Lecturas Matemáticas
Volumen **36** *(1) (2015), páginas 33–67*
ISSN 0120–1980

Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras

An introduction to the representation of algebras theory

Hernán Giraldo[1]
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

En memoria de Alexander Zavadskij (1946–2012)

Resumen. En este trabajo se pretende describir dos de las técnicas que se volvieron esenciales a lo largo de los últimos años en el estudio de la teoría de representaciones de álgebras.

Key words and phrases. Representations of algebras, quivers, path algebras, Auslander–Reiten sequences, and irreducible morphisms.

Abstract. This paper aims to describe two techniques that became essential over recent years in the representation of algebras theory.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. **16G10, 16G70**

Introducción

La teoría de representaciones de álgebras ha avanzado bastante, hasta el punto en que hoy es una de las áreas más activas de investigación matemática. En Colombia esta teoría comienza a desarrollarse en el año 2001 con la llegada del profesor Alexander Zavadskij al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. El profesor Zavadskij murió el 3 de febrero de 2012 en Bogotá, Colombia, y este trabajo es en su memoria. Más detalles de su trabajo realizado en Colombia y una breve biografía del profesor Zavaskij pueden ser consultados en [9].

[1]El autor fue apoyado parcialmente en la Universidad de Antioquia por el CODI y Estrategia de Sostenibilidad 2014-2015 y por COLCIENCIAS-ECOPETROL (Contrato RC. No. 0266-2013).

Uno de los problemas que más impulsó la teoría fue decidir algo respecto a las *conjeturas de Brauer–Thrall*, que datan de la década de los años cuarenta del siglo pasado y son las siguientes:

Brauer–Thrall I. Si A es una $k-$álgebra (k campo) de tipo infinito (es decir, existe un número infinito de $A-$módulos inescindibles no isomorfos). Entonces las dimensiones sobre k de los $A-$módulos, inescindibles finitamente generados, no es acotada.

Brauer-Thrall II. Si A es una $k-$álgebra de tipo infinito (k campo infinito). Entonces existe un número infinito de $k-$dimensiones y para cada dimensión existe un número infinito de módulos inescindibles no isomorfos.

La primera conjetura fue probada por Roiter (véase [24]. Nazarova y Roiter (véase [20]) afirmaban haber probado la segunda conjetura. Sin embargo, al parecer, solo ellos comprendían dicha prueba. Pero luego se desrrollaron técnicas para su demostración en [25] y [6] y se considera que R. Bautista [5], fue el primero en presentar una demostración para esta conjetura en el caso de un campo algebraicamente cerrado con característica diferente de 2.

El principal objetivo de la teoría de representaciones de álgebras es estudiarlas por vía del estudio de la categoría de los módulos inescindibles. A partir de las décadas de los años sesenta y setenta fueron introducidas nuevas técnicas en la teoría. El objetivo de estas notas es mostrar dos de las técnicas más utilizadas.

Por un lado, P. Gabriel (véase [16]), utilizando los métodos diagramáticos, mostró una correspondencia entre las álgebras de dimensión finita sobre campos algebraicamente cerrados y carcajes (grafos orientados). Con base en estas técnicas logró una caracterización de las álgebras hereditarias de tipo de representación finito (esto es, con apenas un número finito de módulos inescindibles) en términos de carcajes.

Por otro lado, Auslander y Reiten, utilizando técnicas homológicas, introdujeron los conceptos de *sucesiones que casi se dividen* (o *sucesiones de Auslander–Reiten*), homomorfismos minimales que casi se dividen y homomorfismos irreducibles (véase [3]). Con esto fue posible probar de forma corta la conjetura de Brauer-Thrall I. A fines de la década de los setenta Ringel, utilizando estas ideas, desarrolló la noción de carcaj de Auslander–Reiten muy utilizada actualmente. El desarrollo de la teoría de representaciones de álgebras se basa en estas herramientas principalmente cuando se utilizan conjuntamente. Partiendo de ellas tenemos toda una ramificación de técnicas tales como: teoría inclinante, cubrimientos, utilización de formas cuadráticas, "Boc's", particiones pre-proyectivas entre otras, que ayudan al estudio de la categoría de módulos. Estas también han logrado resultados en otros problemas de álgebra (véase [22]).

Este trabajo está basado en algunos apartes dados en [12] y [4] y se estructura de la siguiente forma: En la primera sección se definen algunos de los conceptos básicos tales como álgebras, álgebras básicas, módulos, módulos simples, módulos proyectivos, módulos inyectivos, tipos de álgebras, tipos de representaciones y sucesiones exactas cortas. También se enuncian los teoremas de Krull–Schmidt, Jordan–Hölder y Morita. En la segunda sección se definen algunos conceptos tales como carcajes, álgebras de caminos y carcajes con relaciones. Finalmente se demuestra el teorema de Gabriel. En la tercera sección se introducen las representaciones de módulos sobre $A = k\Gamma/ < \rho >$, el álgebra de caminos de un carcaj con relaciones (Γ, ρ). Esto permite obtener una descripción concreta de los módulos en términos de espacios vectoriales junto con aplicaciones lineales. Después se muestra la equivalencia que existe entre las representaciones y los módulos sobre A. Para terminar, se describen las representaciones de los $A-$módulos proyectivos e inyectivos. En la cuarta sección se definen conceptos tales como sucesiones de Auslander–Reiten, morfismos fuente, morfismos sumidero y morfismos irreducibles. Se enuncia el teorema de Existencia de las sucesiones de Auslander–Reiten y se finaliza con la construcción de carcajes de Auslander–Reiten para un álgebra A.

A lo largo del trabajo se presume cierta familiaridad con conceptos básicos de álgebra lineal y de álgebra abstracta al nivel de [1] y [10]. La parte de categorías y funtores la restringimos a lo mínimo necesario.

Aquí solo se describen resultados básicos de la teoría de respresentaciones de álgebras y se recomienda al lector interesado referencias más amplias como: [4], [23], [18], [19], [21], y [22]. Además, de una de las referencias clásicas dentro de la teoría, el libro de C. M. Ringel (véase [23]), en el que se hace una excelente descripción del carcaj de Auslander–Reiten e incluye otra gran variedad de temas importantes como: formas cuadráticas, representación de conjuntos parcialmente ordenados, teoría inclinante y categorías vector espaciales.

1. **Conceptos Básicos.**

En esta sección se definen algunos de los conceptos básicos tales como álgebras, álgebras básicas, módulos, módulos simples, módulos proyectivos, módulos inyectivos, tipos de álgebras, tipos de representaciones y sucesiones exactas cortas. También se enuncian los teoremas de Krull-Schmidt, Jordan-Hölder y Morita. Los detalles pueden ser encontrados en [14], [15] ó [11].

1.1. Álgebras. Sea k un campo. Una $k-$**álgebra** (o simplemente álgebra) es un anillo con identidad A $(1 \in A)$ que posee tambien estructura de $k-$espacio vectorial tal que $\alpha(ab) = a(\alpha b)$ para todo $\alpha \in k$ y para todo $a, b \in A$. Si la dimensión de A como espacio vectorial es finita se dice que el álgebra A es de **dimensión finita**. Un **homomorfismo** entre $k-$álgebras es una aplicación $k-$lineal que también es un homomorfismo de anillos.

Ejemplo 1.1.

(a) Son ejemplos de álgebras de matrices:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$$

(b) Dado un grupo finito G el álgebra de grupo kG es un ejemplo de álgebra de dimensión finita sobre k.

(c) Otros ejemplos de $k-$álgebras son las álgebras de polinomios sobre un campo k en varias variables, o cocientes de estas, es decir:

$$k[x]/(x^n), \ k[x,y]/(x,y)^2 \text{ ó } k[x_1, \cdots, x_n].$$

Proposición 1.1. *Sean A una $k-$álgebra de dimensión finita e I un ideal de A. Son equivalentes:*

(a) I es ideal maximal nilpotente.

(b) I es intersección de todos los ideales maximales.

(c) I es el menor ideal tal que A/I es semisimple.

Un ideal de un álgebra A con una de estas propiedades se llama un **radical** de A y se denota con $\operatorname{rad} A$.

1.2. Módulos. Sea A una $k-$álgebra de dimensión finita. Un $A-$**módulo izquierdo** es un $k-$espacio vectorial M y $\cdot : A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto am$, es una operación binaria satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $a(m+n) = am + an$,
2. $(a+b)m = am + bm$,
3. $(ab)m = a(bm)$, y
4. $1m = m$,

para todo m, $n \in M$ y a, $b \in A$.

De forma dual se definen $A-$módulos derechos. Un subconjunto N de un $A-$módulo M es un **submódulo** cuando N es también un $A-$módulo. Dado un $A-$módulo M, el **radical** de M indicado por $\operatorname{rad}(M)$, es el submódulo $(\operatorname{rad} A)M$.

Teorema 1.1. (Krull-Schmidt)*: Todo $A-$módulo finitamente generado es la suma finita directa de $A-$módulos finitamente generados inescindibles (esto es que no se descomponen trivialmente como suma directa de dos módulos diferentes de cero). Tal descomposición es única.*

Homomorfismos entre $A-$módulos son transformaciones lineales que preservan la acción de A sobre estos módulos. **Monomorfismos, epimorfismos**

e **isomorfismos** son homomorfismos entre $A-$módulos que son respectivamente inyectivos, sobreyectivos y biyectivos. Indicamos por $A-mod$ (resp., $modA$) la categoría cuyos objetos son los $A-$módulos izquierdos finitamente generados (resp., a derechos) y cuyos morfismos son los homomorfismos entre $A-$módulos. Por $A-ind$ ($indA$) indicamos la subcategoría plena de $A-mod$ ($modA$) de los $A-$módulos inescindibles y finitamente generados.

En adelante todos nuestros módulos serán $A-$módulos izquierdos, pero por simplicidad hablaremos simplemente de $A-$módulos. En nuestro estudio de la categoría $A-mod$, destacaremos las siguientes tres clases módulos:

(a) Módulos simples. Un $A-$módulo S es **simple** si no posee submódulos no triviales. Dado un $A-$módulo M, se denota con zoc$M$ al **zócalo** de M, esto es la suma de todos los submódulos simples de M. Nótese que $M/\mathrm{rad}\,M$ es suma de simples, es decir, un módulo **semisimple**.

(b) Módulos proyectivos. Un $A-$módulo P es **proyectivo** si cumple una de las siguientes propiedades equivalentes:

(i) Para todo epimorfismo $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ y todo homomorfismo $P \xrightarrow{g} N$ existe $P \xrightarrow{g'} M$ tal que $fg' = g$.

(ii) P es sumando directo de $A^r = A \oplus \cdots \oplus A$ (r veces), para algún número natural r .

Los módulos inescindibles que aparecen en la descomposición de A vista como $A-$módulo forman una lista de todos los proyectivos inescindibles y todos los otros proyectivos son sumas directas de estos.

(c) Módulos Inyectivos. Un $A-$módulo I es **inyectivo** si para todo monomorfismo $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ y todo $M \xrightarrow{g} I$ existe $N \xrightarrow{g'} I$ tal que $g'f = g$.

Un A-módulo M es de **longitud finita** si existe una secuencia finita de submódulos de M de la forma $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0$ tal que M_i/M_{i+1} es cero ó simple para $i = 0, ..., n-1$. Una secuencia de submódulos M de este tipo la llamaremos **serie de composición generalizada** de M y la denotaremos por F. En el caso de $M_i/M_{i+1} \neq 0$ para $i = 0, ..., n-1$ se denomina **serie de composición** de M y los módulos cociente $M_i/M_{i+1} \neq 0$ se llaman **factores de composición** de F.

Para un $A-$módulo simple S, definimos $m_S^F(M)$ como el número de factores de composición de la serie de composición F los cuales son isomorfos a S y definimos $l_F(M) = \sum m_S^F(M)$ donde la suma se toma sobre todos los $A-$módulos simples.

La **longitud** de M es el mínimo de los $l_F(M)$, donde F varia sobre las posibles series de composición de M, este se denota por $l(M)$. De igual manera, se define $m_S(M)$ como el mínimo de los $m_S^F(M)$.

El siguiente teorema afirma que los números $m_S^F(M)$ y $l_F(M)$ son independientes de la serie de composición F.

Teorema 1.2. (Jordan–Hölder) *Sean B un $A-$módulo de longitud finita, F y G dos series de composición para B. Entonces para cada $A-$módulo simple S, tenemos $m_S^F(B) = m_S^G(B) := m_S(B)$ y $l_F(B) = l_G(B) := l(B)$.*

Dado un $A-$módulo finitamente generado M existe un epimorfismo $P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ donde P es proyectivo (si $m_1, \cdots, m_r$ es un conjunto generador de M entonces el epimorfismo $A^r \longrightarrow M$ que lleva $(a_1, \cdots, a_r)$ en $\sum a_i m_i$, sería tal epimorfismo).

