbf{G}$.

La geometría riemanniana está basada en el tensor métrico $\mathbf{g}$, el cual es un tensor de segundo rango. El hecho de que el tensor métrico sea un tensor de segundo rango hace posible obtener versiones covariantes y contravariantes, del mismo rango, de cualquier objeto geométrico a través de las operaciones de 'subir' y 'bajar' índices. Esta sencilla propiedad es la que hace posible que la construcción de invariantes diferenciales de la geometría riemanniana (tensor de Riemann–Christoffel, etc.) sea una tarea relativamente sencilla.

En la geometría de rango superior, con el sólo uso del tensor métrico de rango superior, no es posible obtener versiones covariante y contravariante, del mismo rango, para un mismo objeto geométrico. Es decir, no existen operaciones análogas a las de 'subir' y 'bajar' índices típicas de la geometría riemanniana. Este hecho dificulta, y a veces impide, la generalización de la mayoría de las construcciones familiares en geometría riemanniana. Una de las principales construcciones imposibles es la condición de metricidad, es decir, una condición que relacione la conexión y el tensor métrico, la cual simplemente no existe (no puede existir) para tensores métricos de rango superior.

Por lo tanto, la construcción de invariantes diferenciales, y de una geometría diferencial concomitante, ha resultado técnicamente intratable con las herramientas y conceptos usuales del análisis tensorial. Se espera, en el futuro, poder desarrollar algún algoritmo alternativo que permite obviar estas obstrucciones.

A continuación se muestran los avances obtenidos hasta ahora en este problema abierto. Hasta el momento no ha sido posible desarrollar una geometía diferencial asociada con el tensor de cuarto rango que aparece en (16.1). Una de las primeras dificultades en este sentido son las propiedades algebraicas de $G_{ijk\ell}$. A continuación se describe uno de los pocos resultados algebraicos obtenidos hasta ahora.

La integrabilidad de una teoría de campos depende críticamente de la dimensión del espacio–tiempo en que se está trabajando. Este resultado se obtiene más específicamente de la ecuación de Killing conforme:

$$g_{ik}\,\partial_j\xi^k + g_{kj}\,\partial_i\xi^k - \frac{d}{2}\,(\partial_\ell\xi^\ell)\,g_{ij} = 0\,. \tag{16.2}$$

la dimensión crítica para esta ecuación, es decir, la dimensión para la cual se obtiene un número infinito de soluciones, es $d = 2$.

La siguiente pregunta natural es si existe una ecuación diferencial análoga a (16.2) cuya dimensión crítica sea $d = 4$. La respuesta es positiva y fue dada en [40]. Sea la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} G_{ijkm}\partial_\ell\xi^m + G_{ijm\ell}\partial_k\xi^m + G_{imk\ell}\partial_j\xi^m + G_{mjk\ell}\partial_i\xi^m & \\ -\frac{d}{4}\,(\partial_m\xi^m)\,G_{ijk\ell} &= 0\,. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Esta ecuación diferencial admite un número infinito de soluciones si $d = 4$ y si el tensor métrico es plano con direcciones nulas, es decir, si es de la forma

$$G_{1234} = 4!\,dx^1\,dx^2\,dx^3\,dx^4\,. \tag{16.4}$$

Es este notable resultado el que hace necesario considerar seriamente la geometría de cuarto rango como una manera de solucionar varios de los problemas de la física teórica actual.

El último paso es el desarrollo de una geometría de rango superior. En el caso de la geometría riemanniana, a partir del tensor métrico se puede obtener el tensor de curvatura de Riemann–Christoffel. Lo anterior corresponde a un invariante diferencial. En el caso de un tensor métrico de cuarto rango (o tétrica) $G_{ijk\ell}$ se esperaría obtener un invariante análogo.

La teoría de invariantes diferenciales fue desarrollada por Thomas en 1934 [44]. En el caso de tensores de rango superior, los resultados de Thomas permiten determinar el número de componentes de los invariantes diferenciales, pero no los simetrías de tales tensores.

Por lo tanto, es necesario determinar una descomposición irreducible, una partición, de los tensores de rango superior utilizando grupos simétricos. Este es un problema que todavía no ha sido resuelto.

17. **Viabilidad física de la geometría de cuarto rango**

Posibles indicaciones acerca de la estructura geométrica del espacio se pueden obtener a partir de la física de altas energías. Varios requisitos de consistencia, tales como la renormalizabilidad, la integrabilidad y la invariancia conforme, fijan el tipo de geometría que 'debería' darse en la naturaleza, y para distancias microscópicas la geometría se podría comportar de una manera completamente distinta a la geometría riemanniana.[5]

Un ejemplo de la situación anterior es la teoría de cuerdas. En este caso se supone que la geometría es riemanniana y entonces se obtienen resultados consistentes sólo si el espacio es de dos dimensiones. Dado que el espacio–tiempo de la física tiene cuatro dimensiones se puede invertir el planteamiento del problema e intentar determinar la geometría en la cual se obtienen resultados consistentes en cuatro dimensiones. Es posible mostrar [40] que una posibilidad es una geometría de cuarto rango.

Las divergencias que aparecen en la teoría cuántica de campos se podrían evitar si el tensor métrico fuese un tensor de cuarto rango, es decir, un tensor $\mathbf{G}$ con componentes $G_{ijk\ell}$. A continuación veremos que la introducción de un tensor métrico de este tipo para la descripción del espacio–tiempo no es del todo bizarra, y que su uso en la formulación de una teoría gravitacional puede ser adecuado.

