Lecturas Matemáticas
Volumen **36** *(1) (2015), páginas 5–14*
ISSN 0120–1980

Cálculo de la constante de Olson $k-$baricéntrica en $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2$

Computation of the k-Baricentric Olson Constant in $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2$

Armando Anselmi, Henry Márquez, José Salazar y Felicia Villarroel
Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela

Resumen. Dado el grupo abeliano finito G y un entero positivo k, la constante de Olson k-baricéntrica, denotada por $BO(k, G)$, es el menor entero positivo t tal que todo conjunto de cardinalidad t en G contiene un subconjunto con k elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ que satisface la siguiente propiedad: $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = ka_j$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Un tal subconjunto con k-elementos se llama k-baricéntrico y el a_j correspondiente al conjunto se llama k-baricentro. La constante de Olson k-baricéntrica ha sido estudiada en los grupos abelianos finitos cíclicos, sin embargo esta constante no ha sido estudiada en los grupos abelianos finitos no cíclicos. En este trabajo se estudia la constante de Olson k-baricéntrica en los grupos abelianos finitos no cíclicos $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2$.

Key words and phrases. k-barycentric Olson Constant, noncyclic finite abelian groups, algorithm, mathematical programming.

Abstract. Given a finite abelian group G and a positive integer k, the k-barycentric Olson constant,denoted by $BO(k, G)$, is the smallest positive integer q such that every set of q elements in G contains a k-subset $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ that satisfies the following property: $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = ka_j$ for some $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Such a k-subset is called k-baricentric and a_j is called the k-barycenter. The k-barycentric Olson constant has been studied in the case finite cyclic abelian groups but not for finite noncyclic abelian groups. In this paper k-barycentric Olson constant studied in finite noncyclic abelian groups $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2$.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 20K01, 05E15, 11B13, 90C90.

1. Introducción

Sean G un grupo abeliano finito de orden n y S una secuencia de elementos de G, es decir la repetición de elementos es permitida y el orden de colocación de los elementos no se considera. Sean $S \subseteq G$ una secuencia o un conjunto, $|S|$ la longitud o cardinalidad de S y $\sum(S) = \{\sum_{a\in A} a : \emptyset \neq A \subseteq S\}$. Si $\sum_{a\in A} a = 0$ diremos que A es de suma cero.

El primer resultado conocido sobre problemas de suma cero, es el denominado por Erdős como *lema prehistórico*: *Sea G es un grupo abeliano de orden n. Entonces toda secuencia de n elementos contiene una subsecuencia de suma cero.* Erdős *et al* [4], presentan el siguiente teorema: *Toda secuencia de $2n-1$ elementos en un grupo abeliano de orden n, contiene una n–subsecuencia de suma cero.* Este resultado constituye la base fundamental del desarrollo del área de investigación denominada *problemas de suma cero*, la cual está inmersa en el campo de la teoría combinatoria y, por lo tanto, utiliza muchos resultados de dicha teoría como herramientas básicas.

Las secuencias con peso, esto es, secuencias constituidas por términos de la forma $w_i a_i$, donde los a_i son elementos de G y los coeficientes o pesos son enteros positivos que aparecen inicialmente en la conjetura de Caro [1].

Hamidoune [6] demostró parcialmente la conjetura de Caro, la cual fue demostrada más tarde por Grynkiewicz [5]. El hecho que Hamidoune, demostrara parcialmente la conjetura de Caro, permitió a Ordaz introducir el concepto de *secuencias k–baricéntricas*:

Sean G un grupo abeliano de orden $n \geq 2$ y A un conjunto finito con $|A| \geq 2$. Una secuencia $f : A \to G$ es baricéntrica si existe $a \in A$ que verifica $\sum_A f = |A| f(a)$. El elemento $f(a)$ es llamado baricentro. Cuando $|A| = k$ hablamos de secuencias baricéntricas y cuando f es inyectiva podemos usar la expresión conjunto k–baricéntrico.

Por ejemplo, en el grupo abeliano finito no cíclico

$$\bigoplus_{i=1}^{3}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

de orden 8, el conjunto $\{000, 010, 100, 110\}$ es 4–baricéntrico ya que

$$000 \oplus 010 \oplus 100 \oplus 110 = 000 = 4 \cdot (000).$$

y el baricentro es 000.