Si la longitud de P es la menor posible en estas condiciones decimos que P es la **cubierta proyectiva** de M, que es única salvo isomorfismo.

También existe un $A-$módulo inyectivo I y un monomorfismo $0 \longrightarrow M \longrightarrow I$. Si I es el inyectivo de menor longitud en estas condiciones decimos que I es la **envolvente inyectiva** de M.

Proposición 1.2. *Sea A una $k-$álgebra de dimensión finita. Entonces existe una correspondencia biunívoca entre los simples y los proyectivos inescindibles y otra entre los simples y los inyectivos inescindibles. En particular, el número de simples es igual al número de proyectivos inescindibles y al número de inyectivos inescindibles.*

1.3. Tipos de Álgebras.

1. **Tipos de álgebras y teorema de Morita.**

   Un álgebra A es **inescindible** si no puede ser escrita como suma directa de otras dos álgebras no triviales. Toda $k-$álgebra de dimensión finita se descompone como una suma directa de $k-$álgebras inescindibles.

   Sea $A \cong P_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus P_t^{r_t}$ la descomposición de A en $A-$módulos inescindibles donde $P_i \ncong P_j$ si $i \neq j$. En el caso de $r_i = 1$ para todo $i = 1, ..., t$ decimos que A es **básica**. El próximo teorema nos permite restringirnos al estudio de las categorías de módulos sobre álgebras básicas.

   Teorema 1.3. (Morita) *Si A una $k-$álgebra de dimensión finita, entonces existe un álgebra básica B tal que las categorías de $A - mod$ y $B - mod$ son equivalentes.*

   El lector podrá encontrar el teorema de Morita de forma más general en [11] ó [15].

2. **Tipos de representaciones.**

   Sea A un álgebra de dimensión finita. Para el estudio de la categoría $A - mod$ es conveniente clasificar las álgebras a partir de su tipo de representación, es decir, queremos clasificar A a partir del tamaño de la categoría $A - ind$. Cuando $A - ind$ tiene un número finito de objetos (salvo isomorfismo) decimos que A es de **tipo de representación**

finito. Caso contrario será de **tipo infinito**. Sin entrar en mucho detalle, vamos a decir que las álgebras de tipo infinito se diven en dos, de **tipo manso** o **salvaje**. Las de tipo manso son aquellas en las cuales la categoría $A - ind$ puede ser agrupada en familias monoparamétricas y las de tipo salvaje son aquellas en la cual $A - ind$ "contiene", en cierto sentido, los módulos sobre las álgebras libres en dos variables. La clasificación del tipo mansa y salvaje fue dada por Y. Drozd en [13], allí pueden ser entrados los detalles de este tipo de álgebras.

3. **Sistema de Idempotentes.**

Sea A una $k-$álgebra básica inescindible de dimensión finita y sea $A \cong P_1 \oplus \cdots \oplus P_t$ la descomposición de A en $A-$módulos inescindibles. En particular,

$$1 = \sum_{i=1}^{t} e_i,$$

con $e_i \in P_i$. Los elementos $e_1, \cdots, e_t$ tienen las siguientes propiedades:

(i) Para cada i, e_i es un idempotente, esto es, $e_i^2 = e_i$.

(ii) $\{e_1, \cdots, e_t\}$ es un conjunto ortogonal, esto es, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$.

(iii) Para cada i, e_i es primitivo, es decir, si $e_i = e' + e''$ donde e' y e'' son idempotentes ortogonales, entonces $e' = 0$ ó $e'' = 0$.

Un conjunto $\{e_1, \cdots, e_t\} \subset A$ como antes se denomina **sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales** de A (véase [10]). En este caso $A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_t$ donde t indica el número de proyectivos inescindibles.

4. **Sucesiones exactas cortas.**

Una **sucesión exacta corta** es una sucesión de $A-$módulos y homomorfismos $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ donde f es un monomorfismo, g es un epimorfismo y $\operatorname{Im} f = \ker g$. En particular $l(M) = l(L) + l(N)$.

Proposición 1.3. *Sea* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $M = N \oplus L$

(2) f *es un monomorfismo que se divide (es decir, existe* $M \xrightarrow{f'} L$ *tal que* $f'f = 1_L$*).*

(3) g *es un epimorfismo que se divide (es decir, existe* $N \xrightarrow{g'} M$ *tal que* $gg' = 1_N$*).*

Se dice que la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, es una **sucesión exacta corta que se divide** si cumple una de las afirmaciones de la proposición anterior. Nótese que si N es proyectivo o si L es inyectivo, entonces $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta que se divide.

2. Álgebras de caminos y el teorema de Gabriel.

En esta sección se definen algunos conceptos tales como carcajes, álgebras de caminos y carcajes con relaciones. Se demuestra el teorema de Gabriel, el cual permite caracterizar todas las álgebras, inescindibles y básicas de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k, como álgebras de caminos dadas por carcajes con relaciones.

2.1. Carcaj.

Definición 2.1. *Un* **carcaj** Γ *es una cuadrupla* $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, s, e)$*, donde* Γ_0 *y* Γ_1 *son conjuntos,* Γ_0 *lo llamaremos el* **conjunto de vértices** *y* Γ_1 *el* **conjunto de flechas** *(entre los vértices) y* $s, e : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$ *son funciones definidas por* $s(\alpha) = i$ *y* $e(\alpha) = j$ *para toda flecha* $\alpha : i \longrightarrow j$*, es decir,* α *es una flecha del vértice* i *al vértice* j*.*

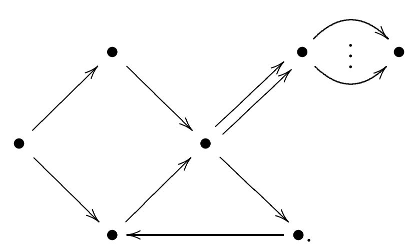
Esta nomenclatura sugiere diagramas o **grafos orientados** (carcaj). Esto se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1.

(a) $$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[loop right, "\gamma"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 4 \end{tikzcd}$$

Para este carcaj $1, 2, 3, 4$ forman el conjunto de vértices, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ forman el conjunto de flechas y $s(\alpha) = 1$ y $e(\alpha) = 2$.

(b)



Dado un carcaj Γ, llamamos al **carcaj subyacente** $\overline{\Gamma}$ de Γ, al grafo determinado por el carcaj Γ, es decir, $\overline{\Gamma}$ es el diagrama de Γ pero considerando solo las aristas (no se considera la dirección de las fechas). Un **camino** en Γ es una secuencia de flechas $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ tal que $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ para $1 \leq t \leq n-1$. Denotaremos $l(p) = n$ la **longitud** del camino p. Por convención, un **camino de longitud cero** (o **camino trivial**) es un camino sin flechas asociado para cada vértice $i \in \Gamma_0$, se denota por ϵ_i, tal que $s(\epsilon_i) = e(\epsilon_i) = i$.

Dado un camino $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ denotaremos por $s(p) = s(\alpha_1)$ el vértice inicial de p y por $e(p) = e(\alpha_n)$ el vértice final de p. Cuando p no es un camino trivial y $s(p) = e(p)$ diremos que p es un **ciclo orientado**. Algunas veces para enfatizar el punto inicial y final de un camino usaremos la notación $p = (j|\alpha_n \cdots \alpha_1|i)$ para $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ entendiendo que $s(p) = i$ y $e(p) = j$.

En el ejemplo anterior en (a) tenemos que α, $\alpha\beta\alpha$ y $\gamma\alpha\beta\gamma\gamma$ (ó $(2|\alpha|1)$, $(2|\alpha\beta\alpha|1)$ y $(2|\gamma\alpha\beta\gamma\gamma|2)$) son ejemplos de caminos de longitud 1, 3 y 5 respectivamente, siendo el último un ciclo orientado. Y los caminos triviales serían $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ y ϵ_4.

Decimos que dos flechas α y β tienen un vértice en común si:

$$\{s(\alpha), e(\alpha)\} \bigcap \{s(\beta), e(\beta)\} \neq \emptyset.$$

Un **paseo** entre dos vértices i y j se define por una sucesión de flechas $\alpha_1, ..., \alpha_n$ donde $i \in \{s(\alpha_1), e(\alpha_1)\}$, $j \in \{s(\alpha_n), e(\alpha_n)\}$ y para $1 \leq t \leq n-1$, α_t y α_{t+1} tienen un vértice en común.

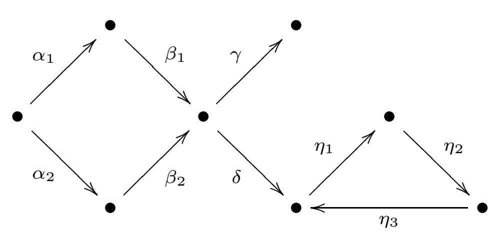
Un **subcarcaj** del carcaj Γ es un carcaj Γ' donde $\Gamma'_0 \subset \Gamma_0$, $\Gamma'_1 \subset \Gamma_1$ y las restricciones de s y e a Γ'_1 son iguales respectivamente a s' y e'. Un subcarcaj se llama **pleno** si para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ con vértices $i, j \in \Gamma'_0$ entonces $\alpha \in \Gamma'_1$.

Dado un vértice $i \in \Gamma_0$, sea Γ_i el subcarcaj pleno de Γ formado por todos los vértices j tales que existen paseos entre i y j. Γ_i se denomina **componente conexa** de Γ conteniendo i. Finalmente, el carcaj Γ se dice **conexo** si $\Gamma_i = \Gamma$ para algún vértice $i \in \Gamma_0$. En el ejemplo anterior parte (b) el carcaj es conexo y el carcaj de la parte (a) no lo es.

Una **relación** σ en un carcaj Γ sobre un campo k es una combinación lineal de caminos $\sigma = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$ con $a_i \in k$, $e(p_1) = \cdots = e(p_n)$, $s(p_1) = \cdots = s(p_n)$ y $l(p_i)$ es al menos 2, para cada p_i. Si $\rho = \{\sigma_t\}_{t \in T}$ es un conjunto de relaciones en Γ sobre k, el par (Γ, ρ) se denomina **carcaj con relaciones** sobre k.

Ejemplo 2.2.

Sea



un carcaj. Son ejemplos de relaciones en este carcaj $\beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_1$, $\gamma\beta_1$, $\eta_3\eta_2\eta_1$, $\eta_2\eta_1\eta_3\eta_2\eta_1$ entre otras, pero $\gamma\beta_1 + \gamma\beta_2$ no es una relación. Podemos tomar conjuntos de relaciones, por ejemplo, $\rho_1 = \{\beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_1\}$ ó $\rho_2 = \{\beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_1, \eta_1\eta_3\eta_2, \delta\beta_1\}$.

2.2. Álgebras de caminos. Sean k un campo y Γ un **carcaj finito**, es decir, los conjuntos Γ_0 y Γ_1 son finitos. A partir de k y de Γ definiremos un álgebra que denotaremos por $k\Gamma$. Consideremos el conjunto B formado por todos los caminos de Γ, incluidos también los caminos triviales. Se considera ahora $k\Gamma$ el $k-$espacio vectorial con base B. Esta base B se llama **base usual** de $k\Gamma$. Demos la estructura de álgebra a $k\Gamma$ definiendo la multiplicación en los elementos de la base B. Dados dos caminos de Γ, $p_1 = (j|\alpha_n \cdots \alpha_1|i)$ y $p_2 = (r|\beta_m \cdots \beta_1|l)$ definimos:

$$p_1 \cdot p_2 = \left\{ \begin{array}{ll} (j|\alpha_n \cdots \alpha_1\beta_m \cdots \beta_1|l) & \text{si i=r} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{array} \right\}$$

y luego extendemos por linealidad tal multiplicación a todos los elementos. Dejamos al lector la verificar que $k\Gamma$ es $k-$álgebra. Esta álgebra $k\Gamma$ se denomina **álgebra de caminos** de Γ.

Ejemplo 2.3.

(a) Sea Γ: $1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Como espacio vectorial $k\Gamma$ tiene base $B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\}$ y por tanto $\dim_k k\Gamma = 3$. La multiplicación de los elementos de B es $\epsilon_1\epsilon_2 = 0$, $\epsilon_i\epsilon_i = \epsilon_i$ para $i = 1, 2$, $\alpha\epsilon_1 = \epsilon_2\alpha = \alpha$ y $\alpha\alpha = \epsilon_1\alpha = \alpha\epsilon_2 = 0$. No es difícil ver que $k\Gamma$ es isomorfa al álgebra de matrices

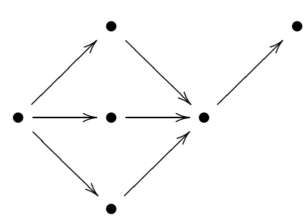
$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$$

(b) Sea Γ: $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \circlearrowleft \beta$. En este caso $\dim_k k\Gamma = \infty$ puesto que,

$$B = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha, \beta, \beta\alpha, \beta^2, \beta^2\alpha, \beta^3, ...\},$$

es una base con infinitos caminos.