En la formulación de la teoría cuántica de campos existen varios requisitos importantes, tales como la renormalizabilidad, la invariancia conforme y la integrabilidad. La renormalizabilidad y la invariancia conforme imponen restricciones sobre la manera en que se construye el lagrangiano en términos del tensor métrico, de otros campos (como el campo electromagnético $\mathbf{A}$) y de sus derivadas. Generalmente esta fase de la construcción de un lagrangiano es sencilla. Sin embargo, cuando se intenta incorporar la integrabilidad se encuentra que esto es posible sólo en un espacio–tiempo de 2 dimensiones. Esta dimensión crítica es de origen puramente geométrico, ya que está determinada por el rango del tensor métrico. En el trabajo anterior [38, 39, 40] fue posible establecer un resultado muy importante en este sentido, el cual se puede resumir como sigue.

Teorema. *La dimensión crítica para la cual una teoría de campos es integrable es igual al rango de la geometría.*

Por lo tanto, si usamos geometría riemanniana, en la cual el rango del tensor métrico es 2, una teoría integrable se puede obtener sólo para dimensión 2, y esto explica el éxito de la teoría de cuerdas. Si deseamos obtener una teoría integrable en cuatro dimensiones, debemos usar geometría de cuarto rango, es decir, una geometría en la cual el elemento de línea sea una forma cuártica. Una geometría de este tipo puede parecer bizarra en nuestro mundo físico, dado que no se cumple el familiar Teorema de Pitágoras. Sin embargo, esta geometría es necesaria sólo a altas energías, un régimen en el cual estas diferencias con la física de cada día están, por así decirlo, permitidas.[6]

---

[5] En relación con esta posibilidad, véanse los últimos comentarios de la tesis de Riemann [30].

[6] Aquí nuevamente son pertinentes los últimos comentarios de la tesis de Riemann.

Para obtener un acuerdo con la geometría riemanniana observada es necesario que en algunas situaciones se pueda recuperar la geometría riemanniana. Esto es posible si

$$ds^4 = \left(ds^2\right)^2 , \tag{17.1}$$

donde $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$. En este caso el tensor métrico está dado por

$$G_{ijk\ell} = g_{(ij}\, g_{k\ell)} = \frac{1}{3}\left(g_{ij}\, g_{k\ell} + g_{ik}\, g_{j\ell} + g_{i\ell}\, g_{jk}\right). \tag{17.2}$$

Los espacios con esta propiedad son los *espacios separables.*

La propiedad de separabilidad es útil en desarrollos posteriores como un control de calidad. Dado que ds^2 corresponde a un elemento de línea de la geometría riemanniana, las fórmulas y los desarrollos posteriores para un tensor genérico $\mathbf{G}$ se deben reducir al caso riemanniano cuando se aplican a un tensor separable.

La dimensión crítica para un tensor métrico de cuarto rango es cuatro, mientras que para un tensor métrico de segundo rango es dos. Por lo tanto, como un corolario de la propiedad anterior se tiene que los espacios planos con direcciones nulas no son separables.

Por consiguiente, se llega al siguiente esquema: para altas energías, la geometría es de cuarto rango, mientras que a bajas energías, el tensor métrico es de segundo rango. Esto se puede obtener a través del mecanismo de separabilidad descrito con anterioridad. Por lo tanto, este mecanismo de separabilidad debe estar contenido en la teoría.

Altas energías		Bajas energías
$G_{ijk\ell}$	$\rightarrow$	$g_{(ij}g_{k\ell)}$
ds^4	$\rightarrow$	$(ds^2)^2$

18. **Teorías de campo en espacios de cuarto rango**

Una de las maneras más sencillas de estudiar la viabilidad física de la geometría de cuarto rango es estudiar los distintos tipos de teorías físicas en que ésta puede aparecer. Para poder comparar los resultados es necesario que, en algunas situaciones, el espacio sea riemanniano; en este caso el espacio de cuarto rango es separable. El tensor métrico de cuarto rango puede aparecer de varias maneras: como un campo de fondo o como un campo dinámico en un fondo riemanniano. En primer lugar consideramos teorías de campo en un fondo de cuarto rango. Se considera el campo escalar y el campo vectorial. El lagrangiano correspondiente se elige de manera tal de satisfacer renormalizabilidad, invariancia conforme e integrabilidad.

Finalmente, en la siguiente sección se desarrolla una teoría gravitacional en la cual el tensor métrico de cuarto rango está acoplado con una conexión afín. Para construir teorías autointeractuantes es necesario construir primero invariantes diferenciales, lo cual, como se mostró en la sección anterior, es difícil de realizar.

Empecemos considerando un modelo simple para un campo escalar no–masivo, a saber,

$$\mathcal{L}_4 = G^{ijk\ell}\,\phi_i\,\phi_j\,\phi_k\,\phi_\ell\,G^{1/4}\,. \tag{18.1}$$

La ecuación de campo asociada con este lagrangiano es

$$\partial_i\left(G^{ijk\ell}\,\phi_j\,\phi_k\,\phi_\ell\,G^{1/4}\right) = 0\,. \tag{18.2}$$

Creemos que no existe un algoritmo general para encontrar soluciones de este tipo de ecuaciones, aunque existen varias soluciones particulares.

Consideremos el modelo anterior en cuatro dimensiones en un espacio plano con direcciones nulas. En este caso las ecuaciones de campo se reducen a

$$\begin{aligned} &\phi_1\,\phi_2\,\phi_{34} + \phi_1\,\phi_3\,\phi_{24} + \phi_1\,\phi_4\,\phi_{23} \\ &+\phi_2\,\phi_3\,\phi_{14} + \phi_2\,\phi_4\,\phi_{13} + \phi_3\,\phi_4\,\phi_{12} \quad = \quad 0\,. \end{aligned} \tag{18.3}$$

Un conjunto de soluciones es de la forma

$$\phi = \phi_1(z^1) + \phi_2(z^2) + \phi_3(z^3) + \phi_4(z^4)\,. \tag{18.4}$$

A pesar de la no–linealidad de las ecuaciones de campo, el número de soluciones es infinito.

