Lecturas Matemáticas
Volumen **36** *(2) (2015), páginas 197-229*
ISSN 0120–1980

El estudio de estructuras geométricas mediante espacios de moduli

The study of geometric structures via moduli spaces

Álvaro Antón Sancho
Universidad Católica de Ávila, Valladolid, España

Resumen. En este trabajo hacemos un estudio de la evolución de la geometría de curvas y superficies desde la época griega clásica hasta la actualidad. En particular, situaremos históricamente la noción de Riemann de espacio de moduli, explicando los elementos de continuidad con la tradición geométrica anterior y también la novedad esencial que plantea y su influencia en la geometría actual.

Key words and phrases. Moduli spaces, conics, curves and surfaces, Riemann surface, geometric invariant.

Abstract. In this paper we study the evolution of geometry of curves and surfaces from classical Greek times to the today. In particular, we situate historically Riemann's notion of moduli space, explaining the elements of continuity with the previous geometric tradition and the essential novelty posed and its influence on the current geometry.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. **01A05, 01A20, 01A65, 51-03.**

1. Introducción

Los *espacios de moduli* son un objeto versátil que aparece de modo habitual en geometría cuando se abordan problemas de clasificación. En una situación genérica, disponemos de una colección de objetos vinculados a determinada estructura geométrica y una relación de equivalencia entre ellos; se trata de describir el conjunto cociente. La situación más favorable ocurre cuando esa familia de objetos se relacionan según un cierto concepto de continuidad, lo cual se refleja en que el conjunto cociente hereda una estructura geométrica. El conocimiento de la geometría de este espacio de moduli permite profundizar, entonces, en el estudio de los objetos de los que partimos ([31]).

El término *moduli* fue utilizado por primera vez por Bernhard Riemann en un memorable trabajo de 1857 sobre *funciones abelianas* [27] en el que conjeturó que el espacio de clases de equivalencia de superficies de Riemann de género $g \geq 2$ dado tiene dimensión $3g - 3$. Con la expresión *moduli*, Riemann quería significar el conjunto mínimo de parámetros necesarios para describir la colección de objetos en cuestión. La introducción de este concepto supuso un cambio de paradigma en la forma de abordar el estudio de la geometría que, en coalición con la recientemente nacida *geometría diferencial*, iba a determinar la manera contemporánea de hacer geometría.

Desde Riemann, los espacios de moduli han sido estudiados en geometría de manera creciente y vinculados a estructuras geométricas muy variadas. De manera cada vez más intensa desde que aparecieron las primeras estructuras de *fibrados vectoriales* asociados a curvas de distintos géneros ([15], [6], [23]), los *fibrados principales* y las primeras nociones de *estabilidad de fibrados* que permitieron construir de modo efectivo los espacios de moduli ([25]) y los *espacios de moduli de pares*, que están relacionados de modo natural con espacios de soluciones de ecuaciones de la física teórica ([18]). La aparición en los años 60 del siglo XX de la Teoría Geométrica de Invariantes (GIT) de la mano de Mumford ([22]) permitió dar a los espacios de moduli una formalización adecuada en que esta nueva teoría de moduli pudiera crecer y desarrollarse.

La introducción de los espacios de moduli supuso, como decimos, una revolución en el campo de la geometría, pero que no deja de estar entroncada con la tradición del estudio geométrico de las curvas desde la época helena. En este trabajo, describiremos algunos de los componentes fundamentales de la geometría griega, estudiaremos las cuestiones esenciales que conciernen a la geometría diferencial clásica y la introducción de los espacios de moduli y analizaremos la continuidad, dentro de la novedad, de la geometría de moduli respecto de la geometría helena. Nos centraremos en los casos concretos del estudio de las *cónicas* que hace Apolonio y el primer espacio de moduli desarrollado, el de *superficies de Riemann de género g*. Descubriremos que en Apolonio ya se da una dinámica de identificación de *invariantes geométricos* y posterior clasificación, propios de la geometría de moduli, pero veremos que con el descubrimiento de las *estructuras complejas*, esta identificación de invariantes deja de ser suficiente para el estudio de la geometría, razón por la que los espacios de moduli suponen, dentro de la continuidad, una novedad esencial en la forma de abordar la geometría.

Hemos estructurado el trabajo en seis secciones. En las dos primeras explicamos las cuestiones fundamentales de geometría griega clásica objeto de nuestro interés y particularizamos el estudio al caso de Apolonio y su descripción de las cónicas. En la tercera sección explicaremos los cambios de perspectiva que experimenta la geometría con la entrada en escena del *cálculo diferencial*. Éstos tienen que ver, sobre todo, con una generalización de los objetos de estudio y un enriquecimiento de las técnicas. Las secciones cuarta y quinta están dedicadas a Riemann, el desarrollo de la geometría compleja, su entroncamiento con la perspectiva clásica y la novedad de los espacios de moduli. Finalmente, en la última sección daremos cuenta brevemente de la manera en que esta nueva teoría de moduli ha influido en el desarrollo posterior de la geometría.

2. El nacimiento de la geometría helena

Como sabemos sobradamente, Egipto o Mesopotamia fueron lugares en donde los primeros desarrollos de la aritmética y la geometría métrica tuvieron lugar antes de la irrupción de los griegos en el escenario cultural y científico. La época helena (así se conoce el periodo de hegemonía intelectual griego en la cuenca del Mediterráneo inaugurado en torno al siglo IX a.C.) ve nacer, en paralelo con otras áreas del conocimiento, los cimientos de la geometría tal como la hemos heredado en nuestra cultura occidental. Los protagonistas principales de este nacimiento son Pitágoras de Samos y Tales de Mileto. De ninguno de ellos se conservan obras matemáticas y ambos aparecen envueltos en una cierta penumbra histórica, pero la tradición persistente que hemos recibido permite asegurar que de su mano llegaron las primeras formulaciones geométricas precisas que permiten darles el título de padres de la organización deductiva de la geometría.