(c) Sea Γ:



Se deja a cargo del lector verificar que $\dim_k k\Gamma = 22$.

Observación 2.1.

1. Si Γ es un carcaj finito entonces el álgebra $k\Gamma$ es de dimensión finita sobre k si y sólo si Γ no posee ciclos orientados.
2. $k\Gamma$ es inescindible como álgebra si y sólo si Γ es un carcaj conexo.

3. $k\Gamma$ es un álgebra asociativa con elemento identidad
$$1 = \sum_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i \qquad \text{(suma de caminos triviales de } \Gamma)$$
4. El álgebra $k\Gamma$ no es necesariamente conmutativa.
5. $k\Gamma$ es un álgebra básica.
6. El conjunto $\{\epsilon_i\}_{i \in \Gamma_0}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de $k\Gamma$.
7. Sea J el ideal de $k\Gamma$ generado por las flechas de Γ. Entonces $J = \operatorname{rad} k\Gamma$ si y sólo si Γ no posee ciclos orientados. Además el número de flechas de i hasta j es igual a $\dim_k(\epsilon_j J \epsilon_i)$.

Cuando tenemos (Γ, ρ) un carcaj con relaciones podemos también considerar la $k-$álgebra $k(\Gamma, \rho) = k\Gamma / < \rho >$, donde $< \rho >$ denota el ideal en $k\Gamma$ generado por un conjunto de relaciones ρ. Por las condiciones sobre las relaciones tenemos que $< \rho > \subset J^2$.

Por ejemplo, sea A la $k-$álgebra dada por

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "\beta"] & & \\
\bullet \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \bullet \arrow[r, "\eta"] & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, "\gamma"'] & &
\end{tikzcd}$$

con $\beta\alpha = \gamma\delta$ y $\eta\beta = 0$.

Esto significa que $A = k\Gamma / < \rho >$, donde $< \rho >$ es el ideal de $k\Gamma$ generado por las relaciones $\beta\alpha - \gamma\delta$ y $\eta\beta$.

2.3. Teorema de Gabriel. El objetivo principal de la sección es el teorema 2.1. En vista de éste podemos caracterizar una gran clase de álgebras en terminos de carcajes. Tal resultado es básico a lo largo de estas notas.

Definición 2.2. Sea Γ un carcaj y k un campo. Denotamos por J el ideal de $k\Gamma$ generado por todas las flechas de Γ. Un ideal I de $k\Gamma$ es **admisible** si existe un $n > 0$ tal que $J^n \subset I \subset J^2$.

Observación 2.2. Sea Γ un carcaj finito sin ciclos orientados. Entonces todo ideal de $k\Gamma$ contenido en J^2 es admisible.

Teorema 2.1. *Si A es un álgebra inescindible, básica y de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k, entonces existe un carcaj Γ_A y un epimorfismo de álgebras $\phi : k\Gamma_A \longrightarrow A$ tal que $\ker\phi$ es un ideal admisible de $k\Gamma$.*

Para facilitar la demostración de este resultado, ella se va a dividir en cuatro partes. En la primera parte se define el carcaj Γ_A a partir del álgebra A; en la segunda parte se concreta el homomorfismo de álgebras $\phi : k\Gamma_A \longrightarrow A$; en la tercera parte se muestra que ϕ es sobreyectiva; y por último, en la cuarta parte se prueba que el $\ker\phi$ es un ideal admisible de $k\Gamma_A$.

1. Carcaj ordinario.
   Por ser A básica, es de la forma $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ con $P_i \ncong P_j$ para $i \neq j$. Ahora consideremos $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$, con $e_i \in P_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$, luego $e_1, \cdots, e_n$ un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de A, con este orden fijo. Tal sistema existe ya que A es de dimensión finita sobre k. Definimos el carcaj Γ_A por n vértices $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$ enumerados en correspondencia con $\{e_1, \cdots, e_n\}$. El número de flechas que comienzan en ϵ_i y terminan en ϵ_j será
   $$\dim_k e_j \left(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A\right) e_i.$$
   Este carcaj Γ_A así definido se denomina **carcaj ordinario** de A.

   Observación 2.3.

   (1) Γ_A esta bien definida, es decir, no depende del sistema de idempotentes ortogonales primitivos escogidos (a menos de la enumeración de los vértices).
   (2) Γ_A es conexa ya que A es inescindible. (Véase la observación 2.1 (2)).
   (3) Sea Γ un carcaj y $A = k\Gamma$ el álgebra de caminos de Γ. Entonces $\Gamma_A = \Gamma$.
2. El homomorfismo $\phi : k\Gamma_A \longrightarrow A$.
   Fijando un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de A y usando las notaciones de antes, definiremos en primer lugar una transformación lineal ϕ entre los espacios vectoriales $k\Gamma_A$ y A. Se denota con $[\epsilon_i, \epsilon_j]$ el conjunto de las flechas de ϵ_i a ϵ_j, por definición el número de elementos de $[\epsilon_i, \epsilon_j]$ es igual a $\dim_k e_j \left(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A\right) e_i$. Considere el conjunto $\{y_\alpha : \alpha \in [\epsilon_i, \epsilon_j]\}$ escogido de tal forma que $\{y_\alpha : \alpha \in [\epsilon_i, \epsilon_j]\}$ sea una $k-$base de
   $$e_j \left(\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A\right) e_i\,.$$
   (Nótese que $(\Gamma_A)_1 = \bigcup_{i,j}[\epsilon_i, \epsilon_j]$.) Estas bases las escogemos de esta forma, para cada par de vértices $[\epsilon_i, \epsilon_j]$ con $i = 1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, n$ y finalmente escogemos $x_\alpha \in e_j(\operatorname{rad} A)e_i \subset A$, tal que $\overline{x}_\alpha = y_\alpha$ para toda $\alpha \in (\Gamma_A)_1$.
   Definimos ahora $\phi(\epsilon_i) = e_i$, $\phi(\alpha) = x_\alpha$ para $\alpha \in (\Gamma_A)_1$, $\phi(\alpha_n \cdots \alpha_1) = x_{\alpha_n} \cdots x_{\alpha_1}$ y extendemos por linealidad a todos los elementos de $k\Gamma_A$.
   Para mostrar que ϕ es un homomorfismo de álgebras basta probar que $\phi(\gamma\delta) = \phi(\gamma)\phi(\delta)$ para cualesquier dos caminos γ y δ en la base

usual de $k\Gamma_A$. Haremos el caso en que $l(\gamma) \geq 1$ y $l(\delta) \geq 1$, los otros son similares. Consideremos $\gamma = \alpha_n \cdots \alpha_1$ y $\delta = \beta_m \cdots \beta_1$.

Si $s(\gamma) = e(\delta)$ entonces:

$$\gamma\delta = \alpha_n \cdots \alpha_1 \beta_m \cdots \beta_1 \quad y \quad \phi(\gamma\delta) = x_{\alpha_n} \cdots x_{\alpha_1} x_{\beta_m} \cdots x_{\beta_1} = \phi(\gamma)\phi(\delta).$$

En caso contrario, si $s(\gamma) = i \neq j = e(\delta)$ tendremos que $\gamma\delta = 0$ y $\phi(\gamma\delta) = 0$. Por otro lado $\phi(\gamma) = x_{\alpha_n} \cdots x_{\alpha_1}$, con $x_{\alpha_1} \in (\operatorname{rad} A)e_i$ y $\phi(\gamma) = x_{\beta_m} \cdots x_{\beta_1}$ con $x_{\beta_m} \in e_j(\operatorname{rad} A)$. Como $e_i e_j = 0$ para $i \neq j$ sigue que $x_{\alpha_1} x_{\beta_m} = 0$ y por tanto $\phi(\gamma)\phi(\delta) = 0$. Con esto $\phi : k\Gamma_A \longrightarrow A$ es un homomorfismo de álgebras.

3. ϕ es sobreyectiva.

Sea $R = \{x_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i,j}[\epsilon_i, \epsilon_j]\}$ como antes. Por construcción,

$$\{e_1, \cdots, e_n\} \cup R \subset \operatorname{Im}\phi\,.$$

Para mostrar que ϕ es sobreyectiva basta mostrar que cada elemento de A es un polinomio en los elementos de $\{e_1, \cdots, e_n\} \cup R$ o equivalentemente que cada elemento de $\operatorname{rad} A$ es un $k-$polinomio en los elementos de R (ya que $A = \operatorname{rad} A \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} ke_i$ como espacio vectorial), es decir, $\operatorname{rad} A =< R >$.

Lema 2.1. *Con la notación anterior, si $s \geq 1$, entonces*

$$\operatorname{rad}^s A = \operatorname{rad}^{s+1} A + < R >^s\,.$$

Demostración. La prueba la haremos por inducción sobre s. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad}^2 A \longrightarrow \operatorname{rad} A \longrightarrow \operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A \longrightarrow 0$$

Definamos ahora un monomorfismo que se divide $g : \operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A \longrightarrow \operatorname{rad} A$ dado por $g(\overline{x}_\alpha) = x_\alpha$ (recordemos que $\{\overline{x}_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i,j}[\epsilon_i, \epsilon_j]\}$ es una base de $\operatorname{rad} A/\operatorname{rad}^2 A$). Como espacios vectoriales $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad}^2 A \oplus \operatorname{Im} g \subset \operatorname{rad}^2 A + < R >$.

Sea ahora $s > 1$ y $x \in \operatorname{rad}^s A$, $x = x_1 \cdots x_s$ con $x_i \in \operatorname{rad} A$. Por inducción tenemos que para $x' = x_1 \cdots x_{s-1}$ y x_s tenemos que existen $y' \in rad^s A$ y $z' \in < R >^{s-1}$ tal que $x' = y' + z'$ y tambien $y_s \in \operatorname{rad}^2 A$ y $z_s \in < R >$ tal que $x_s = y_s + z_s$.

Así que $x = x'x_s = y'y_s + y'z_s + zy'_s + z'z_s$. Como $< R > \subset \operatorname{rad} A$, $yy'_s + y'z_s + zy'_s \in \operatorname{rad}^{s+1} A$ y $z'z_s \in < R >^s$ tenemos que

$$\operatorname{rad}^s A = \operatorname{rad}^{s+1} + < R >^s\,. \quad \boxtimes$$

Corolario 2.1. *(1)* $\operatorname{rad} A =< R >$.

(2) ϕ es sobreyectiva.

Demostración. (1) Sabemos que $< R > \subset \operatorname{rad} A$. Por otro lado si $x \in \operatorname{rad} A$, entonces para todo $m \geq 2$, $x = x_m + y$ con $x_m \in \operatorname{rad}^m A$ y $y \in < R >$. Como $\operatorname{rad} A$ es nilpotente (por la proposición 1.1) luego $x \in < R >$.

(2) Es claro de lo anterior. ☑

4. $\ker\phi$ es un ideal admisible de $k\Gamma_A$.

Falta mostrar que $\ker\phi$ es un ideal admisible, es decir, debemos mostrar que existe un $n \geq 2$ tal que $J^n \subset \ker\phi \subset J^2$ donde J es el ideal de $k\Gamma_A$ generado por todas las flechas de Γ_A.

(i) $\ker\phi \subset J^2$.

Sea $x \in k\Gamma_A$. Es claro que un álgebra de caminos se puede escribir como espacio vectorial, como la suma directa de los espacios vectoriales generados por los caminos de longitud cero, longitud uno, longitud dos, etc., por tanto

$$x = \sum_{\epsilon_i \in \Gamma_0} \lambda_i \epsilon_i + \sum_{\alpha \in \Gamma_1} \lambda_\alpha \alpha + y,$$

donde y es combinación lineal de caminos de longitud mayor que dos, en particular, $y \in J^2$. Si $x \in \ker\phi$, necesitamos mostrar que $\lambda_i = \lambda_\alpha = 0$. Tenemos

$$0 = \phi(x) = \sum_{i=1}^{|\Gamma_0|} \lambda_i e_i + \sum_{\alpha \in \Gamma_1} \lambda_\alpha x_\alpha + \phi(y) \qquad (I)$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{|\Gamma_0|} \lambda_i e_i = -(\sum_{\alpha \in \Gamma_1} \lambda_\alpha x_\alpha + \phi(y)) \in \operatorname{rad} A$$

lo que implica que $\lambda_i = 0$ para todo i, ya que $\operatorname{rad} A$ es nilpotente. Tomamos ahora en (I) módulo $\operatorname{rad}^2 A$, luego $0 = \sum_{\alpha \in \Gamma_1} \lambda_\alpha \overline{x}_\alpha$. Pero $\{\overline{x}_\alpha : \alpha \in \bigcup_{i,j} [\epsilon_i, \epsilon_j]\}$ es una base de $\operatorname{rad} A / \operatorname{rad}^2 A$. Por tanto $\lambda_\alpha = 0$ para todo α. Así $x \in J^2$. ☑

(ii) $\ker\phi$ contiene alguna potencia de J.