La siguiente posibilidad es un campo vectorial **A**. El invariante más sencillo que se puede construir en este caso es

$$\left\langle F^4\right\rangle = G^{i_1j_1k_1\ell_1}\,G^{i_2j_2k_2\ell_2}\,F_{i_1i_2}\,F_{j_1j_2}\,F_{k_1k_2}\,F_{\ell_1\ell_2}\,. \tag{18.5}$$

El lagrangiano más sencillo está dado por

$$\mathcal{L} = \left\langle F^4\right\rangle^{1/2}\,G^{1/4}\,. \tag{18.6}$$

Pero la teoría resulta no–polinomial.

La variación del lagrangiano (18.6) con respecto a A_i da

$$\frac{d}{dx^{i_1}}\left(\frac{1}{\left\langle F^4\right\rangle^{1/2}}\,G^{i_1j_1k_1\ell_1}\,G^{i_2j_2k_2\ell_2}\,F_{j_1j_2}\,F_{k_1k_2}\,F_{\ell_1\ell_2}\,G^{1/4}\right) = 0\,. \tag{18.7}$$

La variación con respecto a G_{ijkl} da

$$G^{i_2j_2k_2\ell_2}\,F_{ii_2}\,F_{jj_2}\,F_{kk_2}\,F_{\ell\ell_2} - \frac{1}{4}\,\left\langle F^4\right\rangle\,G_{ijk\ell} = 0\,. \tag{18.8}$$

Consideremos el caso separable $\mathbf{G} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}$. En este caso el invariante (18.5) se puede escribir, aparte de un factor numérico, como

$$\langle F^4 \rangle = \left(F_{ij} \, F^{ij} \right)^2 + \frac{1}{16} \, g^{-1} \, \left(\epsilon^{ijk\ell} \, F_{ij} \, F_{k\ell} \right)^2 . \tag{18.9}$$

El lagrangiano se reduce a

$$\mathcal{L} = \left[\left(F_{ij} \, F^{ij} \right)^2 + \frac{1}{16} \, g^{-1} \, \left(\epsilon^{ijk\ell} \, F_{ij} \, F_{k\ell} \right)^2 \right]^{1/2} \, g^{1/2} . \tag{18.10}$$

Cuando $\epsilon FF = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, el lagrangiano se reduce al lagrangiano de Maxwell usual. Las ecuaciones de campo se reducen a las ecuaciones de Maxwell usuales. En el límite

$$\frac{\epsilon^{ijk\ell} F_{ij} F_{k\ell}}{F_{ij} F^{ij}} \to 0 , \tag{18.11}$$

el lagrangiano (18.6) se reduce a

$$\mathcal{L} = \left[F_{ij} \, F^{ij} + \frac{1}{32} \, g^{-1} \, \frac{\left(\epsilon^{ijk\ell} \, F_{ij} \, F_{k\ell} \right)^2}{F_{ij} \, F^{ij}} \right] \, g^{1/2} . \tag{18.12}$$

19. **Gravitación de cuarto rango** *à la* **Palatini**

Siguiendo una sugerencia de Eddington (1924), algunos autores estudiaron la geometría de cuarto rango en la década de 1950 [16, 17]. Otros autores se han interesado en esta geometría más general [32, 1].

Una posible manera de reconciliar, en cuatro dimensiones, la renormalizabilidad, la invariancia conforme y la integrabilidad es suponiendo que el espacio–tiempo esté descrito por una geometría de cuarto rango. En la sección anterior se desarrollaron modelos simples que exhiben estas propiedades; en forma explícita se mostró el papel del tensor métrico de cuarto rango $\mathbf{G}$ para lograr la integrabilidad.

En la geometría de cuarto rango el elemento de línea está dado por (16.1). Dado que $\mathbf{G}$ está directamente relacionado con la geometría del espacio–tiempo, el siguiente paso natural es usar esta geometría para describir el campo gravitacional.

A continuación mostraremos un modelo renormalizable conformemente invariante para el campo gravitacional, *à la* Palatini, basado en la geometría de cuarto rango.

El modelo resulta ser, en ausencia de materia, la Relatividad General con una constante cosmológica no–nula acoplada a un vector de Weyl. En el proceso de obtener las ecuaciones de campo correspondientes, el modelo incorpora el tensor métrico riemanniano usual $\mathbf{g}$, una constante cosmológica no–nula Λ y un vector de Weyl $\mathbf{W}$. Lo que resulta es una teoría equivalente a la Relatividad General con constante cosmológica acoplada a un campo vectorial de Weyl. Esta resulta ser una propiedad genérica de nuestras ecuaciones de campo heredada de la invariancia de escala. Es importante enfatizar que tanto la constante cosmológica como el vector de Weyl aparecen a partir de la estructura del modelo y no han sido introducidos arbitrariamente.

Además, los resultados anteriores tienen soporte observacional dado que las observaciones cosmológicas sugieren una constante cosmológica no–nula [26] y la presencia de una anisotropía en la estructura a gran escala del universo [25].