Tales aportó los primeros resultados geométricos formulados de manera rigurosa y de validez universal. La mayoría de estos resultados pueden leerse como un intento de abordar exhaustivamente la geometría del triángulo:

1. Si en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, el triángulo que forma esta recta con los otros dos lados es semejante al triángulo inicial.
2. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos coinciden respectivamente con dos ángulos y el lado correspondiente del otro, entonces los triángulos son congruentes.
3. En un triángulo cuya base es el diámetro de una circunferencia en la cual el triángulo se halla inscrito, el ángulo opuesto a esa base es recto.
4. Los ángulos básicos en un triángulo isósceles son iguales.

Podemos conocer estos datos a partir de la información que aporta Eudemo, discípulo de Aristóteles, en su historia de la matemática, obra que no se conserva, pero que testimonia el neoplatónico Proclo en su *Comentario sobre el primer libro de los Elementos de Euclides* del siglo V d.C. En esta obra se sitúa a Tales en el origen de una nueva geometría de carácter abstracto cuyo método deductivo caló en sus sucesores, hasta el punto de ser definitivo en la obra magna de recopilación del saber geométrico de Euclides en los *Elementos* ([33]).

La figura de PITÁGORAS está en cierto sentido más empañada por la oscuridad debido al misticismo que envuelve la famosa escuela pitagórica. El desarrollo en el pensamiento geométrico que protagonizó estuvo mezclado con afirmaciones sobre la purificación del alma y con exigencias estoicas sobre el régimen de vida. Pero no eran conocimientos independientes. La mística pitagórica tuvo un firme arraigo filosófico y su filosofía estuvo caracterizada fundamentalmente por una hipótesis, que sirvió de guía para su pensamiento y su visión de las matemáticas: la de que la esencia de todas las cosas radica en el número y sus relaciones ([4]).

En el contexto de esta hipótesis pitagórica se entiende mucho mejor la reflexión que muchos siglos después haría KEPLER a propósito del saber geométrico: "La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en extrema y media razón". KEPLER alude a dos de los principales estudios de los pitagóricos en geometría: la profundización en la geometría del triángulo que supuso el descubrimiento del teorema llamado de Pitágoras y el desarrollo de la teoría de proporciones geométricas (a partir principalmente del estudio del pentagrama pitagórico) concretado en el estudio de la *sección áurea*.

La sección áurea, o división de un segmento en extrema y media razón, consiste en la división de un segmento de longitud a en dos segmentos de longitudes x y $a-x$ (suponemos que $x > a-x$), de tal manera que los segmentos de longitudes a y x están en la misma proporción que los segmentos de longitudes x y $a-x$, es decir,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}. \tag{2.1}$$

El estudio pitagórico de la proporción numérica está indisolublemente ligado a la música y la cosmología ([14]). La proporción está presente en las relaciones aritméticas de la escala musical, que DIÓGENES LAERCIO atribuye a PITÁGORAS a partir del descubrimiento del monocordio (un instrumento de una sola cuerda). La observación, testimoniada por ARISTÓTELES en su *Metafísica*, de que la armonía musical se resuelve en términos de proporción numérica afianzó la hipótesis pitagórica de la presencia del número en la esencia misma de la naturaleza. Pero esas mismas proporciones habían sido establecidas por PITÁGORAS para explicar las distancias entre las órbitas del sol, de la luna y de la esfera de estrellas fijas ([28, III, 155]), de modo que las relaciones propias de la cosmología coinciden con las de la escala musical, que es la proporción numérica que estudia la geometría.

En consecuencia, la matemática helena cursa con unos avances en los fundamentos de la geometría que van a determinar para siempre los intereses y el método propio de esta ciencia:

1. Es una ciencia basada en la razón silogística. Con posterioridad a la geometría helena, es ARISTÓTELES en la *Lógica* (siglo IV a.C.) quien describe los recursos esenciales de este uso de la razón específico de la

matemática y finalmente es Euclides en los *Elementos* quien sistematiza según la corrección de la razón lógica el conocimiento geométrico de su época.

2. Se trata de un estudio abstracto. Hay una superación del conocimiento matemático prehelénico, absolutamente ligado a los objetos concretos ([33]), para llevar a cabo afirmaciones sobre objetos abstractos, por tanto de validez universal.

3. Los objetos son abstractos, pero ligados en su origen a la realidad natural, en virtud de la hipótesis pitagórica que ve los objetos de la geometría en la esencia más íntima de la naturaleza.

4. Hay una conexión entre la geometría, la aritmética y el álgebra, aunque en la época aún no hay un corpus algebraico como tal. El problema de la sección áurea, por ejemplo, es de naturaleza geométrica con una clara formulación algebraica. En efecto, de (2.1) llegamos a que el problema geométrico de la división de un segmento en media y extrema razón equivale a la resolución de la ecuación cuadrática

$$x^2 = a^2 - ax.$$

Este es el estado de la geometría en los albores de lo que se ha dado en llamar la *época heroica de la civilización griega* (a partir del siglo V a.C.). Se trata de un momento de enorme riqueza, en particular en el campo de las matemáticas. No es nuestro objetivo dar una descripción extensa al respecto, pero sí conviene situar algunos avances significativos de la geometría para confirmar que el análisis que hemos descrito antes está avalado por la historia ([7]). Entre ellos: los tres problemas clásicos (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo); el estudio de los inconmensurables, que habían aparecido en la época pitagórica (con la diagonal del triángulo rectángulo isósceles, $\sqrt{2}$, o la sección áurea, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$), sobre todo con Eudoxo de Cnido; las primeras paradojas del razonamiento deductivo, que encarnó Zenón; el desarrollo incipiente del álgebra a través, sobre todo, de las ecuaciones diofánticas, entre otros.

Junto a estos hitos hay que señalar la ya citada publicación de los *Elementos*, en donde se recoge el saber del momento en geometría plana, proporciones y cuerpos sólidos, y la figura de Arquímedes, que profundizó de modo singular en diversos aspectos de la geometría plana y tridimensional y en la aplicación de la geometría para el estudio de la física.

