Lecturas Matemáticas
Volumen **35** *(2) (2014), páginas 159–168*
ISSN 0120–1980

La conjetura Hilbert–Pólya

The Hilbert–Pólya Conjecture

Alejandro Cárdenas–Avendaño
Konrad Lorenz Fundación Universitaria, Bogotá, Colombia

Resumen. La función zeta de Riemann es de interés para los matemáticos debido a su conexión con los números primos, pero también ha demostrado ser una importante herramienta en sistemas físicos, ya que algunos cálculos que implican su uso reflejan resultados fundamentales asociados a valores propios del operador energía de los sistemas físicos. Desde la popularización de la conjetura de Hilbert-Pólya por Montgomery en 1973, se han realizado trabajos analíticos y numéricos que evidencian una posible conexión entre la función zeta de Riemann y el espectro cuántico de energía. En este artículo se realiza una breve revisión de los orígenes de la función zeta de Riemann y su posible relación con sistemas físicos, con un enfoque fundamentalmente didáctico centrado en la contextualización de su conexión con conceptos de energía en mecánica cuántica.

Key words and phrases. Mathematical Physics, Riemann zeta function, Zeros, Spectra

Abstract. The Riemann zeta function is of interest to mathematicians because of its connection to the primes, but also has proved to be an important tool in physical systems, since some calculations involving its use reflect some fundamental results associated with the eigenvalues of the energy operator of some physical systems. Since the popularization of the Hilbert-Pólya conjecture by Montgomery in 1973, there have been several analytical and numerical works that show a possible connection between the Riemann zeta function and quantum energy spectrum. In this paper I present a brief review of the origins of the Riemann zeta function and its possible relationship to physical systems with a didactic approach, mainly focused on the contextualization of its connection with energy concepts in quantum mechanics.

1. Introducción

Hallar la distribución de los números primos en los números naturales no ha resultado ser una tarea trivial, al no encontrarse, hasta ahora, un patrón claro y definido. Sin embargo, el célebre matemático alemán Bernhard Riemann [18] encontró que la frecuencia de aparición de los números primos guarda una relación cercana con el comportamiento de una función bastante elaborada, llamada *la función zeta de Riemann.* La matemática tiene en su historia reciente un capítulo completo, y en continua construcción, dedicado a esta función especial que desde su formulación ha estado relacionada con, quizá, la conjetura más relevante de la matemática [19], conocida como la *hipótesis de Riemann*, la cual asegura que todas las raíces no triviales de la función zeta de Riemann están en la línea recta vertical $1/2+it$ del plano complejo, siendo t un número real [6]. La veracidad de la hipótesis ha sido confirmada numéricamente para las primeras 10^{13} raíces [7, 2004].

La función zeta de Riemann es de interés para los matemáticos debido a su conexión con los números primos, pero también ha demostrado ser una importante herramienta para atacar problemas físicos. Por ejemplo, en el caos cuántico algunos cálculos que implican la función zeta de Riemann reflejan las manipulaciones más fundamentales del trabajo semiclásico, en donde los números primos corresponderían con las órbitas periódicas primitivas de un H hamiltoniano clásico caótico, cuya cuantización produciría los ceros de la función zeta de Riemann como autoenenergías [1], [20], [3]. En dichos sistemas caóticos la acción de las órbitas periódicas crece funcionalmente igual que la aparición de ceros de la función zeta de Riemann [20] sobre la línea crítica. En 2008 Sierra & Townsend propusieron un modelo cuántico en el que los ceros de la función zeta de Riemann corresponden aproximadamente con niveles de energía de un electrón sometido a determinados campos electromagnéticos. El modelo, aunque aún incompleto, proporciona pistas claves sobre la hipótesis [22].

Diversas aplicaciones y análogos físicos de la función zeta de Riemann están fuera del alcance de este artículo y sugiero revisar los trabajos hechos por Schumayer & Hutchinson [20] y Sierra & Latorre [23, 11, 24] en los cuales, enfocándose en los modelos, presentan diversos sistemas físicos que se relacionan con la función zeta de Riemann.