Discutamos, por lo tanto, las principales características de este modelo. El lagrangiano más sencillo que se puede construir para la descripción del campo gravitacional, que satisface renormalizabilidad, invariancia conforme e integrabilidad, es

$$\mathcal{L}_{4G} = \left\langle R^2 \right\rangle G^{1/4} \,, \tag{19.1}$$

donde

$$\left\langle R^2 \right\rangle \equiv G^{ijk\ell}\, R_{ij}(\mathbf{\Gamma})\, R_{k\ell}(\mathbf{\Gamma}) \,, \tag{19.2}$$

y G es el determinante de $\mathbf{G}$. $R_{ij}(\mathbf{\Gamma})$ es el tensor de Ricci para una conexión genérica $\mathbf{\Gamma}$ y, dado que $\mathbf{G}$ es completamente simétrico, sólo la parte simétrica del tensor de Ricci $R_{ij}(\mathbf{\Gamma})$ aparece en (19.2); por lo tanto, también consideraremos sólo conexiones simétricas. El modelo contenido en (19.1) tiene las dimensiones necesarias para la renormalizabilidad en cuatro dimensiones, a saber, L^{-4}, y es invariante bajo la transformación conforme

$$G_{ijk\ell} \;\to\; e^{2\phi(\mathbf{x})}\, G_{ijk\ell} \,, \tag{19.3}$$

y también es integrable, como se mostró anteriormente.

Ahora procedamos a obtener las ecuaciones de campo. Primero se debe considerar la variación del lagrangiano (19.1) con respecto al tensor métrico de cuarto rango $\mathbf{G}$. Entonces se obtiene

$$R_{(ij}(\mathbf{\Gamma})\, R_{k\ell)}(\mathbf{\Gamma}) - \frac{1}{4}\, \left\langle R^2 \right\rangle G_{ijk\ell} = 0 \,. \tag{19.4}$$

Esta ecuación implica que $\mathbf{G}$ es el producto simétrico de algún tensor de segundo rango $\mathbf{h}$. Entonces se tiene $ds^4 = (ds^2)^2$, donde $ds^2 = h_{ij} dx^i dx^j$. Claramente, si deseamos hacer contacto con la geometría de la experiencia cotidiana, se debe identificar $\mathbf{h}$ con el tensor métrico riemanniano $\mathbf{g}$, a saber, $\mathbf{h} = \mathbf{g}$; es decir (17.2). De este modo, la descomposición de $\mathbf{G}$ en términos de un tensor métrico riemanniano se sigue en forma natural y todos nuestros resultados se pueden escribir en términos de la geometría riemanniana. Observemos que la descomposición de $\mathbf{G}$ en términos de $\mathbf{g}$ no es una suposición sino que se sigue de (19.4), es decir, de las ecuaciones de campo, y por lo tanto es un resultado dinámico. Entonces, se tiene

$$R_{(ij)}(\mathbf{\Gamma}) = \alpha\, g_{ij} \,, \tag{19.5}$$

donde α es un coeficiente de proporcionalidad el que, sin embargo, no se puede determinar a partir de (19.4) dado que, debido a la invariancia conforme, esta ecuación tiene traza nula. A lo más podemos considerar la parte de la relación (19.5) anterior que tiene traza nula y escribir

$$R_{(ij)}(\mathbf{\Gamma}) - \frac{1}{4} \langle R \rangle \, g_{ij} = 0 \,, \tag{19.6}$$

donde $\langle R \rangle = g^{ij} R_{ij}(\mathbf{\Gamma})$. La ecuación (19.6) anterior se debe ahora considerar como la ecuación de campo correspondiente a (19.4).

La variación del lagrangiano (19.1) con respecto a la conexión da la condición de metricidad

$$2 \, \nabla^{\Gamma}_{k} \tilde{\gamma}^{ij} - \nabla^{\Gamma}_{m} \tilde{\gamma}^{mj} \, \delta^{i}_{k} - \nabla^{\Gamma}_{m} \tilde{\gamma}^{mi} \, \delta^{j}_{k} = 0 \,, \tag{19.7}$$

donde ∇^{Γ} denota la derivada covariante con respecto a la conexión $\mathbf{\Gamma}$, y

$$\tilde{\gamma}^{ij} = G^{ijk\ell} \, R_{k\ell}(\mathbf{\Gamma}) \, G^{1/4} \,. \tag{19.8}$$

Tomando la traza de la ecuación (19.8) se llega a que

$$(d-1) \, \nabla^{\Gamma}_{m} \tilde{\gamma}^{mi} = 0 \,, \tag{19.9}$$

Por lo tanto, para $d \neq 1$, la ecuación (19.8) se reduce a

$$\nabla^{\Gamma}_{k} \tilde{\gamma}^{ij} = 0 \,. \tag{19.10}$$

Expandiendo la ecuación (19.10) se obtiene

$$G^{1/4} \, \nabla^{\Gamma}_{k} \gamma^{ij} + \gamma^{ij} \, \nabla^{\Gamma}_{k} (G^{1/4}) = 0 \,, \tag{19.11}$$

donde

$$\gamma^{ij} = G^{ijk\ell} \, R_{k\ell}(\mathbf{\Gamma}) \,. \tag{19.12}$$

Ahora, un álgebra sencilla nos muestra que el tensor γ^{-1} está conformemente relacionado con el tensor métrico $\mathbf{g}^{-1}$. De hecho

$$\gamma^{ij} = G^{ijk\ell} \, R_{k\ell}(\mathbf{\Gamma}) = \frac{1}{4} \langle R \rangle \, g^{ij} \,. \tag{19.13}$$

Si $\langle R \rangle = 0$, entonces $\gamma^{ij} = 0$ y $R_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = 0$, y todas las ecuaciones colapsan a identidades inútiles; no hay dinámica. Por lo tanto, se debe tener $\langle R \rangle \neq 0$ y entonces es posible definir un tensor directo γ.