Sin embargo, el conjunto $\{000, 010, 100, 001\}$ no es 4–baricéntrico ya que

$$000 \oplus 010 \oplus 100 \oplus 001 = 111 \notin \{4 \cdot (000), 4 \cdot (010), 4 \cdot (100), 4 \cdot (001)\}.$$

La definición de secuencias baricéntricas da inicio a los problemas baricéntricos. Es importante señalar que las secuencias baricéntricas generalizan a las secuencias de suma cero cuando su longitud es un múltiplo del orden del grupo donde están definidas.

Las secuencias baricéntricas se estudian en [2,3,7,8,9,10]. En [2] y [3] se inicia el estudio de estas secuencias. En [7] se muestran algunas observaciones de los problemas de sumas baricéntricas sobre los grupos cíclicos. En [8] se estudia la constante de Olson k–baricéntrica, $BO(k,G)$, la cual se define como el menor entero positivo q, si existe, tal que todo q–conjunto en G contiene un subconjunto k–baricéntrico. En [9] se presenta un método algorítmico basado en la teoría matricial para el cálculo de $BO(k,\mathbb{Z}_n)$, para $3 \leq n \leq 23$ y $3 \leq k \leq n$. En [10] se presenta un método algorítmico basado en la teoría de órbita para el cálculo de dicha constante en $\mathbb{Z}_n$, para $3 \leq n \leq 12$. En próposito de este trabajo es estudiar la constante de Olson k–baricéntrica en los grupos $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2 := G_m$.

2. La constante de Olson k-baricéntrica en G_m

Sean $m \geq 2$ un entero, G_m el grupo abeliano finito no cíclico de orden par 2^m y $\mathbb{Z}_n$ el grupo abeliano finito cíclico de orden n. Cuando G_m y $\mathbb{Z}_n$ tienen el mismo orden, ocurre que para algunos valores de k, la $BO(k,G_m)$ y la $BO(k,\mathbb{Z}_n)$ son diferentes. Por ejemplo, para $k=8$, la $BO(8,\mathbb{Z}_8)$ no existe pero la $BO(8,G_m)=8$ y para $k=7$, la $BO(7,\mathbb{Z}_8)=7$ pero la $BO(7,G_m)$ no existe. Resultados similares se cumplen en la $BO(2^m,G_m)$ y en la $BO(2^m-1,G_m)$, para todo entero $m \geq 2$.

Proposición 2.1. *Si $m \geq 2$ es un entero y k un entero par tal que $3 \leq k \leq 2^m$, entonces $\forall x \in G_m : k \cdot x = e$, donde $e = \underbrace{00\ldots0}_{m-veces}$.*

Demostración. Sean $k = 2z$ para algún $z \in \mathbb{N}$ y $x \in G_m$. Entonces,

$$k \cdot x = (2z) \cdot x = 2(z \cdot x) = 2 \cdot y = e.$$

Por lo tanto, $\forall x \in G_m : k \cdot x = e$. ☑

Corolario 2.1. *Sean $m \geq 2$ un entero, k un número par tal que $2 \leq k \leq 2^m$ y A un k-subconjunto de G_m. A es k-baricéntrico si y sólo si $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = e$.*

Definición 2.1. *La constante de Olson k-suma cero, $BO_e(k,G)$, es el menor entero positivo q, si existe, tal que todo q-conjunto en G contiene un k-subconjunto A tal que $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = e$.*

Teorema 2.1. *Si k es par, entonces $BO(k,G_m) = BO_e(k,G_m)$.*

Demostración. Supongamos que $BO(k,G_m) = q$, es decir, todo q-conjunto en G_m contiene un subconjunto k-baricéntrico A, en consecuencia, $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = ka$, para algún $a \in A$. Como k es par, entonces por la proposición 2.1, $ka = e$. Luego, $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = e$. Por lo tanto, $BO(k,G_m) = BO_e(k,G_m)$. ☑

Esto muestra que el cálculo de la $BO(k,G_m)$ para k par, se reduce a calcular la $BO_e(k,G_m)$.