Notemos que $\phi(J^r) \subset \operatorname{rad}^r A$ para todo $r > 0$. Por tanto $J^r \subset \phi^{-1}(\operatorname{rad}^r A)$ para cada r. Como $\operatorname{rad} A$ es nilpotente se sigue que existe un m tal que $\operatorname{rad}^m A = 0$ y por tanto $J^m \subset \phi^{-1}(0) = \ker\phi$ como queriamos. ☑

De los ítems (i) y (ii) anteriores queda demostrada la parte 4.

Con esto se termina la demostración del teorema 2.1, sólo para simplicar un poco el lenguaje se reformula como sigue.

Teorema 2.2. *Toda álgebra, inescindible y básica de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k, es un álgebra de caminos dada por un carcaj con relaciones.*

3. Equivalencia entre representaciones de carcajes y módulos sobre álgebras de caminos.

En esta sección se introducen las representaciones de módulos sobre el álgebra de caminos de un carcaj con relaciones (Γ, ρ), es decir $A = k\Gamma / < \rho >$. Esto permite obtener una descripción concreta de los $A-$módulos en términos de espacios vectoriales junto con aplicaciones lineales. Después se muestra la equivalencia que existe entre las representaciones y los módulos sobre A. Para terminar se describen las representaciones de los $A-$módulos proyectivos e inyectivos.

3.1. Representaciones de carcajes. Sea C un módulo sobre un álgebra de caminos $k\Gamma$. Entonces $C = \oplus_{i \in \Gamma_0} \epsilon_i C$ es una descomposición de C en una suma finita de espacios vectoriales sobre k. Si α es una flecha de i a j, entonces la multiplicación a izquierda por α induce una aplicación lineal de $\epsilon_i C$ a $\epsilon_j C$. Esto nos lleva a la siguiente definición, la cual nos da una forma concreta de ver los módulos sobre álgebras de caminos.

Definición 3.1. Una **representación** (V, f) de un carcaj Γ sobre un campo k es un conjunto de espacios vectoriales $\{V(i) | i \in \Gamma_0\}$ junto con aplicaciones $k-$lineales $f_\alpha : V(i) \longrightarrow V(j)$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$.

La anterior definición nos permite también usar la notación para una representación de un carcaj Γ, así $(V, f) = ((V_i)_{i \in \Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$ o simplemente $(V, f) = (V_i, f_\alpha)$.

Se asume que las representaciones son finito dimensionales, es decir, cada $V(i)$ es de dimensión finita sobre k.

Un morfismo $h : (V, f) \longrightarrow (V', f')$ entre dos representaciones de Γ sobre k es una colección $\{h_i : V(i) \longrightarrow V'(i)\}_{i \in \Gamma_0}$ de aplicaciones $k-$lineales tal que para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ en Γ el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & V'(i) \arrow[d, "f'_\alpha"] \\ V(j) \arrow[r, "h_j"] & V'(j). \end{tikzcd}$$

Si $h : (V, f) \longrightarrow (V', f')$ y $g : (V', f') \longrightarrow (V'', f'')$ son dos morfismos entre representaciones entonces la composición se define por la colección de aplicaciones $g_i h_i : V(i) \longrightarrow V''(i)$ para todo $i \in \Gamma_0$.

Así, se obtiene **la categoría de representaciones** de Γ sobre k, la cual se denota por $Rep\,\Gamma$.

Se dice que un objeto (V, f) es un **subobjeto** de un objeto (V', f') en $Rep\,\Gamma$ si $V(i) \subset V'(i)$ para todo $i \in \Gamma_0$ y $f_\alpha = f'_\alpha|_{V(i)}$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$. Para un morfismo $h : (V, f) \longrightarrow (V', f')$ definimos el kernel, $\ker h$

como el subobjeto (W, f'') de (V, f) definido por $W(i) = \ker h_i$ para $i \in \Gamma_0$ y $f''_\alpha = f_\alpha|_{W(i)}$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$. Es fácil ver que $f_\alpha(\ker h_i) \subset \ker h_j$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$. Además se define la imagen $\operatorname{Im} h$ como el subobjeto (U, g) de (V', f') definido por $U(i) = \operatorname{Im} h_i$ para $i \in \Gamma_0$ y $g_\alpha = f'_\alpha|_{U(i)}$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$. El objeto (V, f) donde $V(i) = 0$ para todo $i \in \Gamma_0$ y $f_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$ es el **objeto cero** en $Rep\,\Gamma$. Es fácil ver que un morfismo $h : (V, f) \longrightarrow (V', f')$ es un monomorfismo en $Rep\,\Gamma$ si y sólo si $ker h = 0$ y que h es un epimorfismo si y sólo si $\operatorname{Im} h = (V', f')$. Así h es un isomorfismo si sólo si $h_i : V(i) \longrightarrow V'(i)$ es un isomorfismo para todo $i \in \Gamma_0$.

Una **suma** de dos objetos (V, f) y (V', f') en $Rep\,\Gamma$ es el objeto (W, g) donde $W(i) = V(i) \oplus V'(i)$ para $i \in \Gamma_0$ y $g_\alpha = f_\alpha \oplus f'_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$. Un objeto (V, f) se llama **inescindible** si no es isomorfo a la suma de dos representaciones diferente de cero. Un objeto (V, f) es **simple** si no tiene subobjetos propios diferentes de cero. Es claro que un objeto simple es inescindible.

Para cada vértice $i \in \Gamma_0$ tenemos un objeto simple (S_i, f) dado por $S_i(i) = k$, $S_i(j) = 0$ para $i \neq j$ y $f_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \Gamma_1$.

Es fácil probar que $Rep\,\Gamma$ es una $k-$categoría.

Ejemplo 3.1.

(a) Sea k un campo y Γ el carcaj $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$. Sea V la representación $k \underset{a}{\overset{1}{\rightrightarrows}} k$ y W la representación $k \underset{1}{\overset{a^{-1}}{\rightrightarrows}} k$, donde $a \neq 0 \in k$ y las aplicaciones a y a^{-1} están dadas por la multiplicación a izquierda por a y a^{-1} respectivamente. Es fácil ver que el morfismo $h : V \longrightarrow W$ dado por $h_1 = 1_k$ y $h_2 = k \overset{a^{-1}}{\longrightarrow} k$, es un isomorfismo.

(b) Sea k un campo y Γ el carcaj $1 \circlearrowleft \alpha$. Para cada $\lambda \in k$ existe una representación simple $(S_\lambda, f^\lambda_\alpha)$ dada por $S_\lambda(1) = k$ y $f^\lambda_\alpha : k \longrightarrow k$ la aplicación multiplicación por λ. Se puede ver fácilmente que si $\lambda \neq \lambda'$ entonces $(S_\lambda, f^\lambda_\alpha)$ y $(S_{\lambda'}, f^{\lambda'}_\alpha)$ no son isomorfas en $Rep\,\Gamma$.

3.2. Equivalencia entre $f.d.(k\Gamma)$ y $Rep\,\Gamma$. Se muestra que las categorías $Rep\,\Gamma$ y $f.d.(k\Gamma)$ son equivalentes, donde $f.d.(k\Gamma)$ denota la **categoría de $k\Gamma-$módulos de dimensión finita sobre k**. Se comienza definiendo los funtores $F : Rep\,\Gamma \longrightarrow f.d.(k\Gamma)$ y $H : f.d.(k\Gamma) \longrightarrow Rep\,\Gamma$.

Para (V, f) en $Rep\,\Gamma$ se define $F(V, f) = \oplus_{i\in\Gamma_0} V(i)$ como $k-$espacio vectorial. Para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ tenemos una aplicación lineal $f_\alpha : V(i) \longrightarrow V(j)$, denotemos por $\pi_i : F(V, f) \longrightarrow V(i)$ la proyección y por $\xi_i : V(i) \longrightarrow F(V, f)$ la inclusión, con base en la descomposición se obtiene la aplicación inducida por f_α definida por $\overline{f}_\alpha = \xi_j f_\alpha \pi_i : F(V, f) \longrightarrow F(V, f)$. Para un camino trivial ϵ_i se tiene la aplicación inducida $\overline{f}_{\epsilon_i} = \xi_i f_{\epsilon_i} \pi_i : F(V, f) \longrightarrow F(V, f)$

donde $f_{\epsilon_i} = 1_{V(i)} : V(i) \longrightarrow V(i)$. Entonces $\overline{f} : k\Gamma_0 \longrightarrow End_k(F(V,f))$ es un morfismo de $k-$álgebras y $\overline{f} : k\Gamma_1 \longrightarrow End_k(F(V,f))$ un morfismo de $k\Gamma_0-$bimódulos. Se puede ver fácilmente (véase [4]) que existe un único morfismo $\overline{\overline{f}} : k\Gamma \longrightarrow End_k(F(V,f))$ extendiendo $\overline{f}$, así $F(V,f)$ adopta estructura de $k\Gamma-$módulo.

Sea $h : (V,f) \longrightarrow (V',f')$ un morfismo en $Rep\,\Gamma$. Entonces se tiene las aplicaciones $h_i : V(i) \longrightarrow V'(i)$ para cada $i \in \Gamma_0$ y por tanto la aplicación inducida de espacios vectoriales $\overline{\overline{h}} : F(V,f) \longrightarrow F(V',f')$. Para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ en Γ_1 se tiene que $h_j f_\alpha = f'_\alpha h_i : V(i) \longrightarrow V(j)$. Por tanto $\overline{\overline{h}}\,\overline{\overline{f}}_\alpha = \overline{\overline{f'}}_\alpha\,\overline{\overline{h}}$ y así $\overline{\overline{h}}\,\overline{\overline{f}}_\sigma = \overline{\overline{f'}}_\sigma\,\overline{\overline{h}}$ para cada $\sigma \in k\Gamma$. Es decir, $\overline{\overline{h}}(\sigma v) = \sigma\overline{\overline{h}}(v)$ para $v \in F(V,f)$, asi que $\overline{\overline{h}}$ es un $k\Gamma-$homomorfismo. Se define entonces $F(h) = \overline{\overline{h}}$. Es sencillo probar que $F : Rep\,\Gamma \longrightarrow f.d.(k\Gamma)$ es un $k-$funtor.

Se define ahora $H : f.d.(k\Gamma) \longrightarrow Rep\,\Gamma$. Sea C en $f.d.(k\Gamma)$. Como $1 = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$ es una suma de idempotentes ortogonales en $k\Gamma$, se tiene que $C = \oplus_{i\in\Gamma_0}\epsilon_i C$. Para cada $\sigma \in k\Gamma$ se obtiene la aplicación $\overline{\overline{f}} : C \longrightarrow C$ definida por $\overline{\overline{f}}(c) = \sigma c$. Si $\alpha : i \longrightarrow j$ es una flecha en Γ tenemos $\alpha(\epsilon_i C) = \epsilon_j \alpha C \subset \epsilon_j C$, así que α induce por restricción una aplicación $k-$lineal $f_\alpha : \epsilon_i C \longrightarrow \epsilon_j C$. Definimos $H(C)$ por la representación dada por los $k-$espacios vectoriales $\epsilon_i C$ para cada $i \in \Gamma_0$ junto con las aplicaciones $f_\alpha : \epsilon_i C \longrightarrow \epsilon_j C$ para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$.

Si $h : B \longrightarrow C$ es un morfismo en $f.d.(k\Gamma)$ se tiene $h(\epsilon_i B) \subset \epsilon_i h(B) \subset \epsilon_i C$, así se tiene por restricción una aplicación $k-$lineal $h_i : \epsilon_i B \longrightarrow \epsilon_i C$. Para una flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ tenemos $\alpha h(b) = h(\alpha b)$ para $b \in B$, y por tanto $\alpha h_i(b) = h_j(\alpha b)$ para $b \in \epsilon_i B$, esto es, $f'_\alpha h_i(b) = h_j f_\alpha(b)$, definiendo entonces $H(h) = \{h_i\}_{i\in\Gamma_0}$ se obtiene $H(h) : H(B) \longrightarrow H(C)$ en $Rep\,\Gamma$. Es fácil probar que $H : f.d.(k\Gamma) \longrightarrow Rep\,\Gamma$ es un $k-$ funtor.

Se puede ahora probar la equivalencia entre $f.d.(k\Gamma)$ y $Rep\,\Gamma$.