Con el fin de ilustrar un trabajo geométrico completo correspondiente a esta época de madurez de la geometría, vamos a centrarnos en el estudio de Apolonio de las curvas cónicas.

3. Apolonio y la cuestión de la clasificación de las cónicas

Apolonio, llamado de Perga, nació en esta ciudad de Pamfilia, en Asia Menor, en torno al año 262 a.C. y vivió entre Pérgamo y Alejandría hasta su muerte, en 190 a.C., aproximadamente. Más joven que Arquímedes, mantuvo con él, según explican los historiadores de la matemática ([7]) una velada rivalidad, lo que suscitó una nutrida producción matemática que hizo digno a Apolonio del sobrenombre de "El gran geómetra".

El grueso de la obra geométrica de Apolonio se ha perdido, pero conservamos alusiones en la *Colección Matemática* de Pappus y en las diversas reconstrucciones de obras griegas llevadas a cabo durante el siglo XVII, llamado de la nueva ciencia de Galileo, Descartes y Newton, que vio nacer el pensamiento mecanicista y que condujo a un renovado interés por la ciencia griega ([3]). Gracias a estos testimonios, conocemos, a través de diversos títulos, los diferentes intereses de Apolonio en geometría:

1. El problema de la proporción, al que dedica sus *Secciones en una razón dada*, *Secciones en un área dada* y *Secciones determinadas*, donde estudia diversidad de casos de un mismo problema: la construcción de una determinada figura cuya longitud o área esté en una cierta proporción con otra magnitud dada de la misma naturaleza. Por ejemplo, dadas dos rectas y un punto sobre cada una de ellas, trazar por un tercer punto una recta que corte a las anteriores en segmentos (medidos desde los respectivos puntos dados) que estén en una razón dada. O bien, en la misma situación, que los segmentos formados formen un rectángulo equivalente a otro. Estos problemas equivalen a la resolución de ecuaciones cuadráticas y constituyen un verdadero ejercicio de geometría analítica incipiente.

2. El estudio de figuras geométricas a partir de la aproximación que brota de sus tangentes. La tangencia o contacto para curvas es introducida por Apolonio en el libro de las *Tangencias* y es aprovechada para el estudio de las curvas cónicas, que es el objeto de nuestro interés.

3. La caracterización de ciertas figuras geométricas como lugares geométricos, que lleva a cabo, entre otros títulos, en sus *Lugares planos*.

De entre su abundante producción científica, casi por entero perdida como decimos, hay una obra que sustancialmente hemos conservado: el tratado sobre las *Cónicas*. Conservamos la primera mitad de esta obra, los cuatro primeros libros, en su original griego y el matemático árabe Thabit ibn Qurra tradujo los tres siguientes al árabe, traducción que nos ha llegado. El octavo y último libro se ha perdido. Fue Halley quien en 1710 publicó los siete libros de las *Cónicas* en una traducción latina, lo que dio origen a su traducción a diversas lenguas modernas.

Las *curvas cónicas* eran parcialmente conocidas cuando Apolonio compuso su memorable tratado y, de hecho, al menos Aristeo y Euclides escribieron sendos tratados generales sobre el tema. Pero del mismo modo que los *Elementos* de Euclides se impuso en su momento a todos los textos elementales anteriores, así también las *Cónicas* eclipsó todo otro tratado por ser sin duda la obra más exhaustiva y completa en su género, sirviendo de inspiración para los geómetras posteriores ([17]).

Con anterioridad a Apolonio, las curvas cónicas (*elipse*, *hipérbola* y *parábola*) eran obtenidas como secciones de tres tipos distintos de conos rectos por medio de un plano perpendicular a una *generatriz*. El mérito de Apolonio está en demostrar que no es necesario considerar tales planos, sino que de un cono único pueden obtenerse todas las curvas cónicas como secciones de ese cono sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono. Este es un paso muy importante porque permite unificar los tres tipos de curvas, identificando, además, un invariante geométrico (ligado al ángulo de inclinación del plano secante, fijado el ángulo del cono) que determina la clase de curva. Además, Apolonio demostró que el cono no necesita ser recto, sino que puede ser oblicuo o escaleno y de cualquier ángulo. Apolonio ha llevado a cabo, por tanto, un procedimiento que se convertirá en perenne en la geometría: el conocimiento de los objetos geométricos mediante la identificación de invariantes y la clasificación según los mismos.

Con su sistema de estudio de las secciones cónicas, Apolonio concluyó que la parábola goza de la propiedad característica de que para cualquier punto de la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada tiene la misma área que el rectángulo construido sobre su abscisa y con altura un parámetro fijo, l. Es el modo geométrico típicamente griego, a través del estudio de la proporción, de expresar la ecuación analítica de la parábola,

$$y^2 = lx.$$

La ecuación está expresada con vértice en el origen y eje en el eje de abscisas. Las ecuaciones de la elipse y la hipérbola tienen expresiones análogas, dependientes ahora de parámetros a y b, que dependen de la excentricidad:

$$y^2 = lx \mp \frac{b^2x^2}{a^2}.$$

El parámetro l depende ahora de a y b, $l = \frac{2b^2}{a}$. Es decir, los puntos de la elipse verifican que el área del cuadrado sobre la ordenada es menor que el área del rectángulo con base en la abscisa y altura l, $y^2 < lx$, mientras que los puntos de la hipérbola verifican que el área del cuadrado sobre la ordenada es mayor que el área del rectángulo con base en la abscisa y altura l, $y^2 > lx$. Esta propiedad geométrica estudiada por Apolonio es la que justifica los nombres con que nuestro autor bautizó las diferentes curvas: *ellipsis*, que hace referencia a una ausencia, *hyperbola*, que indica un exceso, y *parábola*, que expresa rectitud, ni exceso ni defecto.

La recopilación de todos estos datos permite reconstruir la ecuación que, veladamente por el lenguaje geométrico griego, obtuvo Apolonio para una sección cónica. Es la siguiente:

$$y^2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta^2}\left(cx\sin\beta - x^2\sin(\alpha+\beta)\right),$$

donde α es el ángulo del cono y β indica la inclinación del plano incidente respecto de la generatriz del cono.