Proposición 2.2. *Si $m \geq 2$ es un entero, entonces $\bigoplus_{x \in G_m} x = e$.*

Demostración. Sea G_m el grupo abeliano finito no cíclico de orden 2^m. De estos 2^m elementos, existen exactamente 2^{m-1} que tienen un 1 en la i-ésima componente, para todo $i = 1, 2, ..., m$. Como 2^{m-1} es par, entonces la suma de los 2^m elementos de G_m resulta 0 en cada una de sus componentes. Por lo tanto, $\bigoplus_{x \in G_m} x = e$. ☑

Teorema 2.2. *Si $m \geq 2$ es un entero, entonces $BO_e(2^m, G_m) = 2^m$.*

Demostración. Sea G_m el único conjunto que tiene 2^m elementos. Por la proposición 2.2, la suma de sus elementos es e; la cual, por la proposición 2.1, puede ser obtenida como $2^m \cdot x$, para cualquier $x \in G_m$. Por lo tanto, $BO_e(2^m, G_m) = 2^m$. ☑

Corolario 2.2. $BO_e(2^m, G_m) = BO(2^m, G_m) = 2^m$.

Proposición 2.3. *Si $m \geq 2$ es un entero y k un entero impar tal que $3 \leq k \leq 2^m - 1$, entonces $\forall x \in G_m : k \cdot x = x$.*

Demostración. Sean $k = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $x \in G_m$. Entonces

$$k \cdot x = (2n+1) \cdot x = (2n) \cdot x \oplus x = 2 \cdot (n \cdot x) \oplus x = 2 \cdot y \oplus x = e \oplus x = x.$$

Por lo tanto, $\forall x \in G_m : k \cdot x = x$. ☑

Corolario 2.3. *Sean $m \geq 2$ un entero, k un número impar tal que $3 \leq k \leq 2^m - 3$ y A un k-subconjunto de G_m. A es k-baricéntrico si y sólo si $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = a$ para algún $a \in A$.*

Proposición 2.4. *Si $m \geq 2$ es un entero y $A = G_m - \{b\}$, entonces $\bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i = b$.*

Demostración: Sean $A = G_m - \{b\}$ y b' el opuesto de b. Como $b' = b$ y $\bigoplus_{x \in G_m} x = e$, entonces

$$e = \bigoplus_{x \in G_m} x = \bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i \oplus b \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i \oplus b = e \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i = e \oplus b'$$
$$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i = b' \Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i = b.$$

Por lo tanto, $\bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i = b$. ☑

Teorema 2.3. *Si k es impar, entonces $BO(k, G_m) = BO_e(k-1, G_m)$.*

Demostración. Supongamos que $BO(k, G_m) = q$, es decir, todo q-conjunto en G_m contiene un subconjunto k-baricéntrico A, en consecuencia, $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = ka$, para algún $a \in A$. Como k es impar, entonces por la proposición 2.3, $ka = a$. Luego, $\bigoplus_{i=1}^{k} a_i = a$, para algún $a \in A$. Usando la ley de cancelativa en G_m, resulta que: $\bigoplus_{i=1}^{k-1} a_i = e$. Sea $B = A - \{a\} \subset A$ de cardinalidad par $k-1$. Luego

$$\bigoplus_{b \in B} b = \bigoplus_{i=1}^{k-1} b_i = \bigoplus_{i=1}^{k-1} a_i = e.$$

Por el corolario 2.1, B es $(k-1)$-baricéntrico. Así, todo q-conjunto en G contiene un $(k-1)$-subconjunto B tal que $\bigoplus_{i=1}^{k-1} b_i = e$, es decir, $BO_e(k-1, G_m) = q$. Por lo tanto, $BO_e(k-1, G_m) = BO(k, G_m)$. ☑

Teorema 2.4. *Si $m \geq 2$ es un entero, entonces $BO(2^m - 1, G_m)$ no existe.*

Demostración. Sean $m \geq 2$ un entero y $A = G_m - \{b\}$ cualquier subconjunto de cardinalidad impar $2^m - 1$ de G_m. Por la proposición 2.3, se tiene que $\forall a \in A : (2^m - 1) \cdot a = a$ y por la proposición 2.4, $\bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i = b$. Como $b \notin A$, entonces

$$\forall a \in A : \bigoplus_{i=1}^{2^m-1} a_i \neq (2^m - 1) \cdot a,$$

es decir, G_m no contiene ningún subconjunto (2^m-1)-baricéntrico. Por lo tanto, $BO(2^m - 1, G_m)$ no existe. ☑