En este trabajo se presenta de manera no extensiva la relación entre la función zeta de Riemann y el concepto de energía en la mecánica cuántica. En la sección 2 se define la función y se enuncia su conexión con la distribución de los números primos. En la sección 3 se enuncia la conjetura de Hilbert–Pólya, la cual enmarca clásicamente la conexión de la función zeta de Riemann con los sistemas físicos. En la sección 4 se presenta un ejemplo sencillo en el que el cálculo directo de la función reproduce las líneas de emisión del hidrógeno. Finalmente, se hace una breve discusión sobre lo presentado.

2. **La función zeta de Riemann**

La función de zeta Riemann se define por [5]

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \tag{1}$$

donde $\Gamma(s)$ es la función gamma. La función $\zeta(s)$ es analítica en todo el plano complejo salvo en el punto $s = 1$, donde tiene un polo de orden uno, y en los puntos $s = -2, -4, -6, \ldots$ se anula **trivialmente**. La integral es convergente para todos los valores de s, sean reales o complejos, ya que e^x crece más rápido que x^s cuando $x \to \infty$.

Para $Re(s) > 1$ y p un número primo se cumple que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{2}$$

y de esta manera los números primos construyen, bajo las consideraciones anteriores, la función $\zeta(s)$. La continuación analítica sobre el plano complejo, excepto para $s = 1$, de la función 1 se logra definiendo la función $\xi(s)$

$$\xi(s) = (s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}}, \tag{3}$$

la cual tiene infinitos ceros en la franja $0 < Re(s) < 1$ que corresponden exactamente a los de la función $\zeta(s)$, denominados los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

En 1914 Hardy [8] demostró que sobre la línea $Re(s) = \frac{1}{2}$ existen infinitos ceros. Sin embargo, la última afirmación es el comienzo de la propuesta que hizo Riemann al asegurar que era muy probable que *todos* las ceros se encuentran sobre esa, conjetura conocida hoy en día como la *hipótesis de Riemann*.

La función (1) satisface una ecuación funcional, debida a Riemann [18], es decir una relación entre $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$,

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{-1+s} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s), \tag{4}$$

la cual es, quizá, la propiedad más importante conocida sobre la función de zeta de Riemann. La función $\xi(s)$ cumple también una ecuación funcional más simétrica; a saber, $\xi(s) = \xi(1-s)$.

La verificación de la hipótesis de Riemann es la llave final para el entendimiento de los números primos [6]. Desde su formulación no han faltado mentes brillantes al acecho de la solución, como. por ejemplo. Hadamard, von Mangoldt, de la Vallée Poussin, Landau, Hardy, Littlewood, Siegel, Pólya, Lindelöf, Bohr, Erdős, Selberg, por nombrar algunos [6]. Por ejemplo, en 1942 Selberg [21] demostró que sobre la línea crítica caen una fracción del total de todos los ceros, afirmando específicamente que el número de ceros de la forma $s = 1/2 + it$ $(0 \leq t \leq T)$ crece como $T\ln(T)$ para T grande. En 1974 Levinson [12] demostró que por lo menos un tercio de los ceros no triviales están en la línea crítica y en 1989 Conrey [4] aumentó el valor a dos quintos.