Obtenemos los siguientes casos, en función de la inclinación β:

- Si $\alpha+\beta=\pi$, entonces tenemos la ecuación $y^2 = 4cx\sin\frac{1}{2}\beta^2$, por lo que se trata de una parábola con $l = 4c\sin\frac{1}{2}\beta^2$.

- Si $\alpha+\beta<\pi$, tenemos que $\sin(\alpha+\beta)>0$, por lo que se trata de una elipse.

- Si $\alpha+\beta>\pi$, entonces $\sin(\alpha+\beta)<0$ y estamos ante una hipérbola.

Por tanto, para la sección cónica C estudiada, hemos encontrado un invariante geométrico, $i(C)$, que es el siguiente:

$$i(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta=\pi \\ \frac{\alpha+\beta-\pi}{|\alpha+\beta-\pi|} & \text{si } \alpha+\beta\neq\pi \end{cases}$$

Nuestro invariante vale $i(C)=0$ en el caso de la parábola, toma el valor $i(C)=-1$ cuando C es una elipse y el valor $i(C)=1$ en el caso de la hipérbola. Se trata, por tanto, de un *invariante afín*, porque identifica lo que hoy sabemos que son las tres *cónicas afines* posibles. Igualmente, el invariante

$$i_P(C) = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha+\beta=\pi \\ 1 \text{ si } \alpha+\beta\neq\pi \end{cases}$$

es un *invariante proyectivo*, porque identifica las dos posibles *cónicas proyectivas*.

Apolonio hizo un estudio intenso de las propiedades métricas de las cónicas, de sus elementos notables (*vértices* y *ejes*) y sus *tangentes* ([8]). En particular, se dio cuenta de que como consecuencia de su teoría unificada sobre cónicas, había dado un criterio de clasificación en tres familias. En el Libro VI de las *Cónicas*, Apolonio define *cónicas semejantes* como aquellas tales que las ordenadas trazadas al eje a distancias al vértice que sean proporcionales son a su vez proporcionales a las correspondientes abscisas. Con esta noción, extensión inmediata de la que conocían para polígonos, especialmente triángulos, desde Tales, Apolonio probó que todas las parábolas son semejantes entre sí y desemejantes a cualquier elipse o hipérbola y análogamente con la elipse y la hipérbola. Es decir, comprobó que el conjunto de las cónicas (afines) se divide exactamente en las clases de equivalencia que vienen indicadas por el invariante afín i, invariante que sirve para su clasificación.

4. La Geometría Diferencial: curvas y superficies en la era del Cálculo

En el periodo clásico, la geometría de curvas abarcaba las líneas rectas y poligonales, las circunferencias y sus arcos y las curvas cónicas. En cuanto a superficies, únicamente encontramos testimoniados estudios sobre planos, superficies de poliedros, esferas, conos y cilindros. Les es ajeno el estudio de curvas o superficies arbitrarias. No obstante, tal estudio resulta natural y necesario, pues en toda actividad práctica y experiencia de la naturaleza encontramos curvas y superficies de muy diferentes formas: la trayectoria de un planeta en el espacio, de una rueda en movimiento o de un proyectil que se dispara; la forma de las levas de un motor, de la catenaria en un tendido eléctrico o de un muelle más o menos estirado; la superficie de una barra, de una cáscara o de un moderno edificio. La profundización en el estudio de la naturaleza y el desarrollo de la técnica dependen en muchos sentidos de un conocimiento profundo sobre curvas y superficies.

El desarrollo del *cálculo infinitesimal* supuso a partir del siglo XVII una importante fuente de interés por diversas curvas y superficies, además de una herramienta crucial para ampliar su estudio y profundizar en las ya conocidas ([2]). Es la época de la *geometría diferencial*. Su herramienta básica es el *cálculo diferencial* y estudia las propiedades locales de curvas y superficies, que son aquellas a que se restringe el método. Esto se puede llevar a cabo a través de la noción de *carta local*, que introduciremos más adelante. Sólo en una etapa más avanzada, cuando los avances de la *geometría algebraica* del siglo XX permita dar una definición de *variedad* como un objeto globalmente definido (un *haz de funciones algebraicas*), se puede hacer *geometría global*.

Es importante observar en primer lugar que los conceptos básicos del cálculo diferencial tienen un significado geométrico. Desde que Descartes comenzara a representar las figuras geométricas mediante funciones, el vínculo del análisis con la geometría resulta claro: a una función de una variable f le corresponde una curva $y = f(x)$ y a una función de dos variables le corresponde una superficie $z = f(x, y)$. Pues bien, en el caso de curvas expresadas en paramétricas, derivar una función $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ equivale a obtener la pendiente de la recta tangente de la curva $y = f(x)$. Análogamente, dada una función suficientemente regular $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ésta induce una superficie en $\mathbb{R}^3$ a través de su grafo $\{(x, y, F(x, y))\}$. El plano tangente a tal superficie en el punto $(x, y, F(x, y))$ es el generado por los vectores $\left(1, 0, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right)$ y $\left(0, 1, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right)$.

Nos centraremos en primer lugar en el caso de las curvas. Estamos acostumbrados, de la *geometría analítica*, a definir curvas reales planas mediante expresiones del tipo $F(x, y) = 0$, que se realizan localmente vía el *teorema de la función implícita* como $y = f(x)$. Para nuestros propósitos, es más sencillo trabajar con la forma paramétrica de dar una curva. Una *parametrización (local)* de una curva plana es una aplicación diferenciable $(x, y) : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que establece una biyección continua con su imagen, que a su vez está contenida en la curva. Siempre es posible definir una parametrización local en torno a cada punto de la curva. Cuando la curva es compacta, es posible definir una parametrización $[a,b] \to \mathbb{R}^2$ que parametriza toda la curva. En función del parámetro $t \in (a,b)$, la curva plana se expresaría como $(x(t), y(t))$. Cuando dicha parametrización verifica que $\|(x', y')\| = 1$, decimos que la curva está parametrizada por la longitud de arco. Toda curva acepta una parametrización de este tipo, en la que la longitud del arco coincide con la del correspondiente segmento del intervalo de parametrización. Si la curva es espacial (en ocasiones es necesario considerar curvas que no son planas, por ejemplo la *hélice*), tenemos definiciones análogas de parametrización $(x(t), y(t), z(t))$.