Corolario 2.4. $BO(2^m - 2, G_m) = BO_e(2^m - 2, G_m)$ *no existe.*

Proposición 2.5. *Si $m \geq 2$ es un entero y $b, c \in G_m$ tal que $b \neq c$, entonces $b \oplus c \neq e$.*

Demostración. Sean $b, c \in G_m$ tal que $b \neq c$.

$$\begin{aligned} b \neq c \quad &\Rightarrow \quad \exists j \in \{1, 2, ..., m\} \ni b_j \neq c_j \\ &\Rightarrow \quad \exists j \in \{1, 2, ..., m\} \ni b_j + c_j = 1 \\ &\Rightarrow \quad b \oplus c \neq e. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \oplus c \neq e$. ☑

Teorema 2.5. *Si $m \geq 2$ es un entero, entonces $BO(3, G_m)$ no existe.*

Demostración. Supongamos que $BO(3, G_m) = q$ con $3 \leq q \leq 2^m$, es decir, todo q-conjunto de G_m contiene un subconjunto 3-baricéntrico A. Por el corolario 2.3, $\bigoplus_{i=1}^{3} a_i = a$ para algún $a \in A$. Como en G_m se cumple la ley de cancelación, entonces

$$a_1 \oplus a_2 = e \qquad \vee \qquad a_1 \oplus a_3 = e \qquad \vee \qquad a_2 \oplus a_3 = e.$$

Lo cual contradice la proposición 2.5. Por lo tanto, $BO(3, G_m)$ no existe. ☑

Corolario 2.5. $BO(2, G_m) = BO_e(2, G_m)$ *no existe.*

Teorema 2.6. *Sean $m \geq 2$ un entero, k un número par tal que $4 \leq k \leq 2^m - 4$. Si $BO_e(k, G_m) = q$ con $q > k$, entonces $BO(k+1, G_m) = q$.*

Demostración. Supongamos que $BO_e(k, G_m) = q$, es decir, todo q-conjunto A en G_m contiene un k-subconjunto B tal que $\bigoplus_{i=1}^{k} b_i = e$. Sea $C = B \cup \{c\} \subseteq A$ de cardinalidad impar $k+1$, donde $c \in A - B$ y $k+1 \leq q$. Como

$$\bigoplus_{c \in C} c = \bigoplus_{i=1}^{k+1} c_i = \bigoplus_{i=1}^{k} b_i \oplus c = e \oplus c = c,$$

entonces por el corolario 2.3, C es $(k+1)$-baricéntrico. Así, todo q-conjunto A en G contiene un $(k+1)$-subconjunto C tal que $\bigoplus_{i=1}^{k+1} c_i = c$, para algún $c \in C$. Por lo tanto, $BO(k+1, G_m) = q$. ☑

3. Método para el cálculo de la $BO(k, G_m)$

Supóngase que se quiere calcular $BO(k, G_m)$, con $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, $m \geq 2$ un entero positivo y $3 \leq k \leq 2^m$. En primer lugar, se busca el número $j = 2^m$, el cual representa el orden del conjunto G_m. Luego se chequean si se cumplen las condiciones de los teoremas: (1) Si $k = 2^m$, entonces $BO(k, G_m) = k$. (2) Si $k = 2^m - 1$, entonces $BO(k, G_m)$ no existe. (3) Si $k = 2^m - 2$, entonces $BO(k, G_m)$ no existe. (4) Si $k = 3$, entonces $BO(k, G_m)$ no existe. Sino, se construye el conjunto G_m y se calcula el número de combinaciones sin repetición con los elementos de G_m, tomados de k en k, usando la fórmula $\binom{j}{k} = \dfrac{j!}{k!(j-k)!}$.