Teorema 3.1. *Sea k un campo y Γ un carcaj finito. Entonces los funtores $F : Rep\,\Gamma \longrightarrow f.d.(k\Gamma)$ y $H : f.d.(k\Gamma) \longrightarrow Rep\,\Gamma$ son equivalencias inversas de $k-$categorías.*

Demostración. Sea (V,f) en $Rep\,\Gamma$. Entonces

$$F(V,f) = \oplus_{i\in\Gamma_0} V(i) \quad \text{y} \quad \epsilon_i F(V,f) = \overline{\overline{f}}_{\epsilon_i}(F(V,f)) = \xi_i(V(i))\,.$$

Si $\alpha : i \longrightarrow j$ es una flecha en Γ, la aplicación $k-$lineal $f_\alpha : V(i) \longrightarrow V(j)$ induce una aplicación $k-$lineal $f_\alpha : F(V,f) \longrightarrow F(V,f)$. La restricción de f_α a $\xi_i(V(i))$ da una aplicación $k-$lineal $f'_\alpha : \xi_i(V(i)) \longrightarrow \xi_j(V(j))$. Para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "\xi_i"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & \xi_i(V(i)) \arrow[d, "f'_\alpha"] \\ V(j) \arrow[r, "\xi_j"] & \xi_j(V(j)). \end{tikzcd}$$

Usando que $HF(V,f)$ es la representación dada por la colección $\xi_i(V(i))$, tenemos que $\xi = \{\xi_i\}$ es un isomorfismo $\xi : (V,f) \longrightarrow HF(V,f)$. Es fácil probar que es un isomorfismo funtorial de $1_{Rep\,\Gamma}$ a HF.

Sean ahora B y C en $f.d.(k\Gamma)$ y $f : B \longrightarrow C$ un $k\Gamma-$homomorfismo. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] & C \arrow[d, "\cong"] \\ \oplus_{i\in\Gamma_0}\epsilon_i B \arrow[r, "f_1\oplus\cdots\oplus f_n"] & \oplus_{i\in\Gamma_0}\epsilon_i C. \end{tikzcd}$$

Donde $f_i : \epsilon_i B \longrightarrow \epsilon_i C$ son la aplicaciones restricción. Por tanto tenemos un isomorfismo funtorial de $1_{f.d.(k\Gamma)}$ a FH. ☑

Para un carcaj con relaciones (Γ,ρ) sobre un campo k definimos la categoría $Rep\,(\Gamma,\rho)$ de representaciones como la subcategoría plena de $Rep\,\Gamma$ cuyos objetos son de la forma (V,f) donde $f_\sigma = 0$ para cada relación σ en ρ. Así obtenemos la siguiente versión del teorema anterior.

Proposición 3.1. *Sean k un campo y (Γ,ρ) un carcaj con relaciones sobre k. Entonces el funtor $F : Rep\,\Gamma \longrightarrow f.d.(k\Gamma)$ induce una equivalencia de $k-$categorías entre $Rep\,(\Gamma,\rho)$ y $f.d.(k(\Gamma,\rho))$.*

Demostración. Si (V,f) esta en $Rep\,(\Gamma,\rho)$, por definición la aplicación f_σ es cero para todo σ en ρ. Por tanto $\sigma F(V,f) = 0$ así que $F(V,f)$ es un $k(\Gamma,\rho)-$módulo. Recíprocamente, si $F(V,f)$ es un $k(\Gamma,\rho)-$módulo, entonces $\sigma F(V,f) = 0$ para todo σ en ρ, así que f_σ es cero para todo σ en ρ. Por tanto (V,f) está en $Rep\,(\Gamma,\rho)$. Y por el teorema 3.1 finalizamos la prueba. ☑

Ejemplo 3.2. (a) Sea Γ: $1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Vamos a describir todas las representaciones inescindibles de Γ. Sea $k^m \xrightarrow{f} k^n$ una representación y consideremos $v_1, \cdots, v_m$ una base de k^m donde $\ker f =< v_0 = 0, v_1, \cdots, v_j >$, $j \geq 0$. Note que $\{f(v_{j+1}), \cdots, f(v_m)\}$ es linealmente independiente en k^n. Si $n = m$ entonces además es una base, en caso contrario puede ser completada una base de k^n:

$\{f(v_{j+1}), \cdots, f(v_m), u_1, \cdots, u_{n-m+j}\}$. Así podemos escribir en relación a estas bases:

$$k^m \xrightarrow{f} k^n = (k \xrightarrow{0} 0)^j \oplus (k \xrightarrow{1} k)^{m-j} \oplus (0 \xrightarrow{0} k)^{n-m+j}$$

Por tanto toda representación se puede escribir como una suma de copias $(k \xrightarrow{0} 0), (k \xrightarrow{1} k)$ y $(0 \xrightarrow{0} k)$, que son inescindibles, a menos de isomorfismo.

Nótese por ejemplo que $V_1 = (k \xrightarrow{1} k)$ es isomorfo a $V_2 = (k \xrightarrow{f} k)$ con f una aplicación $k-$lineal no nula. De hecho, si $f : k \longrightarrow k$ es no nula entonces $f(x) = xf(1) = x\lambda$, $0 \neq \lambda \in k$ y por tanto las representaciones V_1 y V_2 son isomorfas vía el isomorfismo $h = (h_1, h_2)$, $h_1 : k \longrightarrow k$ dado por $h_1(x) = \lambda^{-1}x$ y $h_2 = Id$.

(b) Sea (Γ, ρ) dada por $1 \circlearrowleft \alpha$ con $\alpha^2 = 0$. Dar una representación $V = (V, f)$ de (Γ, ρ) es dar un espacio vectorial V y un operador lineal $f : V \longrightarrow V$ nilpotente de índice 2. Si $V \cong k$ entonces $f = 0$ y por tanto $(k, 0)$ es la única representación con $\dim_k V = 1$. Si f es un operador sobre k^2 sabemos que f es diagonalizable o f tiene forma de Jordan $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En nuestro ejemplo f es nilpotente y por tanto no puede ser diagonalizable. En otras palabras, cualquier representación $V = (k^2, f)$, con $f : k^2 \longrightarrow k^2$ un operador nilpotente, es isomorfa a la representación dada por $W = (k^2, h)$ con $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : k^2 \longrightarrow k^2$. Dejamos al lector la verificación de esto último, además de verificar que si $\dim_k V \geq 3$ entonces la representación (V, f) es suma directa de copias de $(k, 0)$ y $(k^2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$. Luego $(k, 0)$ y $(k^2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ son las clases de isomorfismos de las representaciones inescindibles.

(c) Sea Γ el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$. Dejamos al lector verificar que $V_1 = (k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0)$, $V_2 = (0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0)$, $V_3 = (0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k)$, $V_4 = (k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0)$, $V_5 = (0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k)$ y $V_6 = (k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k)$ forman una lista completa de representaciones inescindibles sobre Γ. Si colocamos $\beta\alpha = 0$ entonces $V_1, ..., V_5$ serian todas las representaciones inescindibles de $(\Gamma, \{\beta\alpha\})$.

3.3. Representaciones de módulos proyectivos e inyectivos. Sea $A = k\Gamma/ < \rho >$ el álgebra de caminos del carcaj con relaciones (Γ, ρ).

Módulos proyectivos.

Sabemos que en la descomposición de A como $A-$módulos inescindibles $A = A\overline{\epsilon}_1 \oplus \cdots \oplus A\overline{\epsilon}_n$ los módulos $A\overline{\epsilon}_i$ son los módulos proyectivos inescindibles. Además como A es básica (por la observación 2.1(5)), $A\overline{\epsilon}_i \ncong A\overline{\epsilon}_j$ si $i \neq j$. Veamos como es la representación de $A\overline{\epsilon}_i = P_i = ((P_i)_j, f_\alpha)$. Por la descripción dada por el funtor H,

$(P_i)_j = \overline{\epsilon}_j A\overline{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_j k\Gamma\epsilon_i}{\epsilon_j<\rho>\epsilon_i}$ y si $\alpha : j \longrightarrow s$ entonces $f_\alpha : \frac{\epsilon_j k\Gamma\epsilon_i}{\epsilon_j<\rho>\epsilon_i} \longrightarrow \frac{\epsilon_s k\Gamma\epsilon_i}{\epsilon_s<\rho>\epsilon_i}$ donde $f_\alpha(\overline{\gamma}) = \overline{\alpha\gamma}$ cuando γ es un camino de i a j.

Observación 3.1. (a) Si $<\rho>=0$ tendremos que $(P_i)_j$ es un $k-$espacio vectorial con base formada por todos los caminos de i a j. Además, f_α es inyectiva para todo α.

(b) Si $<\rho>\neq 0$ y existe una relación de i a j entonces $\dim(P_i)_j$ es menor que el número de caminos de i a j.

Ejemplo 3.3. (a) Sea (Γ, ρ) dada por

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "\gamma"] & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] & & 4, \arrow[ll, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

con $\delta\gamma\beta = 0$. Utilizando las relaciones no es difícil ver que los proyectivos inescindibles son:

$$P_1 : \begin{tikzcd}
 & & k \arrow[dr, "1"] & \\
k \arrow[r, "1"] & k \arrow[ur, "1"] & & k, \arrow[ll, "0"']
\end{tikzcd} \qquad P_2 : \begin{tikzcd}
 & & k \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[ur, "1"] & & k, \arrow[ll, "0"']
\end{tikzcd}$$

$$P_3 : \begin{tikzcd}
 & & k^2 \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[ur, "(0{,}1)^t"] & & k^2 \arrow[ll, "(1{,}0)^t"']
\end{tikzcd} \qquad y \quad P_4 : \begin{tikzcd}
 & & k \arrow[dr, "(0{,}1)^t"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[ur, "1"] & & k^2. \arrow[ll, "(1{,}0)^t"']
\end{tikzcd}$$

(b) Sea (Γ, ρ)

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "\beta"] & & \\
\bullet \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \bullet \arrow[r, "\eta"] & \bullet, \\
 & \bullet \arrow[ur, "\delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

con $\beta\alpha = \delta\gamma$ y $\eta\beta = 0$. Los proyectivos inescindibles son:

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dr, "1"] & & \\
k \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & k \arrow[r, "0"] & 0, \\
 & k \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}
 & k \arrow[dr, "1"] & & \\
0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[r, "0"] & 0, \\
 & 0 \arrow[ur, "0"'] & &
\end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr, "0"] & & \\
0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[r, "1"] & k, \\
 & k \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, "0"] & & \\
0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[r, "1"] & k, \\
& 0 \arrow[ur, "0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[dr, "0"] & & \\
0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & k. \\
& 0 \arrow[ur, "0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Radicales de proyectivos.

Sea P_i el proyectivo inescindible asociado al vértice i. Queremos describir una representación $\operatorname{rad}(P_i) = ((\operatorname{rad} P_i)_j, g_\alpha)$. Nótese que $\operatorname{rad}(A\overline{\epsilon}_i) = (\operatorname{rad} A)\overline{\epsilon}_i$ y como $< \rho >$ es adimisible entonces $\operatorname{rad} A = \overline{J}$, donde J es el ideal generado por las flechas. Se tiene que:

$$(\operatorname{rad} P_i)_j = \overline{\epsilon}_j(\operatorname{rad} A)\overline{\epsilon}_i = \overline{\epsilon}_j\overline{J}\overline{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_j J\epsilon_i}{\epsilon_j < \rho > \epsilon_i}$$

Si $i \neq j$ entonces $\epsilon_j J\epsilon_i = \epsilon_j k\Gamma\epsilon_i$ y por tanto $(\operatorname{rad} P_i)_j = (P_i)_j$. En el caso $i = j$ entonces

$$(P_i)_i = \frac{\epsilon_i k\Gamma\epsilon_i}{\epsilon_i < \rho > \epsilon_i} = k\overline{\epsilon}_i \oplus \frac{\epsilon_i J\epsilon_i}{\epsilon_i < \rho > \epsilon_i}$$

Luego, $\dim_k(\operatorname{rad} P_i)_i = \dim_k(P_i)_i - 1$. Es decir, para calcular la representación de $\operatorname{rad} P_i$ basta con la representación de P_i sin tener en cuenta el camino trivial ϵ_i.

Ejemplo 3.4. Se considera el carcaj del ejemplo 3.3 (a). Tenemos:

$\operatorname{rad} P_1$:
$$
\begin{tikzcd}
& & k \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[ur, "1"] & & k, \arrow[ll, "0"]
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{rad} P_2$:
$$
\begin{tikzcd}
& & k \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[ur, "0"] & & k, \arrow[ll, "0"]
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{rad} P_3$:
$$
\begin{tikzcd}
& & k \arrow[dr, "{(0,1)}"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[ur, "1"] & & k^2 \arrow[ll, "{(1,0)^t}"]
\end{tikzcd}
$$

y $\operatorname{rad} P_4$:
$$
\begin{tikzcd}
& & k \arrow[dr, "1"] & \\
0 \arrow[r, "0"] & k \arrow[ur, "1"] & & k. \arrow[ll, "0"]
\end{tikzcd}
$$

A continuación se describen las representaciones de los módulos inyectivos. Para esto, primero utilizaremos el álgebra opuesta A^{op} del álgebra A y mostraremos que los inyectivos de A son los proyectivos de A^{op}. Como consecuencia de esto tendremos una descripción de los $A-$módulos inyectivos.