Si interpretamos el parámetro t como el tiempo, la expresión $(x(t), y(t), z(t))$ indica la posición de una partícula en movimiento cuya trayectoria viene dada por el *vector tangente* a la curva en cada punto, $(x'(t), y'(t), z'(t))$. El parámetro puede tener, naturalmente, otros significados. En geometría, la elección más natural del parámetro es la *longitud del arco* de la curva medido a partir de un determinado punto. Toda curva es parametrizable por la longitud de arco, lo que significa que puede ser recorrida con rapidez constante.

Cuando las curvas son definidas localmente por funciones paramétricas y estas funciones tienen un cierto grado de regularidad, pueden definirse los elementos básicos del estudio geométrico-diferencial: longitud de la curva, *vectores tangente, normal y conormal* (*triedro de Frenet*, para curvas espaciales) y *curvatura*. Estos elementos de regularidad son los siguientes: en el caso de curvas planas en paramétricas, $f : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ basta exigir que f sea continuamente diferenciable y que df sea inyectiva. En caso de *curvas alabeadas*, basta exigir lo mismo para su expresión en paramétricas, $f : (a,b) \to \mathbb{R}^3$.

Fijémonos en una curva plana parametrizada, $(x(t), y(t))$. La longitud de la curva para los valores del parámetro en un intervalo $[a,b]$ puede calcularse como el límite de la longitud de las poligonales inscritas en ella cuando los vértices se acercan cada vez más entre ellos. Dada una partición finita $\{t_n\}$ de $[a,b]$, ésta identifica una línea poligonal con vértices $(x_n = x(t_n), y_n = y(t_n))$. La longitud de esta línea es

$$\sum_n \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} = \sum_n \sqrt{\left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta t_n}\right)^2} \Delta t_n$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$, tenemos que la longitud s de la curva se calcula según la famosa fórmula

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_n \sqrt{\left(\frac{\Delta x_n}{\Delta t_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta t_n}\right)^2} \Delta t_n = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

La tangente a la curva en un determinado punto $(x(t), y(t))$ es la recta que pasa por ese punto y tiene *vector director* $(x'(t), y'(t))$. Goza de la propiedad geométrica de ser la recta de la que la curva se desvía menos cerca del punto de tangencia. Además, es interesante observar que la tangente define una dirección en cada punto para una curva que a priori no tiene definida dirección alguna.

Pero nos interesa particularmente la descripción cuantitativa de la curvatura de la curva en cada punto. La intuición física que nos permite darnos cuenta de que en un punto hay una mayor curvatura que en otro se expresa matemáticamente como la velocidad en cada punto con que cambia la dirección de la curva. Supongamos que una curva plana está parametrizada con una parametrización $(x(t), y(t))$. Tomemos un punto, $(x(t_0), y(t_0))$, del que queremos calcular la curvatura, y otro punto $(x(t_1), y(t_1))$. El ángulo que forman sus tangentes es $\Delta\phi$ y la longitud del segmento de curva entre esos puntos es Δs. Podemos definir la *curvatura* como

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s}.$$

Es claro que

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta\phi}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} = \frac{\phi'(t)}{s'(t)}.$$

Ahora, sabemos que $\operatorname{tg}\phi(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, luego $\phi' = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}$. Por otra parte, según hemos visto, $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. En consecuencia,

$$k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Si la curva está parametrizada por la longitud de arco, entonces es claro que $k = y''x' - x''y'$.

La introducción de la curvatura de una curva tuvo una importante repercusión en la resolución de problemas de la física newtoniana, por ejemplo, en la determinación de la aceleración instantánea. Dada una partícula que se mueve en un plano a lo largo de una curva con velocidad v y aceleración a, tenemos que, para cada valor de t,

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t) - v(t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{v(t) - v(t + \Delta t)}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Se puede probar que $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{v(t) - v(t+\Delta t)}{\Delta s} = v(t)k(t)$. Si llamamos a_N a la componente normal del vector aceleración, es claro que $a_N = kv^2$. Observamos también que la curvatura, que refleja el cambio de dirección del movimiento de la partícula, está relacionada con la fuerza que origina ese movimiento. Multiplicando en la expresión anterior por la masa de la partícula, m, vemos que la componente normal, F_N, de la fuerza F es $F_N = ma_N = mv^2k$.

En el caso en que la curva sea una circunferencia, la curvatura es constante y vale $1/r$ en cada punto, donde r es el radio de la circunferencia. De ahí que, en el caso de una partícula que se mueve con movimiento circular, la aceleración normal responde a la conocida fórmula $a_N = v^2/r$. Para una curva plana cualquiera, la curvatura se puede interpretar geométricamente como $1/r$ donde

r es el radio de la circunferencia que mejor aproxima a la curva en el punto en cuestión.

Esta breve descripción puede adaptarse al caso de curvas que no están contenidas en un plano, las llamadas *curvas alabeadas*. En este caso es posible, además, asociar a cada punto de la curva un plano definido por la propiedad de ser el más próximo a la curva, en un pequeño entorno de la misma. Este plano se llama *plano osculador* de la curva en el punto en cuestión y cumple dos propiedades fundamentales: contiene a la recta tangente a la curva en el punto en cuestión (es tangente a la curva, en ese sentido) y es ortogonal al plano normal de la curva en ese punto, que se define como el plano perpendicular a la tangente en el punto.