La ecuación (19.10) se reescribe como

$$\nabla^{\Gamma}_{k} \left(\langle R \rangle \, g^{ij} \, g^{1/2} \right) = 0 \,. \tag{19.14}$$

Expandiendo se tiene

$$g^{1/2} \, \langle R \rangle \, \nabla^{\Gamma}_{k} g^{ij} + g^{1/2} \, g^{ij} \, \nabla^{\Gamma}_{k} \langle R \rangle + \langle R \rangle \, g^{ij} \, \nabla^{\Gamma}_{k} g^{1/2} = 0 \,. \tag{19.15}$$

Contrayendo con g_{ij} se obtiene

$$g^{1/2} \, \langle R \rangle \, g_{ij} \, \nabla^{\Gamma}_{k} g^{ij} + 4 \, g^{1/2} \, \nabla^{\Gamma}_{k} \langle R \rangle + 4 \, \langle R \rangle \, \nabla^{\Gamma}_{k} g^{1/2} = 0 \,. \tag{19.16}$$

Usando la relación

$$\nabla_{k} g^{1/2} = -\frac{1}{2} \, g^{1/2} \, g_{ij} \, \nabla_{k} g^{ij} \,, \tag{19.17}$$

la ecuación anterior se reduce a

$$2\,g^{1/2}\,\nabla^{\Gamma}_{k}\,\langle R\rangle + \langle R\rangle\;\nabla^{\Gamma}_{k} g^{1/2} = 0\,, \tag{19.18}$$

lo cual se puede escribir en forma condensada como

$$\nabla^{\Gamma}_{k}(\langle R\rangle^{2}\;g^{1/2}) = 0\,. \tag{19.19}$$

Reemplazando (19.18) en (19.15) se obtiene

$$\langle R\rangle\;\nabla^{\Gamma}_{k} g^{ij} - g^{ij}\,\nabla^{\Gamma}_{k}\,\langle R\rangle = 0\,, \tag{19.20}$$

lo cual se escribe en forma condensada como

$$\nabla^{\Gamma}_{k}\left(\frac{1}{\langle R\rangle}\,g^{ij}\right) = 0\,, \tag{19.21}$$

La condición anterior significa que

$$\begin{aligned}
\Gamma^{k}{}_{ij} \quad &= \quad \left\{ {k \atop ij} \right\}(\langle R\rangle\;\mathbf{g}) \\
&= \quad \left\{ {k \atop ij} \right\}(\mathbf{g}) \\
&\quad + \frac{1}{2\,\langle R\rangle}\,g^{k\ell}\;\left(\partial_i\,\langle R\rangle\;g_{j\ell} + \partial_j\,\langle R\rangle\;g_{i\ell} - \partial_\ell\,\langle R\rangle\;g_{ij}\right)\,,
\end{aligned} \tag{19.22}$$

donde $\left\{ {k \atop ij} \right\}(\mathbf{g})$ es el símbolo de Christoffel asociado con el tensor $\mathbf{g}$.

Ahora sólo se necesita evaluar las ecuaciones de campo (19.9) y (19.13) para la conexión (19.22). Las ecuaciones de campo resultante son

$$\begin{aligned}
R_{ij}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2}\,(\nabla_i W_j + \nabla_j W_i) + \frac{1}{2}\,W_i\,W_j& \\
-\frac{1}{4}\left[R(\mathbf{g}) - (\nabla W) + \frac{1}{2}\,W^{2}\right]\,g_{ij} \quad &= \quad 0\,, \\
R(\mathbf{g}) - 3\,(\nabla W) - \frac{3}{2}\,W^{2} \quad &= \quad 4\,\Lambda\,,
\end{aligned} \tag{19.23}$$

donde ∇ es la derivada covariante usual con respecto al tensor métrico $\mathbf{g}$. Las ecuaciones de campo (19.15) y (19.16) ahora se escriben completamente en términos del tensor métrico riemanniano $\mathbf{g}$; por lo tanto, se pueden comparar, interpretar y verificar en situaciones físicas familiares.

Para los propósitos siguientes, es adecuado reescribir las ecuaciones (19.15) y (19.16) como una sola ecuación

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2}\,(\nabla_i W_j + \nabla_j W_i) + \frac{1}{2}\,W_i\,W_j & \\ -\frac{1}{2}\,\left[(\nabla W) + W^2\right]\,g_{ij} & \\ -\frac{1}{2}\,\left[R(\mathbf{g}) - 3\,(\nabla W) - \frac{3}{2}\,W^2 - 2\,\Lambda\right]\,g_{ij} &= 0\,. \end{aligned} \tag{19.24}$$

La contracción de (19.17) da (19.16), de manera que las ecuaciones son equivalentes.

Se debe enfatizar que (19.15) y (19.16) son conformemente invariantes y que se siguen del principio variacional (19.1) en geometría de cuarto rango. La constante cosmológica Λ no puede ser cero en estas ecuaciones o el tensor métrico se anularía a partir de (19.4) y (19.12). Ésta es una propiedad interesante de la teoría, dado que predice una constante cosmológica necesariamente no–nula. Además, no hay nada que restrinja el valor de $\mathbf{W}$; por lo tanto, es posible considerar el caso $\mathbf{W} = 0$. En este caso la ecuación (19.17) se reduce a

$$R_{ij}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2}\,\left[R(\mathbf{g}) - 2\,\Lambda\right]\,g_{ij} = 0\,. \tag{19.25}$$

Es interesante observar que (19.18) se puede obtener a partir del lagrangiano

$$\mathcal{L}_{GR\Lambda C} = \left[\langle R\rangle - 2\,\Lambda\right]\,g^{1/2}\,, \tag{19.26}$$

de la geometría de segundo rango usual. Se debe enfatizar, no obstante, que se debe tener $\Lambda \neq 0$; en caso contrario la construcción anterior colapsa, dado que en ese caso la ecuación (19.4) requeriría $\gamma^{-1} = 0$. Por lo tanto, nuestro modelo requiere que la constante cosmológica sea distinta de cero. Este último resultado es muy importante dado que, a pesar del 'prejuicio teórico común' de que $\Lambda = 0$, la evidencia observacional muestra que muy probablemente $\Lambda \neq 0$. Esta evidencia apoya la Relatividad General con una constante cosmológica y a nuestro modelo. Sin embargo, este tiene una ventaja clara sobre la Relatividad General con una constante cosmológica, ya que la constante cosmológica es predicha por nuestro formalismo y no se introduce como un parámetro cuyo valor se deba fijar *a posteriori*.