Álgebras Opuestas.

Definición 3.2. El álgebra opuesta de A, que se denota por A^{op}, se define de la siguiente manera: (1) como espacio vectorial $A \cong_k A^{op}$ y (2) la multiplicación en A^{op} es dada por $a * b := ba$.

Para $A = k\Gamma / < \rho >$ el álgebra opuesta de A será $A^{op} = k\Gamma^* / < \rho^* >$, donde Γ^* es el **carcaj opuesto** de Γ, es decir, el carcaj con el mismo conjunto de vértices pero invirtiendo los sentidos de las flechas. Más formalmente, $\Gamma^* = (\Gamma_0^*, \Gamma_1^*)$ es tal que $\Gamma_0^* = \Gamma_0$ y existe una biyección $\phi : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1^*$ tal que $s^*(\phi(\alpha)) = e(\alpha)$ y $e^*(\phi(\alpha)) = s(\alpha)$. Además de esto, $\sigma = \sum_i \lambda_i \alpha_1 \cdots \alpha_{n_i}$ es una relación en ρ si y sólo si $\phi(\sigma) = \sum_i \lambda_i \phi(\alpha_1) \cdots \phi(\alpha_{n_i})$ es una relación en ρ^*.

Ejemplo 3.5. El carcaj opuesto del ejemplo 3.3 (a) es

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[rr, "\delta"] & & 4, \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

con $\beta\gamma\delta = 0$.

Observación 3.2. (1) A es inescindible (básica) si y sólo si A^{op} es inescindible (básica).

(2) Sea $D : A-mod \longrightarrow A^{op}-mod$ el funtor dado por $D(X) := Hom_k(X, k)$. El funtor D es una dualidad y escribimos $D^2 \cong 1$ por abuso de lenguaje. Un $A-$módulo a izquierda M puede ser visto como un $A^{op}-$módulo a derecha por medio de D. Tenemos que D lleva epimorfismos en monomorfismos y viceversa.

(3) Si $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$ con $P_i \ncong P_j$ cuando $i \neq j$ entonces $D(P_1), \cdots, D(P_n)$ es una lista completa y sin repeticiones de los inyectivos inescindibles de $A^{op}-$ mod (véase [15]).

Vamos ahora a ver cómo podemos relacionar las representaciones de un carcaj con relaciones (Γ, ρ) con las representaciones de su carcaj opuesto (Γ^*, ρ^*). Basta analizar la compuesta de los funtores

$$(\Gamma, \rho) - mod \xrightarrow{F} A - mod \xrightarrow{D} A^{op} - mod \xrightarrow{H} (\Gamma^*, \rho^*) - mod,$$

donde D es la dualidad $Hom_k(-, k)$ y F, H son los funtores descritos en 3.1.

Sea $V = ((V_i)_{i \in \Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_1})$ una representación. Calculamos HDF en V y tendremos $HDF(V) = (V_i^*, g_\alpha^*)$ donde $V_i^* = Hom_k(V_i, k)$ y $g_\alpha^* = f_\alpha^t$. Al lector interesado en ver tal construcción con más detalles, sugerimos la lectura de [10].

Módulos Inyectivos.

Sean (Γ, ρ) un carcaj con relaciones y $A = k\Gamma / < \rho >$. Queremos describir las representaciones correspondientes a los inyectivos inescindibles. Sea $P_1^*, \cdots, P_n^*$

los proyectivos indescompnibles de $A^{op}-$mod. Entonces los inyectivos inescindibles de A serán $D(P_1^*), \cdots, D(P_n^*)$. Vamos a aplicar D a las representaciones de los proyectivos P_i^*. Consideremos $I_j = ((I_j)_{i\in\Gamma_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma_1}) := D(P_j^*)$, entonces

$$(I_j)_i = D(P_j^*)_i \cong_k D\left(\frac{\epsilon_i k\Gamma^* \epsilon_j}{\epsilon_i < \rho^* > \epsilon_j}\right) \cong_k D\left(\frac{\epsilon_j k\Gamma \epsilon_i}{\epsilon_j < \rho > \epsilon_i}\right) \cong_k \left(\frac{\epsilon_j k\Gamma \epsilon_i}{\epsilon_j < \rho > \epsilon_i}\right)$$

Además, si $\alpha : i \longrightarrow s$ entonces $f_\alpha : \left(\frac{\epsilon_j k\Gamma\epsilon_i}{\epsilon_j<\rho>\epsilon_i}\right) \longrightarrow \left(\frac{\epsilon_j k\Gamma\epsilon_s}{\epsilon_j<\rho>\epsilon_s}\right)$ se da por $f_\alpha(\overline{p}) = p'$ en el caso de que exista un camino p' de s a j tal que $p = p'\alpha$ y es igual a cero en caso contrario.

Ejemplo 3.6. Sea (Γ, ρ) el carcaj del ejemplo 3.3 (a). Los inyectivos inescindibles serán

$$I_1 : \quad \begin{tikzcd} & & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ k \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[ur, "0"] & & 0, \arrow[ll, "0"'] \end{tikzcd} \qquad I_2 : \quad \begin{tikzcd} & & k \arrow[dr, "1"] & \\ k \arrow[r, "1"] & k \arrow[ur, "0"] & & k, \arrow[ll, "1"'] \end{tikzcd}$$

$$I_3 : \quad \begin{tikzcd} & & k^2 \arrow[dr, "(0{,}1)^t"] & \\ k \arrow[r, "1"] & k \arrow[ur, "(1{,}0)"] & & k \arrow[ll, "1"'] \end{tikzcd} \qquad y \quad I_4 : \quad \begin{tikzcd} & & k^2 \arrow[dr, "1"] & \\ k \arrow[r, "1"] & k \arrow[ur, "(0{,}1)"] & & k^2. \arrow[ll, "(1{,}0)^t"'] \end{tikzcd}$$

4. **Sucesiones de Auslander–Reiten.**

La teoría de representaciones de álgebras también envuelve la descripción de los morfismos entre los módulos. Las principales herramientas para este estudio son las nociones de morfismos irreducibles y sucesiones que casi se dividen (o sucesiones de Auslander–Reiten), que fueron introducidas a mediados de la década de los setenta por M. Auslander y I. Reiten.

Posteriormente los morfismos que componen las sucesiones de Auslander–Reiten fueron utilizados para la definición de un carcaj, actualmente llamado Carcaj de Auslander–Reiten del álgebra A. Formalizados por C. M. Ringel (véase [23]) tales carcajes pueden ser consideradas como una aproximación a la categoría de los módulos inescindibles sobre A, actualmente tales carcajes son objeto de mucho estudio. En esta última sección se definen conceptos tales como sucesión que casi se divide o sucesión de Auslander–Reiten y los morfismos fuente, sumidero e irreducible. Se enuncia el *teorema de existencia de las sucesiones que casi se dividen* y se finaliza con la construcción de carcajes de Auslander–Reiten para un álgebra A.

Los resultados de esta sección son más generales que para la situación de $k-$álgebras. Por esto se asume en esta sección que A es un álgebra de Artin, es decir, A es un álgebra sobre un anillo artiniano conmutativo R, donde A es finitamente generada como $R-$módulo. En particular una $k-$álgebra de dimensión finita es un álgebra de Artin. Recordemos que todos nuestros $A-$módulo son izquierdos, pero hablamos de $A-$módulos por simplicidad.

4.1. Sucesiones de Auslander–Reiten.

Definición 4.1. Una sucesión exacta corta que no se divide (véase la proposición 1.3) entre $A-$módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

es una **sucesión que casi se divide** o **sucesión de Auslander–Reiten** (**S.A.R.**) si:

(i) Los $A-$módulos N y M de sus extremos son inescindibles;

(ii) Para todo morfismo $h : X \longrightarrow M$, $X \in A - mod$, que no sea un epimorfismo que se divide, existe $\overline{h} : X \longrightarrow E$ tal que $g\overline{h} = h$;

(ii') Para todo morfismo $h : N \longrightarrow X$, $X \in A - mod$, que no sea un monomorfismo que se divide, existe $\overline{h} : E \longrightarrow X$ tal que $\overline{h}f = h$.

En realidad las condiciones (ii) y (ii') son equivalentes (ver [3]). Se supone aquí, que (ii) y (ii') hacen parte de la definición.

El próximo resultado, el más importante de la sección, dice en qué circunstancias existen $S.A.R$ y se asegura su unicidad.

Teorema 4.1. (Existencia y unicidad) *Sea A un álgebra de Artin y M un $A-$módulo inescindible.*

(1) Si M no es proyectivo entonces existe una única S.A.R. terminando en M, así $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$.

(2) Si M no es inyectivo entonces existe una única S.A.R. comenzando en M, así $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$.

La demostración de la existencia de las $S.A.R.$ escapa del objetivo de estas notas y por tanto se omite. Tal demostración puede ser encontrada en [3] o en [7]. Pero para ilustrar las técnicas utilizadas se hace la demostración de la unicidad de las $S.A.R$ terminando en un módulo inescindible.

Primero el siguiente lema.

Lema 4.1. *Considere el siguiente diagrama conmutativo con los A-módulos M y N inescindibles,*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

donde se tienen ambas sucesiones exactas cortas que no se dividen. Entonces α y β son isomorfismos.

Demostración. Basta probar que α no es nilpotente. Si $\alpha^n = 0$ para algún $n > 0$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta^n"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Como $\beta^n f = 0$ sigue que existe $\overline{g} : M \longrightarrow E$ tal que $\overline{g}g = \beta^n$, y de esto, junto con la conmutatividad del diagrama anterior tenemos que $g\overline{g} = g\beta^n\overline{g} = g\overline{g}g\overline{g} = (g\overline{g})^2$ y continuando por inducción tendremos que $(g\overline{g})^s = g\overline{g}$ para todo $s > 0$. Como consecuencia de que la segunda fila del diagrama anterior es una sucesión exacta corta que no se divide, $g\overline{g}$ no es isomorfismo. Por el lema de Harada–Sai (ver [4] VI.1.3) sigue que $g\overline{g} = 0$ y por tanto $0 = g\overline{g}g = g\beta^n = g$ lo cual es una contadicción. Así α es un isomorfismo y por tanto β también lo es. ☑

Proposición 4.1. *Unicidad de S.A.R. terminando en un $A-$módulo inescindible M.*

Demostración. Sean

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \quad (1) \quad y \quad 0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M \longrightarrow 0 \quad (2)$$

dos $S.A.R.$ terminando en $M \in A-$ind. Necesitamos probar que existen isomorfismos $\alpha : N \longrightarrow N'$ y $\beta : E \longrightarrow E'$.

Como (2) es $S.A.R.$ entonces existe $\beta : E \longrightarrow E'$ tal que $g'\beta = g$. Como (1) es una sucesión exacta corta sigue que $g'\beta f = gf = 0$ y por tanto tendremos que $\mathrm{Im}\,(\beta f) \subset \ker g' = \mathrm{Im}\, f'$. Luego para todo $x' \in \mathrm{Im}\,(\beta f)$, existe $y' \in N'$ tal que $f'(y') = x'$ y como f' es un monomorfismo, tal y' es único. Para $y \in N$ defino $\alpha(y) = (f')^{-1}(\beta f(y))$. Es fácil ver que α y β son tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 & (1) \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] & E' \arrow[r, "g'"] & M \arrow[r] & 0 & (2) \end{tikzcd}$$

De forma análoga conseguimos $\alpha' : N' \longrightarrow N$ y $\beta' : E' \longrightarrow E$ tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\alpha'"] & E' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\beta'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por el lema anterior $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\alpha'\alpha$ y $\beta'\beta$ son isomorfismos y por tanto α y β son isomorfismos. ☑

Observación 4.1. Es posible probar la unicidad de *S.A.R.* comenzando con un $A-$módulo inescindible N de manera análoga. Basta dualizar los argumentos.

Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ una *S.A.R.* El hecho importante detrás de esta noción es la posibilidad de poder “levantar”morfismos a M a través de g y también morfismos que salen de N a través de f. Tales morfismos f y g cumpliran un papel muy importante en la teoría. En las próximas dos secciones se trata sobre ellos.

4.2. Morfismos fuente y sumidero. Se comienza el estudio de los morfismos que componen las *S.A.R.* a partir de su propiedad de levantamiento.

Definición 4.2. Sea M un $A-$módulo inescindible.

(1) Un morfismo $g : E \longrightarrow M$ es un **sumidero** en M si:

(i) g no es epimorfismo que se divide.

(ii) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $gh = g$, se tiene que h es automorfismo.