De la misma forma que la variación de dirección de la tangente podía medirse mediante la curvatura, así la variación en la dirección del plano osculador caracteriza un nuevo invariante, llamado *torsión* de la curva en el punto. Supongamos que tenemos fijada una parametrización de la curva, $(x(t), y(t), z(t))$. Si llamamos ψ al ángulo entre los planos osculadores de un punto del que queremos calcular la torsión, $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, y un punto cercano, entonces la torsión τ en el punto en cuestión se define como el límite

$$\tau(t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi}{\Delta s}.$$

Haciendo uso de la teoría de *ecuaciones diferenciales ordinarias* se puede demostrar que las funciones curvatura y torsión determinan completamente la curva salvo su posición en el espacio. En otras palabras, el cálculo diferencial nos ha permitido identificar un invariante geométrico, el par (k, τ), para la identificación de la curva. Como vemos, la geometría moderna sigue la senda que inocentemente había marcado el mundo clásico de estudiar los objetos geométricos mediante la identificación de invariantes. Sin embargo, la potencia del cálculo imprime una riqueza en el estudio de la que carecía, por ejemplo, el realizado por Apolonio en las *Cónicas*:

- El invariante (k, τ) es un *invariante métrico*, no meramente afín, en el sentido de que (k, τ) es invariante por isometrías de $\mathbb{R}^3$, de modo que determina la curva salvo traslaciones espaciales.

- Este método de la geometría diferencial permite abarcar toda clase de curvas diferenciables del plano o del espacio, no sólo aquellas que resultan de secciones cónicas.

Desde la teoría de curvas se pudo abordar de la mano de Gauss un estudio análogo para superficies a partir de ideas clásicas griegas sobre *coordenadas curvilíneas* que se remontan a Ptolomeo ([30]) y la edificación de un aparato analítico especialmente diseñado al efecto. En su *Geografía*, Ptolomeo introdujo, ya en el siglo I, un sistema de longitudes y latitudes que aún hoy usamos como coordenada geográficas. Describió, además, varios métodos de *proyección* *cartográfica*. Estos métodos son completados con la explicación, en su *Analemma*, de la *proyección ortográfica*, que consiste en una proyección de la esfera en tres planos ortogonales entre sí, y la *proyección estereográfica*, descrita en el *Planisferio*, en la que los puntos de la esfera se proyectan sobre un plano desde uno de sus polos. Mediante esta dinámica de proyecciones planas, Ptolomeo consiguió describir diferentes maneras de introducir coordenadas curvilíneas en la superficie esférica, es decir, coordenadas tomadas sobre la misma esfera que determinan cada punto por medio de dos números (s, t) asociados al punto en cuestión a través de la proyección.

Esta forma de asociar coordenadas planas a los puntos de la superficie esférica permite definir funciones coordenadas $x, y, z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que el punto $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ está en la esfera para toda pareja (s,t). La aplicación así definida $(x, y, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ se llama *carta local* de la esfera. El nombre local hace referencia al hecho observado por Ptolomeo de que no es posible definir unas tales coordenadas de manera global para toda la superficie esférica, de modo que es necesario seleccionar una familia de subconjuntos abiertos de la misma que la recubran.

La noción de carta local, que desde Ptolomeo ha venido ligada a nuestra manera de entender geográficamente el mundo y al desarrollo de la misma geometría ([30]), es aprovechada por Gauss para otorgar coordenadas curvilíneas a una superficie cualquiera. La manera en que la idea clásica de Ptolomeo ha evolucionado hasta nuestra moderna consideración de *variedad diferenciable* es una evolución compleja cuya descripción excede las pretensiones del presente trabajo (ver [30]). No obstante, conviene señalar que en este desarrollo han jugado un papel crucial la *geometría cartesiana* del siglo XVI, que se pretendió llevar a superficies y variedades cualesquiera a través de las cartas, y el desarrollo del *cálculo infinitesimal*, que introdujo, a partir del siglo XVII una estructura nueva y potente para el estudio de la regularidad y singularidad en las superficies, y de las nociones fundamentales de la *geometría métrica* (sobre todo la curvatura). En este sentido, presentaremos sistemáticamente algunas nociones relevantes sobre teoría de superficies y nos detendremos a analizar la evolución histórica solamente de aquellos invariantes que son de nuestro interés.

Es necesario decir, en primer lugar, que es posible definir y considerar las mismas nociones topológicas que manejamos habitualmente en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ para superficies cualesquiera (*abiertos* y *cerrados*, *compacidad* y *conexión*). Dos superficies con la misma topología se dicen *homeomorfas*. En general, manejaremos *superficies encajadas* en $\mathbb{R}^n$, cuya topología es la heredada de su encajamiento en el espacio euclídeo. Todas ellas serán siempre conexas (formadas por una única pieza, inseparable por abiertos del espacio ambiente). Jugarán un papel especialmente importante en el desarrollo moderno de la teoría de superficies las superficies compactas. Su elemento distintivo fundamental y más intuitivo es que, siendo superficies en todo punto suficientemente regulares (a continuación exploraremos la noción de diferenciabilidad en superficies), son cerrados de $\mathbb{R}^3$ y son acotadas para la métrica euclídea usual de su espacio ambiente.

En una superficie M, como decimos, una *carta local* es un par (U, φ) donde U es un subconjunto abierto de M y φ es una biyección entre U y un abierto V de $\mathbb{R}^2$. La aplicación φ establece un sistema de coordenadas en los puntos de U, de modo que para dotar a M de un sistema coordenado en toda la superficie es necesario encontrar una partición de M en subconjuntos abiertos, es decir, una familia $\{U_i\}_i$ de abiertos que la recubran y una carta local para cada abierto, (U_i, φ_i). Esta familia recibe el nombre de *atlas*, lo que recuerda la vieja inspiración ptolemaica. Cuando cada una de estas cartas locales son homeomorfismos, entonces esta familia de cartas locales define una estructura de *superficie topológica*. De hecho, a partir de un atlas definido como lo hemos hecho, es posible recuperar la topología de la superficie. Gauss manejó *superficies diferenciables*, que son aquellas superficies topológicas que resultan de exigir en cada carta local una cierta noción de diferenciabilidad: que cada carta sea un homeomorfismo y que cada cambio de carta $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sea, como función entre abiertos de $\mathbb{R}^2$, biyectiva e infinitamente diferenciable (un *difeomorfismo*).