Despúes se forman, uno por uno, los $\binom{j}{k}$ conjuntos de cardinalidad k en G_m y se chequean, en ese orden, si ellos son k-baricéntrico o no. Si todos ellos son k-baricéntrico el método finaliza, y se obtiene que $B = (k, G_m)$. En caso contrario, se le asigna a una variable q el valor $k+1$ y se calcula el número de combinaciones sin repetición con los elementos de G_m, tomados de q en q, que es $\binom{j}{q} = \dfrac{j!}{q!(j-q)!}$, y el número de combinaciones sin repetición con los elementos del subconjunto de cardinalidad q, tomados de k en k, que es $\binom{q}{k} = \dfrac{q!}{k!(q-k)!}$.

Luego, se forman, uno por uno, los $\binom{j}{q}$ conjuntos de cardinalidad q de $BO(k, G_m)$ y para cada uno de ellos, se forma, uno por uno, los $\binom{q}{k}$ subconjuntos de cardinalidad k y se chequean si ellos son k-baricéntrico o no. Si todos los conjuntos de cardinalidad q contienen un subconjunto k-baricéntrico, entonces el método finaliza, y se tiene que $BO(k, G_m) = q$. De lo contrario, se aumenta q en 1 y se continúa con el proceso. El último nivel se alcanza cuando q supere a j, en este caso, el método finaliza y se tiene $BO(k, G_m)$ no existe.

4. Aplicación del Método

Veamos como se obtiene que la $BO_e(4, G_m) = 5$ usando el método. En primer lugar, se calcula el número $j = 2^m = 2^3 = 8$, el cual representa el orden del conjunto G_m. Como no se cumplen las condiciones de los teoremas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 ya que $4 \notin \{3, 6, 7, 8\}$, entonces se construye el conjunto

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}_2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

El número de sus subconjuntos con 4 elementos es $\binom{8}{4} = 70$. Chequeamos cada uno de los 70 subconjuntos para ver si son 4-baricéntrico, pero cuando se llega a $\{000, 010, 100, 101\}$ se obtiene un subconjunto que no es 4-baricéntrico ya que

$$000 \oplus 010 \oplus 100 \oplus 101 = 011 \neq e.$$

Entonces no se necesita chequear los subconjuntos restantes para saber que la constante de Olson 4-baricéntrica no es 4. Así se considera $q = k+1 = 5$, hay $\binom{8}{5} = 56$ conjuntos de cardinalidad 5 en G_m, los cuales tienen $\binom{5}{4} = 5$ subconjuntos de cardinalidad 4. Sucede que cada uno de los 56 conjuntos contiene un subconjunto 4-baricéntrico (estos 56 resultados no se reportan aquí por falta de espacio). Así, el método finaliza, y se obtiene que la $BO_e(4, G_m) = 5$.

5. Tablas de valores de la $BO(k, G_m)$

El procedimiento manual para calcular algunos valores de la $BO(k, G_m)$ es largo y tedioso, y muchas veces, humanamente imposible de obtener. Esta razón nos condujo a programar en MuPAD los resultados algebraicos obtenidos en la sección 2; MuPAD es un software de álgebra computacional diseñado para ayudar en la realización de cálculos matemáticos y gráficos. La ejecución del programa arrojó los siguientes valores.

Valor de m	**Valor de k**	$BO(k, \bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{Z}_2)$	**Tiempo de Ejecución h:min:s.ms**
2	2	no existe	00:00:00.00
	3	no existe	00:00:00.00
	4	4	00:00:00.00

Tabla 1: Valores de la $BO(k, \bigoplus_{i=1}^{2} \mathbb{Z}_2)$.

Valor de m	**Valor de k**	$BO(k, \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}_2)$	**Tiempo de Ejecución h:min:s.ms**
3	3	no existe	00:00:00.00
	4	5	00:00:00.031
	5	5	00:00:00.00
	6	no existe	00:00:00.00
	7	no existe	00:00:00.00
	8	8	00:00:00.00

Tabla 2: Valores de la $BO(k, \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{Z}_2)$.