Ahora bien, la conexión de la función $\zeta(s)$ con los números primos radica en el resultado de 1859 de Riemann [18] para la función $\pi(x) : N \to N$, definida como la función que asigna a cada natural x el número de primos menores o iguales a x,

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} J\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

con

$$\begin{aligned} J(x) &= Li(x) - \sum_{Im[\rho]>0} \left[Li(x^{\rho}) + Li\left(x^{1-\rho}\right)\right] \\ &\quad + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} - \log(2), \end{aligned} \tag{5}$$

$\mu(n)$ la función de Möbius, definida como $\mu(1) = 1$ y

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & si\, n\, es\, divisible\, por\, el\, cuadrado\, de\, un\, primo \\ 1 & si\, n\, es\, producto\, de\, un\, número\, par\, de\, primos \\ -1 & si\, n\, es\, producto\, de\, un\, número\, impar\, de\, primos \end{cases},$$

ρ son los ceros no triviales de la función zeta de Riemann y $Li(x)$ es la integral logarítmica

$$Li(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^{x} \frac{dt}{\log t}\right].$$

En la expresión (5) se tienen, de manera general, tres tipos de términos. Los que no crecen cuando x crece

$$\int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} + \log \xi(0),$$

los que crecen cuando x crece, pero que "oscilan" en signo[1], debido a las contribuciones de

$$\sum_{Im[\rho]>0} \left[Li(x^{\rho}) + Li\left(x^{1-\rho}\right)\right],$$

y un término de crecimiento sostenido

$$Li(x).$$

Por lo tanto, en términos escuetos, esta fórmula dice que los ceros de la función zeta de Riemann controlan las oscilaciones de la distribución de los números primos alrededor de sus posiciones esperadas.

[1] Riemann los llamo términos periódicos, siendo claro en que esos términos requieren una adecuada ordenación por su magnitud. "Riemann descubrió que una serie condicionalmente convergente de términos reales siempre se puede reordenar de manera que resulte una serie que converja y tenga una suma prefijada"[2].

3. La conjetura de Hilbert–Pólya

Durante el comienzo del siglo XX Hilbert y Pólya, independientemente, propusieron un acercamiento físico a la hipótesis de Riemann: *encontrar un operador (i.e. una matriz infinita) cuyos autovalores correspondan a los ceros de la función zeta de Riemann*, enunciado conocido como la conjetura de Hilbert–Pólya. Sobre el origen de la conjetura se sabe muy poco y la primera publicación que la menciona se debe a Montgomery [14].

Hilbert desarrolló en Göttingen, durante los años 1903-06, la matemática apropiada para la mecánica cuántica, al ser una aplicación directa de la teoría de las ecuaciones integrales, de la teoría de autovectores y autovalores y del álgebra lineal [17]. La teoría del espacio de Hilbert, bautizada por él mismo como la *teoría espectral* por razones técnicas [17], logró, tras los trabajos de von Neumann [26] iniciados en 1926, explicar las características de los espectros atómicos de manera fortuita. Incluso Hilbert menciona maravillado en sus últimos años:

> "Desarrollé mi teoría de variables infinitas a partir de intereses puramente matemáticos, e incluso ese estudio fue llamado "análisis espectral" sin ningún presentimiento de que más tarde encontraría una aplicación al espectro real físico" ([17], traducción libre del autor)

En esta nueva teoría los observables físicos, dados en términos probabilísticos, están embebidos en matrices hermíticas a través de sus autovalores y sus autovectores asociados. La simetría que proporcionan las matrices hermíticas garantiza que los autovalores del hamiltoniano, y por lo tanto los niveles de energía correspondientes al sistema, sean números reales.

Por su parte, Pólya en 1982 le escribió a Odlyzko explicando su contribución:

> "Pasé dos años en Göttingen, hasta el comienzo de 1914. Traté de aprender la teoría analítica de números de Landau. Él me preguntó un día: "Tú sabes algo de física. ¿Conoces una razón física para que la hipótesis de Riemann sea verdadera?". Este sería el caso, le contesté, si los ceros no triviales de función zeta estuvieran conectados con el problema físico, la hipótesis de Riemann sería equivalente al hecho de que todos los valores propios del problema físico sean reales. Nunca publiqué este comentario, pero de algún modo se hizo conocido y todavía se recuerda". (Traducción libre del autor de una carta personal que Pólya envió a Odlyzko[2])

[2]Las cartas que se escribieron Odlyzko y Pólya se encuentran en: `http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko//polya/index.html`