De modo análogo a como hicimos con curvas, podemos definir una *parametrización (local) de una superficie* como una aplicación diferenciable $(x, y, z) : (a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen es un abierto de la superficie y que es continua e inyectiva. La aplicación inversa de una parametrización local es una carta local.

Naturalmente, la dimensión 2 no le es esencial a la definición de carta local. Por esa razón, mediante cartas locales es posible dar una definición de *variedad diferenciable* en cualquier dimensión, n. Se trata de un espacio topológico dotado de un atlas formado por cartas (U, φ) donde $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo de U con un abierto de $\mathbb{R}^n$ de modo que los cambios de carta son difeomorfismos. A partir de la propiedad de compatibilidad de las cartas, es posible definir el espacio tangente a la variedad en cada punto y dar una adecuada noción de diferenciabilidad para funciones definidas en un abierto de la variedad, así como expresar las derivadas de tales funciones. De este modo recuperamos, para $n = 1$, la noción de curva expresada en paramétricas. Al considerar las ecuaciones paramétricas de una curva, el parámetro t está dado justamente por una carta local que, en este caso, es 1-dimensional. Dada una parametrización local $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ de una curva, la inversa de la restricción de esta parametrización a un abierto de la curva en donde la parametrización sea invertible define una carta local de la curva. Las nociones topológicas de compacidad y conexión son, así, aplicables a curvas también en el mismo sentido.

Este método de descripción de superficies mediante la generalización de la idea de coordenadas está intrínsecamente conectado al extraordinario avance que, de la mano de Gauss, supuso la introducción de la *geometría intrínseca*. La geometría intrínseca de una superficie es el conjunto de propiedades de la misma que no varían con el atlas escogido para la superficie. Dicho de otro modo, es el conjunto de propiedades que no varían si cambia la manera de encajar la superficie en su espacio euclídeo ambiente, es decir, aquellas que dependen sólo de la superficie en sí y no de su encajamiento. Es particularmente conocido e intuitivo el ejemplo de la superficie terrestre. La distorsión que consideramos cuando medimos en la superficie terrestre aproximándola por un plano forma parte de las propiedades geométricas intrínsecas de curvatura de la superficie esférica. De hecho, la idea gaussiana de estudiar la geometría intrínseca brota del estudio de problemas de geodesia y cartografía. La geometría intrínseca busca, por tanto, la noción intrínseca de variedad, que existe por sí misma, al margen de que pueda estar encajada en un espacio euclídeo, como espacio topológico recubierto por cartas.

Una superficie en el espacio puede entenderse de modo implícito como el conjunto $F^{-1}(0)$ donde F es una función real diferenciable definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$ con dF no nulo en cada punto. Sin embargo, esta representación presenta el inconveniente de que las coordenadas (x, y, z) así consideradas para cada punto varían con cada deformación de la superficie. Este inconveniente, propio de la geometría extrínseca, se corrige mediante la introducción de cartas locales. Nuevamente, aquellas superficies que cumplan los requisitos adecuados de regularidad (que estén definidas por funciones infinitamente diferenciables) pueden ser estudiadas con técnicas del cálculo diferencial.

En particular, de la misma forma que una curva regular tiene definida una recta tangente en cada punto, que está próxima a la curva en un entorno del punto, también las superficies suficientemente regulares tienen en cada punto un plano tangente por medio de cartas. Si (U, φ) es una carta local con $\varphi^{-1} = (x, y, z)$, este plano está engendrado en cada punto por los vectores

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right), \ \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right).$$

Naturalmente sólo podemos considerar el caso en que estos vectores son independientes, para que engendren así un plano. Estas serán nuestras *superficies regulares*. Estos operadores diferenciales están definidos para cada carta. Sin embargo, es sencillo comprobar que dos de estos sistemas de vectores difieren en la diferencial del cambio de carta, que es un difeomorfismo, con lo que la definición del plano tangente es independiente de la carta. Este plano, el plano tangente, verifica que contiene las direcciones de las tangentes a cualquier curva que esté contenida en la superficie y que pase por el punto en cuestión. El plano tangente verifica también que los ángulos que forman los segmentos secantes con él cuando el punto de corte del segmento se acerca al punto de tangencia es 0. Esto significa que el plano tangente es el plano que mejor aproxima la superficie.

El plano tangente a la superficie M en el punto P se denota T_PM. La reunión de todos los planos tangentes a los puntos de M forma una nueva variedad, llamada *fibrado tangente* a M, TM, de la que nos ocuparemos más adelante.

Se define una *métrica riemanniana*, g, de una superficie M como una métrica del plano tangente a cada punto de la superficie, $g_P : T_PM \times T_PM \to \mathbb{R}$, cuando la reunión de todas estas métricas puntuales da lugar a una aplicación diferenciable $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$. Una superficie dotada de una tal métrica se llama *superficie riemanniana*. Esta noción se extiende inmediatamente a variedades. Dado un encajamiento de una variedad en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, este encajamiento induce una métrica riemanniana en la superficie por restricción de la métrica euclídea del espacio ambiente. Por tanto, toda variedad encajada en un espacio euclídeo resulta inmediatamente dotada de una métrica riemanniana. Esta definición que hemos brindado resulta de una formulación moderna que no se corresponde exactamente a la idea de RIEMANN. Lo hemos introducido de esta manera porque resulta más intuitivo a partir del conocimiento de la noción de espacio tangente. Naturalmente, no todo encajamiento de una superficie dotada de una métrica riemanniana es isométrico, para esa métrica. Pero, en virtud de los resultados de NASH [24] de 1956 sabemos que toda superficie (en general, toda variedad) dotada de una métrica riemanniana se puede sumergir en un espacio euclídeo. De este teorema, llamado del encaje isométrico, deducimos que no se pierde generalidad cuando trabajamos con encajamientos de las superficies en espacios euclídeos.