Valor de m	**Valor de k**	$BO(k, \prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_2)$	**Tiempo de Ejecución h:min:s.ms**
4	3	no existe	00:00:00.00
	4	7	00:00:43.438
	5	7	00:00:00.00
	6	10	00:02:38.00
	7	10	00:00:00.00
	8	11	00:01:27.234
	9	11	00:00:00.00
	10	13	00:00:38.297
	11	13	00:00:00.00
	12	13	00:00:02.172
	13	13	00:00:00.00
	14	no existe	00:00:00.00
	15	no existe	00:00:00.00
	16	16	00:00:00.00

Tabla 3: Valores de la $BO(k, \prod_{i=1}^{4} \mathbb{Z}_2)$.

Valor de m	**Valor de k**	$BO(k, \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z}_2)$	**Tiempo de Ejecución h:min:s.ms**
5	3	no existe	00:00:00.00
	26	29	7:52:42.415 *
	27	29	00:00:00.00
	28	29	00:04:42.175
	29	29	00:00:00.00
	30	no existe	00:00:00.00
	31	no existe	00:00:00.00
	32	32	00:00:00.00

Tabla 4: Valores de $BO(k, \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z}_2)$.

Para el cálculo de la $BO(26, \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z}_2) = BO_e(26, \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z}_2) = 29$ se utilizaron 6 computadores Intel® Core^{TM} 2 Duo CPU E4500 a 2.20 GHz (2 CPUs) con

2038 MB de memoria RAM. El trabajo se dividió en 12 procesos y cada uno de ellos arrojó, en tiempos distintos, el valor 29; el tiempo de ejecución del programa fue: 7:52:42.415 (el máximo de ellos). Los valores de la $BO(k, \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{Z}_2)$ que no aparecen en la tabla 4 no se calcularon por falta de memoria en los computadores. Lo que sigue ahora es usar computadoras de alto rendimiento para obtener nuevos valores de esta constante. Luego los analizaremos para tratar de obtener otros resultados algebraicos que nos permita optimizar el algoritmo.

También pudiéramos intentar optimizar el algoritmo usando simetría. De ser posible, las tablas de valores serían muchos más grandes y tal vez sugeriría conjeturas sobre el comportamiento asintótico de la $BO_e(k, G_m)$.

Referencias

[1] Y. Caro. *Zero-sum problems-a survey.* Discrete Math. **152** (1996) 93–113.

[2] C. Delorme, S. González, O. Ordaz & M. Varela. *Barycentric sequences and barycentric Ramsey numbers stars.* Discrete Math. **152** (2004) 45–56.

[3] C. Delorme, I. Márquez, O. Ordaz & A. Ortuño. *Existence condition for barycentric sequences.* Discrete Math. **281** (2004) 163–172.

[4] P. Erdős, A. Ginzburg & A. Ziv. *Theorem in the addittive number theory.* Bull. Res. Council Israel. **10** (1961) 41–43.

[5] D. Grynkiewicz. *A weighted version Erdős-Ginzburg-Ziv theorem.* Combinatorica. **4** (2006) 445–453.

[6] Y. O. Hamidoune. *On weighted sums in abelian groups.* Discrete Math. **162** (1996) 127–132.

[7] O. Ordaz, A. Plagne & W. A. Schmid. *Some remarks on barycentricsum problems over cyclic groups.* European Journal of Combinatorics. **34** (2013) 1415–1428.

[8] O. Ordaz, M. Varela & F. Villarroel. *k–barycentric Olson constant.* Math. Reports **1** (2009) 34–45.

[9] J. Otero, H. Márquez & F. Villarroel. *Un método matricial para el cálculo de la constante de Olson k-baricéntrica.* Lecturas Matemáticas **32** (2011) 79–91.

[10] F. Villarroel. *La constante de Olson k-baricéntrica y un teorema inverso de Erdős-Ginzburg-Ziv.* Tesis doctoral. Universidad Central de Venezuela. 2008.

(Recibido en julio de 2014. Aceptado para publicación en marzo de 2015)

Armando Anselmi
Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente, Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
e-mail: alanselm2010@gmail.com

Henry Márquez
Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente, Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
e-mail: e-mail: henrylmarquez@gmail.com

José Salazar
Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente, Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
e-mail: e-mail: jsalazar@udo.edu.ve

Felicia Villarroel
Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Núcleo de Sucre
Universidad de Oriente, Cumaná 6101-A, Apartado 245, Venezuela
e-mail: `e-mail: feliciavillarroel@gmail.com`