También existe evidencia observacional que apunta a la existencia de una anisotropía en la estructura de gran escala del universo. Nuestras ecuaciones de campo (19.23) y (19.24) ofrecen una manera de acomodar esta anisotropía; en este caso se debe considerar $\mathbf{W} \neq 0$. A continuación veamos si es posible obtener las ecuaciones de campo (19.17) a partir de un lagrangiano sencillo, en geometría de segundo rango, que se parezca a (19.19). La elección más sencilla es

$$\mathcal{L}_{4C} = \left[e^{-\Psi}\, g^{ij}\, \left(R_{ij}(\mathbf{\Gamma}) + \alpha\, \nabla^{\Gamma}_{i} W_j + \beta\, W_i\, W_j\right) - 2\,\Lambda\right]\, e^{2\Psi}\, g^{1/2}\,, \tag{19.27}$$

Sin embargo, es posible mostrar que no hay valores de α y β capaces de reproducir las ecuaciones de campo (19.17). De este modo, la geometría de cuarto rango juega un papel crucial, ya que las ecuaciones de campo (19.17) se pueden obtener a partir de un principio variacional en geometría de cuarto rango, pero no de un principio variacional en geometría de segundo rango.

En resumen, hemos construido una teoría gravitacional que es renormalizable, conformemente invariante e integrable. Ésta es la primera teoría gravitacional en la cual se encuentran juntas todas estas condiciones. Además, contiene la geometría riemanniana en forma natural. La solución esféricamente simétrica puede reproducir los éxitos observacionales de la Relatividad General (los cuales se basan todos en un espacio de Schwarzschild sin materia) si la constante cosmológica resulta ser suficientemente pequeña, como es el caso. Por lo tanto, las soluciones de la Relatividad General con constante cosmológica están aquí contenidas en forma natural sin la necesidad de introducir la constante cosmológica en forma arbitraria.

20. **Mecánica de Nambu**

Hasta ahora las formas de rango superior que se han considerado son completamente simétricas. También existen formas de rango superior con otras simetrías, tales como las asociadas con las formas simplécticas de rango superior, los grupos de Lie de rango superior, etc. Como primer ejemplo se puede considerar la mecánica de Nambu, que involucra formas antisimétricas de tercer rango.

Se debe recordar que las formas simplécticas de segundo rango están dadas por

$$\{Z_i,\, Z_j\} = J_{ij}\,, \tag{20.1}$$

donde los Z_i son coordenadas simplécticas y J_{ij} son las componentes de la matriz simpléctica $\mathbf{J}$. Esta forma satisface la identidad de Jacobi

$$\left\{F_{\{1},\, \left\{F_2,\, F_{3\}}\right\}\right\} \equiv 0\,, \tag{20.2}$$

donde los $F_{1,2,3}$ son funciones de las coordenadas simplécticas.

En el caso de la mecánica de Nambu, se tiene una relación simpléctica de la forma

$$\{Z_i,\, Z_j,\, Z_k\} = J_{ijk}\,. \tag{20.3}$$

Tal como en el caso anterior los Z_i son coordenadas simplécticas y J_{ijk} son las componentes de la forma simpléctica de tercer rango $\mathbf{J}$.

En este caso existen varias identidades de Jacobi que no es el caso enumerar aquí..

Los grupos de Lie están caracterizados por

$$\{G_i,\, G_j\} = C_{ij}{}^{k}\, G_k\,. \tag{20.4}$$

En este caso también se satisface una identidad de Jacobi

$$\big\{G_{\{1},\, \big\{G_2,\, G_{3\}}\big\}\big\} \equiv 0\,. \tag{20.5}$$

Los grupos de Lie de aridad superior están caracterizados por

$$\{G_i,\, G_j,\, G_k\} = C_{ijk}{}^{\ell}\, G_\ell\,. \tag{20.6}$$

En este caso también existen varias identidades de Jacobi.

21. **Estados entrelazados**

Entre las aplicaciones que han encontrado las formas de rango superior se tiene a los estados *entrelazados*.[7] En mecánica cuántica el estado de un sistema se puede describir a través de un vector de estado de la forma

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\ |i\rangle \otimes |j\rangle\ . \tag{21.1}$$

En el caso en que $|\psi\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$ los estados no están entrelazados, lo cual se puede caracterizar por $\det(\alpha_{ij}) = 0$. Pero si $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, entonces los estados están entrelazados.

En el caso de más bits (qubits) el estado está caracterizado por el vector de estado

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,\cdots,\ell} \alpha_{ij\cdots\ell}\ |i\rangle \otimes |j\rangle \otimes \cdots \otimes |\ell\rangle\ . \tag{21.2}$$

El entrelazamiento está caracterizado por la condición

$$\det(\alpha_{ij\cdots\ell}) \neq 0\,. \tag{21.3}$$

22. **Conclusiones**

Hemos presentado las formas de rango superior tanto en sus aspectos algebraicos como diferenciales. Las formas de rango superior tienen gran potencialidad en matemáticas y en física. No obstante, la manipulación algebraica de estos objetos es extremadamente complicada, lo cual se ha traducido en la existencia de pocos resultados concretos. Sin embargo, la alta potencialidad matemática y algunas razones conceptuales obligan a continuar con este esfuerzo.