Más de cien años después del artículo de RIEMANN, MONTGOMERY [14], asumiendo la hipótesis como verdadera, estudió la correlación entre pares de los ceros de la función zeta de Riemann y obtuvo

$$R_2\,(r) = 1 - \frac{\sin^2(\pi r)}{(\pi r)^2}, \tag{6}$$

resultado que coincide exactamente al esperado para la correlación entre pares de una matriz hermítica aleatoria, la cual describe los niveles energéticos del núcleo atómico, en completo acuerdo con la conjetura de Hilbert–Pólya. Esta aparente analogía con la física la encontró FREEMAN DYSON durante una conversación con MONTGOMERY en el año 1972 en Princeton.

DYSON había estudiado, junto con MEHTA, extensivamente las matrices hermíticas aleatorias identificando en esencia tres tipos de ensambles con diferentes correlaciones; a saber, ensamble ortogonal gaussiano, ensamble unitario gaussiano y ensamble simpléctico G gaussiano [13]. Durante la década de los ochenta ODLYZKO [15, 16] inició un extenso estudio numérico de los ceros de la función zeta de Riemann y los autovalores de una matriz hermítica, con distribución de ensamble unitario gaussiano, encontrando una correlación exacta entre ambas [10].

Con los trabajos de MONTGOMERY, DYSON y ODLYZKO se enuncia hoy en día la siguiente conjetura: *Los ceros de la función zeta de Riemann y los autovalores de una matriz aleatoria hermítica tienen exactamente la misma correlación entre pares,* conocida como la *ley de Dyson–Mongomery–Odlyzko* [19].

4. Ejemplo: Espectro de emisión del hidrógeno

En general estudiar los ceros de la función zeta de Riemann (1) y los autovalores de una matriz unitaria gaussiana no son tareas triviales. Sin embargo, en 2013 ILIEV [9] presentó, a partir de sencillos modelos geométricos, correspondencias numéricas entre las líneas de emisión del espectro del átomo de hidrógeno y los valores de la función zeta de Riemann, siendo esta la aplicación a la física más sencilla que el autor conoce que no requiere hallar los ceros de la función y mantiene la esencia de la pregunta hecha por LANDAU a PÓLYA hace más de un siglo. El proceso realizado se describe a continuación.

El espectro de emisión del hidrógeno puede ser expresado en términos de la constante de Rydberg para el hidrógeno R_H usando la fórmula de Rydberg

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2}\right), \tag{7}$$

donde τ_1 y τ_2 son enteros tales que $\tau_1 < \tau_2$. Este espectro está divido en un número de series espectrales para cada $\tau_1 \geq 1$ y $\tau_2 = \tau_1 + 1, \tau_1 + 2, \ldots$. El espectro de emisión es derivado a partir de la fórmula de Rydberg y se define

Términos $\zeta_H(2)$	$\lambda_i\ [nm]$	$\sum_{\tau=1}^{1}\frac{1}{\tau^2}+\frac{q=1\ldots10}{\tau_1^2}-\frac{1}{R_H}\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\lambda_i}$
1.00000		
1.25000	121.5	1.249987
1.36111	102.3	1.359204
1.42361	97.2	1.421683
1.46361	94.9	1.461450
1.49139	93.7	1.488913
1.51180	93.0	1.509056
1.52742	92.6	1.524966
1.53977	92.3	1.537678
1.54977	92.1	1.548245
1.55803	91.9	1.556660

Table 1. Cálculo de los términos al considerar la serie de Lyman.

por las frecuencias de radiación emitidas por el átomo cuando el electrón pasa a un estado de menor energía.