(iii) para todo $h : X \longrightarrow M$ que no sea epimorfismo que se divide, existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$.

(2) Un morfismo $f : M \longrightarrow E$ es una **fuente** en M si:

(i) f no es monomorfismo que se divide.

(ii) para todo $h : E \longrightarrow E$ tal que $hf = f$, se tiene que h es automorfismo.

(iii) para todo $h : M \longrightarrow X$ que no sea monomorfismos que se divide, existe $h' : E \longrightarrow X$ tal que $h'f = h$.

Observación 4.2. (1) Originalmente los morfismos fuente (resp., sumidero) fueron llamados de *“minimal left* (resp., *right*) *almost split map”* por Auslander y Reiten. Posteriormente simplificados por *“source map”* y (resp., *“sink map”*).

(2) La condición (ii) (tanto en (1) como en (2)) garantiza la minimalidad de tales morfismos. Note que si $g : E \longrightarrow M$ es un sumidero entonces $(g, 0) :$

$E \oplus M \longrightarrow M$ también cumple las condiciones (i) y (iii) de la definición pero no la condición (ii), por ejemplo, $h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : E \oplus M \longrightarrow E \oplus M$ es tal que $(g, 0)h = (g, 0)$ y este no es un automorfismo.

Proposición 4.2. *Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ una S.A.R. Entonces*

(a) g es sumidero y cualquier otro sumidero en M es isomorfo a g.

(b) f es fuente y cualquier otra fuente en N es isomorfa a f.

Demostración. (a) De la definición de $S.A.R.$ (Definición 4.1) se tiene que g satisface (i) y (iii). Sea $h : E \longrightarrow E$ tal que $gh = g$. Note que existe $\alpha : N \longrightarrow N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Por el lema 4.1, h es un isomorfismo y por tanto g es un sumidero.

Sea ahora $h : X \longrightarrow M$ un sumidero en M. Entonces existe $\alpha : E \longrightarrow X$ tal que $h\alpha = g$. Completando tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker h \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, "h"] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nuevamente por el lema 4.1, α es isomorfismo y por tanto h es isomorfo a g.

(b) Se prueba por dualidad. ☑

Corolario 4.1. *Sea M un $A-$módulo inescindible.*

(1) Si M no es proyectivo y si $g : E \longrightarrow M$ es un sumidero entonces g es un epimorfismo y $0 \longrightarrow \ker g \overset{i}{\hookrightarrow} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ es una S.A.R.

(2) Si M no es inyectivo y si $f : M \longrightarrow E$ es una fuente entonces f es un monomorfismo y $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{\phi} \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$ es una S.A.R. ☑

Con esto se relacionan los morfismos sumidero y fuente con las sucesiones de Auslander–Reiten. Se sabe que dado un proyectivo inescindible P (resp., un inyectivo inescindible I). Se podría preguntar si existen morfismos sumidero llegando a un proyectivo o morfismos fuente saliendo de un inyectivo. El próximo resultado responde a estas preguntas. Con esto la propiedad principal de levantamiento de morfismos de alguna forma se generaliza a casi todos los módulos.

Proposición 4.3. *(1) Si P es un proyectivo inescindible no simple entonces la inclusión $i : \operatorname{rad} P \hookrightarrow P$ es un sumidero y todo otro sumidero en P es isomorfo a i.*

(2) Si I es un inyectivo inescindible no simple entonces la proyección natural $\phi : I \longrightarrow I/socI$ es una fuente y cualquier otra fuente en I es isomorfa a ϕ.

Demostración (1) Se prueba primero que $i : \operatorname{rad} P \longrightarrow P$ es un sumidero. Note que i no es epimorfismo que se divide. Si $h : X \longrightarrow P$ no es un epimorfismo que se divide entonces tenemos $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{rad} P$ pues P es proyectivo inescindible. Por tanto basta definir $\overline{h} : X \longrightarrow \operatorname{rad} P$ por $\overline{h}(x) = h(x)$ y tendremos $i\overline{h} = h$. Sea ahora $h \in End(\operatorname{rad} P)$ tal que $ih = i$. De esta relación sigue que h es un monomorfismo y por tanto un isomorfismo pues $l(\operatorname{rad} P) < \infty$. Con esto mostramos que $i : \operatorname{rad} P \longrightarrow P$ es un sumidero en P.

Sea $g : X \longrightarrow P$ un sumidero en P. Entoces existirán $h : \operatorname{rad} P \longrightarrow X$ tal que $gh = i$ y $h' : X \longrightarrow \operatorname{rad} P$ tal que $ih' = g$. Por tanto tendremos que $ghh' = g$ y $ih'h = i$. Pero como g y i son sumideros sigue que hh' y $h'h$ son isomorfismos y por tanto también lo serán h y h'.

(2) Se prueba de forma similar. ☑

Corolario 4.2. *(1) Para cada $A-$módulo inescindible C, existe un único morfismo sumidero $f : B \longrightarrow C$.*

(2) Para cada $A-$módulo inescindible C', existe un único morfismo fuente $f : C' \longrightarrow E$.

4.3. Morfismos Irreducibles. Se van a estudiar un poco más los morfismos que componen las sucesiones de Auslander–Reiten. Dado por ejemplo un morfismo sumidero $(g_1, \cdots, g_n) : \oplus_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow M$ se está interesado en estudiar las propiedades de los morfismos g_i. Se va a mostrar que tales morfismos poseen ciertas propiedades de irreducibilidad.

Definición 4.3. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es llamado **irreducible** si f no es epimorfismo ni monomorfismo que se divide y para una descomposición de $f = gh$ se tiene que g es un epimorfismos que se divide ó h es un monomorfismo que se divide.

Se puede probar fácilmente que, si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo irreducible, entonces f es epimorfismo o monomorfismo.

Se relacionan a continuación los morfismos irreducibles con morfismos fuente y sumidero.

Proposición 4.4. *Sea M un $A-$módulo inescindible.*

(a) Un morfismo $h : M \longrightarrow X$ es irreducible si y sólo si existe $h' : M \longrightarrow X'$ tal que $(h, h')^t : M \longrightarrow X \oplus X'$ es una fuente en M.

(b) Un morfismo $h : X \longrightarrow M$ es irreducible si y sólo si existe $h' : X' \longrightarrow M$ tal que $(h, h') : X \oplus X' \longrightarrow M$ es un sumidero en M.

Demostracción. Solo se prueba (a) ya que (b) sigue por dualidad.

(a) Sea $h : M \longrightarrow X$ irreducible y consideremos una fuente $f : M \longrightarrow E$ (existe por el corolario 4.2). Como h no es monomorfismo que se divide entonces existe $\overline{h} : E \longrightarrow X$ tal que $\overline{h}f = h$. Como f no es monomorfismo que se divide sigue que $\overline{h}$ es epimorfismo que se divide y por tanto existen X' y $h' : M \longrightarrow X'$ tales que $X \oplus X' \cong E$ y $(h, h')^t : M \longrightarrow X \oplus X'$ es una fuente.

Sea $(h, h')^t : M \longrightarrow X \oplus X'$ una fuente en M. Queremos probar que h es irreducible. Supongamos que h se descompone como $h = fg$ donde $f : Y \longrightarrow X$ y $g : M \longrightarrow Y$ y supongamos que g no es monomorfismo que se divide. Como $(h, h')^t$ es fuente existe $(k, u) : X \oplus X' \longrightarrow Y$ tal que $(k, u)(h, h')^t = g$. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "(h,h')^t"'] \arrow[d, "(g,h')^t"] \arrow[dr, "(h,h')^t"] & \\
X \oplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} k & u \\ 0 & 1_{X'} \end{pmatrix}"'] & Y \oplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1_{X'} \end{pmatrix}"'] & X \oplus X'.
\end{tikzcd}$$

De nuevo como $(h, h')^t$ es fuente tenemos que $\begin{pmatrix} fk & 0 \\ 0 & 1_{X'} \end{pmatrix}$ es isomorfismo, luego fk es isomorfismo y por tanto f es epimorfismo que se divide como se quería. ☑

Corolario 4.3. *Morfismos fuentes y sumideros son irreducibles.*

Se podría preguntar si todo morfismo en $A-$mod puede ser colocado en terminos de morfismos irreducibles, por ejemplo, como una suma de compuestas de irreducibles. Esto no es verdad en general. Para un número grandes de álgebras, van a existir morfismos que no son sumas de compuestas de irreducibles. Se muestra que, para álgebras de tipo finito esto ocurre. La demostración se basa en el lema de Harada–Sai (véase [4] VI.1.3).

Proposición 4.5. *Sean A un álgebra de tipo finito y X, Y $A-$módulos inescindibles. Entonces todo morfismo no isomorfismo y no nulo en $Hom_A(X, Y)$ es una suma de compuestas de irreducibles entre módulos inescindibles.*

Demostración. Suponga que exista $0 \neq f \in Hom_A(X, Y)$, que no sea isomorfismo. Luego Y no es simple proyectivo. Por el oorolario 4.2 existe $g : E \longrightarrow Y$ un sumidero en Y. Por tanto existe $h : X \longrightarrow E$ tal que $gh = f$. Note que g es irreducible. Para las componentes de h que no son irreducibles ni isomorfismos podemos repetir el proceso. Como el álgebra es de tipo finito este proceso para por el lema de Harada–Sai. ☑

4.4. Carcajes de Auslander–Reiten. Se va a asociar a un álgebra dada A un carcaj Γ_A donde los vértices y las flechas representaran respectivamente los $A-$módulos inescindibles y los morfismos irreducibles entre ellos. Tal carcaj Γ_A se llama **carcaj de Auslander–Reiten** de A y fue formalizada por C. M. Ringel (véase [23]). Se hacen primero los siguientes comentarios.

1. **Trasladado de Auslander–Reiten**.

Sea M un $A-$módulo inescindible. En el caso de M no ser proyectivo se sabe que existe una S.A.R. terminando en M:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0.$$

Recuerde que el $A-$módulo N es inescindible. Se denota tal N por τM. Debido a la unicidad de la S.A.R., τM es único a menos de isomorfismo. El módulo τM se denomina **trasladado de Auslander–Reiten** de M.

Por otro lado, si M no es inyectivo entonces existe una única $S.A.R.$ comenzando en M: $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ y N es un $A-$módulo inescindible que se denota por $\tau^{-}M$ y este único módulo se llama **trasladado inverso de Auslander–Reiten** de M.

Observación 4.3. (1) Por conveniencia se escribe $\tau P = 0$ para un módulo proyectivo P y $\tau^{-}I = 0$ para un módulo inyectivo I.

(2) Nótese que si M es un $A-$módulo inescindible no proyectivo entonces $\tau^{-}(\tau M) \cong M$.

2. **Carcaj de Auslander–Reiten.**

Definición 4.4. Sea A un álgebra. El **carcaj de Auslander–Reiten** de A es un carcaj Γ_A definida como sigue:

(1) Los vértices están en correspondencia biúnivoca con las clases de isomorfismos de los $A-$módulos inescindibles, es decir, para cada inescindible M asociamos un vértice $[M]$ y los vértices $[M]$ y $[M']$ son los mismos si y sólo si $M \cong M'$.

(2) Sean M y M' $A-$módulos inescindibles no isomorfos. Existe una flecha $[M] \longrightarrow [M']$ si y sólo si existe un morfismo irreducible de M a M'.

Observación 4.4. (1) El carcaj Γ_A no tiene lazos ni flechas multiples. Un **lazo** es una flecha que tiene inicio y final en el mismo vértice.

(2) Γ_A es localmente finita, es decir para cada vértice $[M]$ de Γ_A, existe sólo un número finito de flechas llegando y saliendo de $[M]$.

(3) Dado un $A-$módulo inescindible M no proyectivo entonces el número de flechas que salen de $[\tau M]$ es igual al número de flechas que llegan a $[M]$.

(4) Si M es un proyectivo simple (resp., inyectivo simple), entonces no existen morfismos irreducibles no nulos llegando a M (resp., saliendo de M), y por tanto no existen flechas en Γ_A llegando a $[M]$ (resp., saliendo de $[M]$).

Proposición 4.6. *Si A es un álgebra inescindible de tipo finito, entonces Γ_A es conexo.*

Demostración. Por la proposición 4.5 todo morfismo no nulo y no isomorfismo es una suma de compuestas de irreducibles. En particular, si $Hom_A(X,Y) \neq 0$ y $X \ncong Y$, entonces existe una cadena de irreducibles de X a Y. Por otro lado sabemos que dado cualquier módulo M existe un proyectivo P tal que $Hom_A(P,M) \neq 0$. Por tanto tenemos que para todo módulo inescindible M existe una cadena de irreducibles de un proyectivo a M. Basta mostrar que todos los proyectivos estan en la misma componente conexa de Γ_A. Pero esto es debido a que el carcaj ordinario de A es conexo pues A es inescindible (observación 2.1 (2)). ☑

En los siguientes ejemplos colocaremos las representaciones de los módulos para el carcaj y hablaremos de ellos indistintamente como los módulos sobre el álgebra de caminos, esto simplemente por el hecho de que las respectivas categorías son equivalentes (véase el teorema 3.1 y la proposición 3.1).