Los resultados descritos anteriormente han sido presentados en forma extensa en el libro *Formas y Geometría de Rango Superior* [43]. Los resultados más importantes son los siguientes.

[7] La palabra original en inglés es *entanglement*, la cual resulta de difícil traducción. Otra traducción que se utiliza en la literatura es ‘estados *enredados*’.

En primer lugar se debe mencionar la elaboración de un marco conceptual unificado para la descripción de las posibles geometrías diferenciales. Entre los aspectos algebraicos se debe mencionar la introducción de los tensores de permutación, los cuales permiten construir los discriminantes en un lenguaje tensorial; la introducción de los cuadrados semimágicos como una manera de representar los invariantes algebraicos tensoriales; y el desarrollo de un método gráfico para la construcción de los invariantes algebraicos tensoriales.

Entre las propiedades algebraicas se debe mencionar la introducción de una definición invariante de hiperdeterminante y de tensor inverso, la introducción de los tensores de permutación, la formulación de un teorema de Cayley–Hamilton y la introducción de identidades polinomiales para tensores de rango superior. Se han aplicado los cuadrados semimágicos y el método gráfico, desarrollado anteriormente, en la construcción de los invariantes algebraicos para tensores de rango superior. Por último, se ha realizado la construcción de hiperdeterminantes e identidades algebraicas para tensores de rango superior impar.

Entre los resultados diferenciales para la geometría de rango superior, se debe mencionar la construcción de invariantes diferenciales. Se introducen los conceptos de norma, producto interno, ángulo, invariancia conforme, simetría, ecuaciones de Killing y de Killing conforme para la geometría de rango superior. Se introducen los conceptos de dirección nula y de espacio plano con direcciones nulas para la geometría de rango superior. En esa misma sección, se elabora un teorema que permite construir espacios con un número infinito de simetrías.

Finalmente, se debe mencionar algunos de los desarrollos en física de cuarto rango. En primer lugar, se tiene la introducción del concepto de espacio separable, el cual permite pasar de geometrías de cuarto rango a geometrías de segundo rango. Se presenta un estudio de las teorías de campos formuladas en geometrías de cuarto rango. Finalmente, se desarrolla un modelo para la interacción gravitacional que da origen a una constante cosmológica necesariamente no–nula y a una anisotropía del espacio–tiempo.

Referencias

[1] G. S. Asanov. *Finsler Geometry, Relativity and Gauge Theories* (Reidel, Dordrecht, 1985).

[2] J. Audretsch. *Riemannian structure of space–time as a consequence of quantum mechanics*. Phys. Rev. D **27**, 2872 (1983).

[3] J. de Azcárraga & J. M. Izquierdo. *Topics on n–ary algebraic structures*, Acta Polytech. **50**, 7 (2010).

[4] J. Bolyai. *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI: Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casun falsitatis quadratura circuli geometrica* (1832).

1. *The Science of Absolute Space*, en [5].

[5] R. Bonola. *La Geometria Non–Euclidea* (1906).

1. *Non–Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Development* (The Open Court Publishing Company, , 1912). Reedición (Dover, New York, 1955).

[6] A. Cayley. *The Collected Mathematical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge, 1889; Johnson, New York, 1963).

[7] A. Cayley. *On the theory of linear transformations*. Cambridge Math. J. **4**, 193 (1845).

[8] L. E. Dickson. *A new simple theory of hypercomplex integers*. J. Math. Pures Appl. **2**, 281 (1923).

[9] J. Ehlers. *The Nature and Structure of Spacetime*. Contenido en *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973).

[10] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzunsber. Preuss. Akad. Wiss. **44**, 2, 778 (1915).

[11] C. F. Gauss. *Disquititiones generales circa Superficies Curvas*. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores **6** (1827).

1. *General Investigations of Curved Surfaces* (Dover, New York, 2005).

[12] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov & A. V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants* (Birkhäuser, Boston, 1994).

[13] M. V. Green, J. H. Schwarz & E. Witten. *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[14] V. Kaplunovsky & M. Weinstein. *Space–time: Arena or illusion?*. Phys. Rev. D **31**, 1879 (1985).

[15] U. Kasper. *On the space–time structure and its relation to quantum mechanics*. Astron. Nachr. **307**, 307 (1986).

[16] C. W. Kilmister & G. Stephenson. *An axiomatic criticism of unified field theories. I*. Suppl. Nuovo Cimento **11**, 91 (1950).

[17] C. W. Kilmister & G. Stephenson. *An axiomatic criticism of unified field theories. II*. Suppl. Nuovo Cimento **11**, 118 (1950).

[18] T. Levi–Civita. *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*. Rend. Circ. Mat. Palermo **42**, 173 (1917).

[19] S. Lie. *Sur les fondaments de la géométrie*. C. R. Acad. Sci. Paris **114**, 461 (1892).

[20] N. I. Lobachevsky. *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse di théorème des parallèles* (1826).

Este artículo fue presentado en la Universidad de Kazan en 1826. El manuscrito está perdido, pero se conserva un resumen del mismo en [21]. Un resumen de estos resultados de Lobachevski se encuentra en [22].

[21] N. I. Lobachevski. *On the foundations of geometry*. Kasanskij Věstnik (1829–1830).

[22] N. I. Lobachevski. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Fincke, Berlin, 1840).

1. *Geometrical Researches on the Theory of Parallels*. Contenido en [5].