A partir de la fórmula de Rydberg para el hidrógeno Iliev derivó la relación

$$\sum_{\tau=1}^{q+\tau_1}\frac{1}{\tau^2}, \tag{8}$$

donde $q\in\mathbb{Z}^+$ es el número de longitudes de onda observables en cada una de las líneas de las series espectrales. La expresión (8) es la función $\zeta(s)$ truncada en $\tau_2=q+\tau_1$ y evaluada en $s=2$ para mantener la dependencia funcional de la fórmula de Rydberg 7.

Los términos de sumas consecutivas de $q+\tau_1$ en la anterior expresión no difieren de manera significativa (ver cuadro 1 para la serie de Lyman y en [9] calculan para la serie de Balmer) de las sumas consecutivas de los términos

$$\sum_{\tau=1}^{\tau_1}\frac{1}{\tau^2}+\frac{q}{\tau_1^2}-\frac{1}{R_H}\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\lambda_i} \tag{9}$$

para todas las series del hidrógeno.

Dado que la suma en (8) se realiza únicamente hasta un cierto término, se está usando una versión incompleta de la función zeta de Riemann en función de las sumas de todas las longitudes de onda observables para una serie dada. Por lo tanto, en principio la expresión (9) podría estar asociada con un operador cuántico de naturaleza similar al hamiltoniano que corresponda a la energía total del estado acotado, tal y como lo afirma la conjetura de Hilbert–Pólya, y para $\tau_2\to\infty$ debería estar asociada con un operador que incluya el caso no acotado, en donde el electrón está en un estado de partícula libre [9]. No obstante, este modelo no permite hallar explícitamente dicha relación.

Ahora bien, una versión generalizada de la función zeta se puede escribir, con base en la expresión (8),

$$\zeta\left(s, \tau_1, q\right) = \sum_{\tau=1}^{\tau_1} \frac{1}{\tau^s} + \frac{q}{\tau_1^s} - \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\lambda_i}, \tag{10}$$

donde q es el número de longitudes de onda de alguna serie espectral definida con respecto a τ_1 y C una constante. Esa constante será igual a la constante de Rydberg en el caso del hidrógeno y la relación semiclásica electrón-protón estaría codificada en ella. Para otras configuraciones puede tomar otros valores [9].

5. **Conclusiones**

Dado que esta revisión es un resumen en sí, en cierto sentido, aquí sólo pretendo concluir con algunas observaciones generales. De manera análoga a otros problemas fundamentales de la matemática la hipótesis de Riemann ha estimulado e influenciado muchas áreas de la matemática [6]. En este artículo no se presentaron generalizaciones de la función zeta tales como las L-funciones o las funciones zeta dinámicas, que incluyen al operador Perron-Frobenius, para las cuales una hipótesis de Riemann generalizada puede ser planteada y análogos físicos han sido también buscados extensivamente [2, 25, 1].

El trabajo reciente de algunos físicos y matemáticos ha proporcionado evidencia, tanto numérica como analítica, de una posible conexión entre la función zeta de Riemann y conceptos de energía en mecánica cuántica, en los que los ceros de la función correspondan a los niveles de energía de un sistema cuántico. Sin embargo, es importante resaltar que los estudios que se han realizado en este campo no excluyen la posibilidad de la existencia de un contraejemplo a la hipótesis de Riemann, ya que la mayoría la asume verdadera.

Confío en que los sistemas físicos continuarán ayudando a comprender la hipótesis de Riemann y que definitivamente este es un bello ejemplo que evidencia el entrelazamiento de ambas disciplinas; a saber, la matemática y la física.

Agradecimientos. A la *Konrad Lorenz Fundación Universitaria* por el apoyo financiero para llevar a cabo este proyecto. Al Profesor Óscar Gómez por sus comentarios, ideas y lectura crítica, los cuales contribuyeron significativamente al presente escrito. Así mismo a los anónimos revisores científicos cuyas valiosas sugerencias ayudaron a mejorar este trabajo.

Referencias

[1] T. Aoki, S. Kanemitsu, M. Nakahara, Y. Ohno. *Zeta Functions, Topology and Quantum Physics*. Developments in Mathematics 14. New York: Springer-Verlag, 2005.