Ejemplo 4.1. (1) Sea Γ' el carcaj $1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Sabemos que $(k \xrightarrow{0} 0), (k \xrightarrow{1} k)$ y $(0 \xrightarrow{0} k)$ son todos los $k\Gamma-$módulos inescindibles (véase el ejemplo 3.2 (a)). Por la observación 4.4 ítem (4), no existen morfismos no nulos llegando al $k\Gamma'-$módulo $(0 \xrightarrow{0} k)$. Por otro lado, note que $\operatorname{rad}(k \xrightarrow{1} k) = (0 \xrightarrow{0} k)$. Por tanto $(0 \xrightarrow{0} k) \hookrightarrow (k \xrightarrow{1} k)$ es un morfismo fuente en $(0 \xrightarrow{0} k)$. Del corolario 4.1 sigue entonces que

$$0 \longrightarrow (0 \xrightarrow{0} k) \overset{i}{\hookrightarrow} (k \xrightarrow{1} k) \longrightarrow \operatorname{coker}(i) \longrightarrow 0,$$

es una S.A.R. Es claro que $\operatorname{coker}(i) \cong (k \xrightarrow{0} 0)$. En esta S.A.R. aparecen todos los $k\Gamma'-$módulos inescindibles. Afirmammos que $\Gamma_{k\Gamma'}$, el carcaj de Auslander–Reiten de $k\Gamma'$, está dado por

$$[0 \xrightarrow{0} k] \longrightarrow [k \xrightarrow{1} k] \longrightarrow [k \xrightarrow{0} 0], \quad \text{o simplemente por} \quad \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet.$$

En realidad, necesitamos ver que no existen otras flechas en el carcaj anterior. Ya vimos que no existen flechas llegando en $[0 \xrightarrow{0} k]$ y de forma análoga se muestra que no existen flechas saliendo de $[k \xrightarrow{0} 0]$ ya que es inyectivo simple (véase la observación 4.4 ítem (4)). Por otro lado note que $Hom_{k\Gamma}(0 \xrightarrow{0} k, k \xrightarrow{0} 0)$, $Hom_{k\Gamma}(k \xrightarrow{1} k, 0 \xrightarrow{0} k)$ y $Hom_{k\Gamma}(k \xrightarrow{0} 0, k \xrightarrow{1} k)$ son iguales a cero y por tanto no pueden existir otras flechas además de las indicadas.

(2) Sea (Γ, ρ) dada por $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ com $\beta\alpha = 0$.

Dejamos al lector verificar que

$$\begin{tikzcd}
 & 011 \arrow[dr] & & & \\
001 \arrow[ur] & & 010 \arrow[dr] & & 100 \\
 & & & 110 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

es el carcaj de Auslander–Reiten de $k\Gamma/ < \rho >$, donde 011, 001, 010, 100 y 110 denotan respectivamente las representaciones dadas por $[0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k]$, $[0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k]$, $[0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0]$, $[k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0]$ y $[k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0]$.

Se termina este trabajo enunciando de manera informal el teorema de clasificación de las álgebras hereditarias de P. Gabriel. La demostración y su formalización se escapan de los objetivos de estas notas, pero todos los detalles al respecto pueden ser encontrados en [16], [17], [2], [8] y [11].

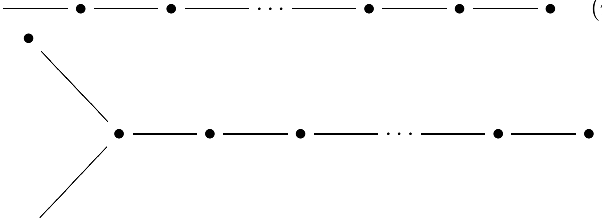
Un álgebra A, se dice **hereditaria izquierda** (resp., **hereditaria derecha**) si todos sus ideales izquierdos (resp., ideales derechos) son proyectivos. Diremos simplemente que A es álgebra hereditaria, para referirnos a A como álgebra hereditraia izquierda. Es bien conocido que en un álgebra hereditaria A, todo $A-$submódulo de un proyectivo es también proyectivo.

Del teorema de Gabriel 2.1 se tiene que dada un álgebra A inescindible, básica, hereditaria y de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k, entonces $A \cong k\Gamma_A$ como álgebras, donde su carcaj ordinario Γ_A es acíclico. El recíproco también es cierto, es decir, si tomamos un carcaj Γ finito, conexo y acíclicio entonces el álgebra $A = k\Gamma$ es hereditraia y $\Gamma_A = \Gamma$. Los prueba de lo anterior pueder ser encontrada en [2] (Capítulo VII, teorema 1.7).

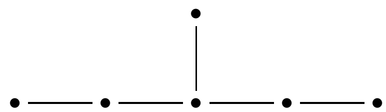
Teorema 4.2. *Sean A un álgebra inescindible, básica, hereditaria y de dimensión finita sobre un campo algebraicamente cerrado k, Γ_A su carcaj ordinario ($A = k\Gamma_A$), $\overline{\Gamma}_A$ el carcaj subyacente de Γ_A y n el número de vértices. Entonces valen las siguientes afirmaciones.*

(1) A es de tipo finito si y sólo si el carcaj subyacente $\overline{\Gamma}_A$ es uno de los siguientes **diagramas de Dynkin**.

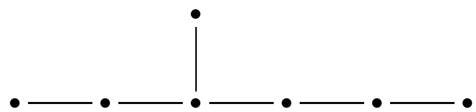
$\mathbb{A}_n$: $(n \geq 1)$.

$\mathbb{D}_n$:  $(n \geq 4)$.

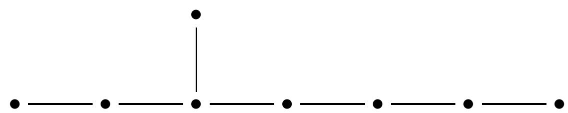
$\mathbb{E}_6$:



$\mathbb{E}_7$:

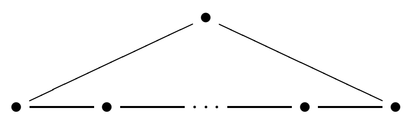


$\mathbb{E}_8$:



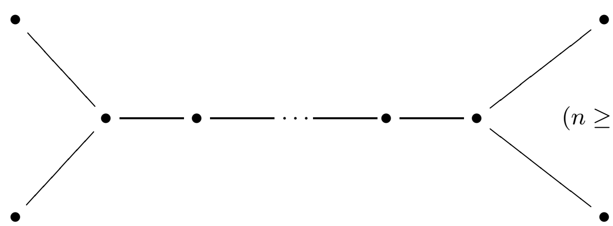
(2) A es de tipo manso si y sólo si el carcaj subyacente $\overline{\Gamma}_A$ es uno de los siguientes **diagramas de Dynkin extendidos** o **euclidianos**.

$\widetilde{\mathbb{A}}_n$:



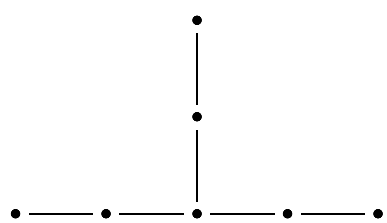
$(n \geq 2)$.

$\widetilde{\mathbb{D}}_n$:

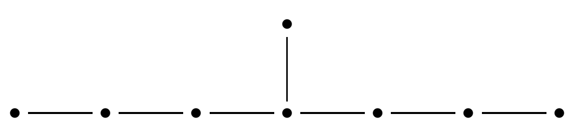


$(n \geq 4)$.

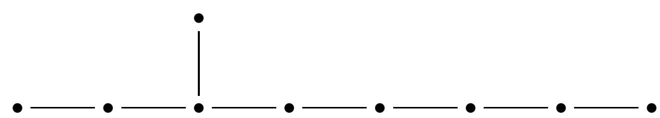
$\widetilde{\mathbb{E}}_6$:



$\widetilde{\mathbb{E}}_7$:



$\widetilde{\mathbb{E}}_8$



(3) A es de tipo salvaje si y sólo si el carcaj subyacente $\overline{\Gamma}_A$ no es niguno de los diagramas de los ítems (1) y (2).

Agradecimientos. Deseo expresar mis agradecimientos a los evaluadores por sus observaciones y sugerencias, las cuales permitieron mejorar mucho este trabajo. Igual, agradecer a mi apreciado colega, el profesor Gilberto García Pulgarín, por la lectura y correcciones sugeridas.

Referencias

[1] Anderson, F. W. & Fuller, K. R. *Rings and Categories of Modules.* Graduate Texts in Mathematics 13. Berlin: Springer–Verlag, 1973 (new edition: 1991).

[2] Assem, I., Simson, D. & Skowroński, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, 2006.

[3] Auslander, M. & Reiten, I. *Representation theory of Artin algebras II, III, IV, V, VI*, Comm. in Algebra **1** (1975), 269–310; **3** (1975), 239–294; **5** (1977), 443-518; **5** (1977), 519–554;**6** (1978) 257–300.

[4] Auslander, M., Reiten, I. & Smalø, S. *Representation Theory of Artin Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[5] Bautista, R. *On algebras of strongly unbounded representation type.* Comment. Math. Helvetici **60** (1985), 392–399.

[6] Bautista, R., Gabriel, P., Roiter, A. V. & Salmerón, L. *Representation–finite algebras and multiplicative bases.* Invent. Math. **81** (1985), 217–285.

[7] Benson, D. J. *Representation and Cohomology. I & II.* Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[8] Bernstein, I. N., Gelfand, I. M. & Ponomarev, V. A. *Coxeter functors and Gabriel's Theorem.* Uspiehi Mat. Nauk **28** (1973), 19–33 (en ruso).
- English translation in Russian Math. Surveys. **28** (1973), 17–32.

[9] Cañadas, A. M. *The School of Kiev in Colombia; the legacy of Alexander Zavadskij*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences **7** (1) (2013), 105–126.

[10] Cibils, C., Larrión, F. Salmerón, L. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones.* UNAM: México, 1982.

[11] Curtis, C. W., and Reiner, I. *Methods of Representation Theory I & II.* New York: John Wiley & Sons, 1990.

[12] Coelho, F. *Uma introdução à teoría de representações de álgebras.* São Paulo: XII Escola de Älgebra, 1992 (en portugués).

[13] Drozd, Y. *Tame and wild matrix problems.* Kiev: 1979 (en ruso).
- Lecture Notes in Mathematics 832. Berlin: Springer–Verlag, 1980, 242–258.

[14] Jacobson, N. *Basic Algebra*, N. H. Freeman & Company, 2^a ed (1985).

[15] Jones, A. R. & Merklen, H. *Representaçoes de álgebras: métodos diagramaticos.* São Paulo: Publicaçoes do IME-USP, 1984.

[16] Gabriel, P. *Unzerlegbare Dartellungen I*, Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103.

[17] Gabriel, P. *Indecomposable representations II.* Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat. **11** (1973), 81–104.

[18] Gabriel, P. *Auslander–Reiten sequences and representation-finite algebras.* Proc. ICRA II (Ottawa, Canada 1979). Lecture Notes in Math. **831** (1980), 1–71.

[19] Gustafson, W. H. *The history of algebras and their representations.* Proc. ICRA III (Puebla, Mexico 1980). Lecture Notes in Math. **944** (1982), 1–28.

[20] Nazarova, L. A. & Roiter, A. V. *Kategorielle Matrizen-Probleme und die Brauer–Thrall–Vermutung.* Int. Math. Acad. Sci. Kiev, 1973.
  - English translation *Categorical matrix problems and the Brauer–Thrall conjeture.* Mitt. Math. Sem. Giessen **115** (1975), 1–153.

[21] Reiten, I. *The use of almost sequences in the representation theory of Artin algebras*, Proc. ICRA III, Puebla 1980. Lec. Notes in Math. **944** (1982), 29–104.

[22] Reiten, I. *An introduction to the representation of Artin algebras*, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 209–223.

[23] Ringel, C. M. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms* Lec. Notes in Math. **1099** (1984).

[24] Roiter, A. V. *The unboundedness of the dimension of the indecomposable representation of algebras that have an infinite number of indecomposable representations.* Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **32** (1968), 1275–1282 (in Russian).

[25] Roiter, A. V. *A generalization of a theorem of Bongartz*, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat. Preprint **17** (1981) (en ruso).

Recibido en junio de 2014. Aceptado para publicación en mayo de 2015

Hernán Giraldo
Instituto de Matemáticas
Universidad de Antioquia
Calle 67 No. 53–108, Medellín, Colombia
e-mail: hernan.giraldo@udea.edu.co