[23] J. G. Luque & J. Y. Thibon. *Polynomial invariants of four qubits*. Phys. Rev. A **67**, 042303 (2003).

[24] Y. Nambu. *Generalized Hamiltonian dynamics*. Phys. Rev. D **7**, 2405 (1973).

[25] B. Nodland & J. P. Ralston. *Indication of anisotropy in electromagnetic propagation over cosmological distances*. Phys. Rev. Lett. **78**, 3043 (1997).

[26] J. P. Ostriker & P. J. Steinhardt. *The observational case for a low–density universe with a non–zero cosmological constant*. Nature 377, 600 (1995).

[27] A. Palatini. *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio de Hamilton*. Rend. Circ. Mat. Palermo **43**, 203 (1919).

1. *Invariant deduction of the gravitational equations from the principle of Hamilton*. Translated by R. Hojman & C. Mukku. Contenido en P. G. Bergmann

& V. De Sabbata (editors), *Cosmology and Gravitation* (Plenum, New York, 1980), p. 477.
[28] M. Rausch de Traubenberg & N. Fleury. *Beyond Spinors.* Contenido en *Leite Lopez Festschrift*, edited by N. Fleury (World Scientific, Singapore, 1988).
[29] M. Rausch de Traubenberg. *Fractional supersymmetry and Lie algebras.* Contenido en *Workshop on Non Commutative Geometry and Superstring Theory*, Rabat (2000).
[30] B. Riemann. *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen* (1854).
Esta tesis fue presentada el 10 de junio de 1854 en Göttingen y fue publicada por primera vez en:
1. *Abh. Königl. Gesselsch. Wiss.* **13**, Göttingen (1868).
Muchas veces a este trabajo se le asigna esta última fecha para no provocar confusión con respecto a la tardanza de la influencia de Riemann en la geometría del siglo XIX. El trabajo original también ha sido reimpreso en las obras completas de Riemann:
2. *Gesammelte Matematische Werke*, edited by H. Weber & R. Dedekind (Teubner, Leipzig, 1876; 1892; Dover, New York, 1953).
La primera traducción al inglés fue hecha por Clifford y fue publicada en:
3. *Nature* **7**, 14–17, 36, 37, 183–184 (1873); y posteriormente en forma íntegra en sus obras completas:
4. W. K. Clifford. *Mathematical Papers* (MacMillan, London, 1882).
Otras traducciones al inglés se pueden encontrar en:
5. H. S. White. Contenido en *A Source Book of Mathematics* (McGraw–Hill, New York, 1929).
6. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Houston, 1979).
Traducciones al español se pueden encontrar en:
7. E. Vidal A.. *Estado actual, métodos y problemas de la geometría diferencial.* Revista de Matemática Hispano Americana **18**, 28 (1958).
8. V. Tapia. *Riemann y los fundamentos de la geometría.* Miscelánea Matemática **36**, 1 (2002).
[31] H. P. Robertson. *Geometry as a branch of physics.* Contenido en *Albert Einstein: Philosopher–Scientist*, edited by P. A. Schilpp (Tudor, New York, (1949).
[32] I. W. Roxburgh & R. K. Tavakol. *Non–Riemann geometrizable effects in the gravitational one-body problem.* Gen. Rel. Grav. **10**, 307 (1979).
[33] G. Saccheri. *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia* (Paoli Antoniii Montani, Mediolani (Milán), 1773).
Existe edición bilingüe (latín–inglés) de la editorial Chelsea, Nueva York, 1986.
[34] A. Sandage. *Observational tests of world models*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **26**, 561 (1988).
[35] L. Schläfli. *Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen.* Denkschr. Der Kaiserlicher Akad. der Wiss. math. naturwiss. Klasse **4** (1851).
[36] E. Scholz. *Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría.* Gaceta RSME **8**, 683 (2005).
[37] K. Schwarzschild. *Über das zulaessige Krümmungsmaass des Raumes*, Vierteljahrschrift d. Astronom. Gesellschaft. **35**, 337 (1900).
1. *On the permisible curvature of space.* Class. Quantum Grav. **15**, 2539 (1998).
[38] V. Tapia. *Beyond two dimensions.* Communications of the Joint Institute for Nuclear Research, E2-91-316, Dubna (1991).
[39] V. Tapia. *Beyond two dimensions in conformal field theory.* XIV Workshop on High Energy Physics and Field Theory, Protvino, July, 1991 (Nauka, Moscow, 1991).

[40] V. Tapia. *Integrable conformal field theory in four dimensions and fourth–rank gravity*. Int. J. Mod. Phys. D **2**, 413 (1993).
[41] V. Tapia. *Invariants and polynomial identities for higher rank matrices.* J. Phys. A: Math. Theor. **40**, 5525 (2007).
[42] V. Tapia & D. K. Ross. *Conformal fourth–rank gravity, non–vanishing cosmological constant, and anisotropy*. Class. Quantum Grav. **15**, 245 (1998).
[43] V. Tapia. *Formas y Geometría de Rango Superior* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009).
[44] T. Y. Thomas. *Differential Invariants of Generalized Spaces* (Cambridge University Press, Cambridge, 1934).
[45] H. von Helmholtz. *Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Nach. Ges. Wiss. Göttingen **9**, 193 (1868).
[46] H. Weyl. *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid (Springer, Berlin, 1923).
[47] E. Zermelo. *Untersuchungen zur Variations Rechnung.* Doctoral Dissertation, Philosophischen Facultät, Universität zu Berlin (Schade, Berlin, 1894).

(Recibido en mayo de 2014. Aceptado para publicación en agosto de 2014)

Victor Tapia
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia
e-mail: vmtapiae@unal.edu.co