[2] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. New York: Springer-Verlag, 1976.

[3] M. V. Berry. "*Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?.*" Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics, edited by T. H. Seligman and H. Nishioka, Springer Lecture Notes in Physics Vol. 263 , p. 1, Springer, New York, 1986.

[4] J. Conrey. *More than Two Fifths of the Zeros of the Riemann Zeta Function Are on the Critical Line*. J. Reine Angew. Math. **399** (1) (1989, 1–26).

[5] R. Courant, H. Robbins. *What is mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. London: Oxford University Press, 1996.

[6] H. Edwards. *Riemann's Zeta Function*. New York: Dover Publications, 1974.

[7] X. Gourdon. *The* 10^{13} *First Zeros of the Riemann Zeta Function, and Zeros Computation at Very Large Height*, http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf, 2004.

[8] G. Hardy. *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$, Comp. Rend. Acad. Sci. **158** (1914), 1012–1014.

[9] I. Iliev. *Riemann Zeta Function and Hydrogen Spectrum*. Electronic Journal of Theoretical Physics **10** (28) (2013), 111–134.

[10] N. Katz & P. Sarnak. *Zeroes of zeta function and symmetry*. Bull. A. M.S. **36** (1) (1999), 1–26.

[11] J. Latorre & G. Sierra. *There is entanglement in the primes*. [arXiv:1403.4765v2], 2014.

[12] N. Levinson. *More than One Third of zeros of Riemann's Zeta-Function are on* $\sigma = 1/2$. Advances in Mathematics **13** (4) (1974), 383–436.

[13] M. Mehta. *Random matrices and the statistical theorv or energy levels*. New York: Academic Press, 1967.

[14] H. Montgomery. *The pair correlation of zeros of the zeta function*. In *Analytic number theory*, Proc. Sympos. Pure Math. XXIV, 1973.

[15] A. Odlyzko. *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*. Mathematics of Computation (American Mathematical Society) **48** (177) (1987), 273–308, 1987.

[16] A. Odlyzko. *The* $10^{20}-th$ *zero of the Riemann zeta function and 70 million of its neighbors* AT&T Bell Lab. Preprint. 1989.

[17] C. Reid. *Hilbert–Courant*. New York: Springer-Verlag, 1986.

[18] B. Riemann. *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (1859), 671–680.

[19] D. Rockmore. *Stalking the Riemann Hypothesis. The Quest to Find the Hidden Law of Prime Numbers*. New York: Vintage Books, 2005.

[20] D. Schumayer & D. Hutchinson *Colloquium: Physics of the Riemann hypothesis*. Rev. Mod. Phys. **83** (2011), 307.

[21] A. Selberg. *On the zeros of Riemann's zeta–function*. Shr. Norske Vid. Akad. Oslo **10**) (1942), 1–59.

[22] G. Sierra & P. Townsend. *Landau Levels and Riemann zeros*. Physical Review Letters **101** (2008), 110–201.

[23] G. Sierra. *A physics pathway to the Riemann hypothesis*. [arXiv:1012.4264v1], 2010.

[24] G. Sierra. *A quantum mechanical model of the Riemann zeros*. New. J. Physics **10** (2008), 033016.

[25] E. Titchmarsh & D. Heath-Brown. *The Theory of the Riemann Zeta–Function*. 2nd edition. Oxford: Oxford University Press, 1987.

[26] J. von Neumann. "*The mathematical foundations of quantum mechanics*". Volume 2 in Princeton Landmarks in Mathematics series (Reprint of translation of original 1932 ed.). Princeton University Press, 1996.

(Recibido en julio de 2014. Aceptado para publicación en agosto de 2014)

Alejandro Cárdenas-Avendaño
Facultad de Matemática e Ingenierías
Konrad Lorenz Fundación Universitaria
Bogotá, Colombia
e-mail: alejandro.cardenasa@konradlorenz.edu.co