En el resto de la sección, todas nuestras superficies serán riemannianas (dotadas, por tanto, de un encaje isométrico). Señalaremos ahora algunos de los elementos de la geometría intrínseca de superficies riemannianas, es decir, aquellas propiedades que no dependen del encaje isométrico. Por ejemplo, la longitud de una curva contenida en la superficie o la definición de ángulos entre curvas o de áreas. Como hemos dicho, una superficie se diferencia poco, en las proximidades de un punto, de su plano tangente en ese punto. Más precisamente, si se proyecta sobre el tangente una pequeña curva contenida en la superficie que pase por un determinado punto de la misma, entonces las distancias medidas sobre la superficie difieren de las distancias medidas sobre el tangente en un infinitésimo de orden mayor que 2. Así, al definir cantidades geométricas en un punto dado de una superficie tomando un límite en el que aparezcan infinitésimos de orden menor o igual que el segundo, es lícito reemplazar un segmento contenido en la superficie por su proyección en el plano tangente. Las cantidades medidas, por tanto, en el plano tangente forman parte de la geometría intrínseca de la superficie.

Para curvas, se puede razonar análogamente sustituyendo infinitésimos de orden 2 por infinitésimos de orden 1. Así, podemos ver que las funciones torsión y curvatura son elementos de la geometría extrínseca, que dependen esencialmente, por tanto, del encajamiento escogido. La longitud de la curva, en el caso acotado, sí es un elemento de la geometría intrínseca. Como invariante métrico

(k, τ) clasifica las curvas (conexas) encajadas en $\mathbb{R}^3$ módulo movimientos rígidos, por esa razón podemos decir que hay infinitas curvas (conexas, compactas) encajadas en $\mathbb{R}^3$ pero tan sólo una fijada la longitud.

Una noción importante que brota de esta nueva visión de las superficies (y, en general, las variedades) es la de *orientación*. Una superficie (no necesariamente riemanniana) es orientable cuando podemos encontrar un atlas cuyos cambios de carta tengan todos ellos determinante positivo. Un tal atlas define una orientación para la superficie, de modo que la superficie está orientada cuando elegimos en ella una orientación. Intuitivamente, las *superficies orientables* son aquellas en que se puede distinguir dos caras en ella. La conocida *banda de Moebius*, por ejemplo, es un conocido ejemplo de superficie no orientable. En una superficie orientada existen, para cada punto, dos vectores normales (perpendiculares al plano tangente) colineales y opuestos, uno por cada cara de la superficie, de modo que la variación de estos vectores normales define sendas funciones continuas en la superficie. Esto implica que hay dos posibles elecciones de orientación en una superficie, dada cada una de ellas por uno de los vectores normales. De hecho, si (U, φ) es una carta local de una superficie diferenciable orientable, entonces una orientación para esta superficie viene dada por el vector normal

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\|}.$$

Desde estos preliminares sobre la geometría de las superficies riemannianas, nos centraremos ahora en hacer un recorrido diacrónico sobre la aparición de los invariantes geométricos más relevantes para nosotros. En primer lugar, con un buen concepto de *variedad tangente*, que se define intrínsecamente, disponemos también de una manera de computar la curvatura en cada punto, que mide, como siempre la desviación de la superficie en un punto respecto del tangente en ese punto. Nos fijamos en un punto P de la superficie. Dada una curva contenida en la superficie y que pase por P, ésta tendrá una curvatura asignada. La cuestión es que de esta manera tenemos tantas curvaturas como curvas escogidas. Pero tal familia de curvaturas no es arbitraria, sino que las diferentes curvaturas están fuertemente interrelacionadas. En el siglo XVIII, EULER demostró que existen dos curvas contenidas en la superficie, con curvaturas en P k_1 y k_2, de modo que cualquier curva por P obtenida como una sección normal de la superficie (es decir, como sección con la superficie de un plano perpendicular al plano tangente) tiene curvatura

$$k(\phi) = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi,$$

donde ϕ es el ángulo que forma la sección normal con la curva de curvatura k_1. Las curvaturas k_1 y k_2 se denominan *curvaturas principales de la superficie en el punto* y las direcciones de las curvas correspondientes, *direcciones principales*.

No sólo las curvaturas de secciones normales están vinculadas a las curvaturas principales. En 1776, MEUSNIER probó que, dada una curva regular

L obtenida como sección de un plano con la superficie que forme un ángulo θ con la normal, su curvatura k_L estará relacionada con la curvatura de la correspondiente sección normal, k_N, de la siguiente manera:

$$k_L = \frac{k_N}{\cos\theta}.$$

Finalmente, puede probarse que la curvatura de cualquier curva (no necesariamente plana) que esté contenida en la superficie tiene la misma curvatura que la curva obtenida como intersección de la superficie con su plano osculador.

Recapitulando los resultados de Meusnier, vemos que toda curva regular en P tiene la misma curvatura que la sección normal que tenga la misma dirección que la curva inicial.

A partir de los teoremas de Euler y Meusnier, comprobamos que la curvatura de cualquier curva en la superficie está determinada por las curvaturas principales. En consecuencia, el carácter de la curvatura en un punto de la superficie está determinado por los números k_1 y k_2.

El par (k_1, k_2) es un invariante módulo isometrías de $\mathbb{R}^3$, característica que ciertamente comparte con los invariantes afines de Apolonio para cónicas. Sin embargo, no está bien definido como invariante módulo isometrías intrínsecas, como sí lo estaba el invariante métrico (k, τ) para curvas regulares en el espacio. La razón es que cualquier variación métrica (isometría local) de la superficie provoca una variación en las secciones normales, por tanto modifica las curvas principales y, en consecuencia, las curvaturas principales. Se muestra necesaria, por tanto, la introducción de un nuevo invariante con el fin de completar la clasificación geométrico-diferencial de las superficies. Esta labor la realizó Gauss ya en el siglo XIX definiendo la curvatura, llamada después *gaussiana*, como el producto en cada punto de las curvaturas principales:

$$k = k_1 k_2.$$

En sus *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de 1828, Gauss demostró (es el contenido de su célebre *teorema egregio*) que la curvatura gaussiana es invariante por isometrías locales, es decir, que se conserva por transformaciones que respeten la métrica. De esta manera estaba computando el verdadero invariante métrico que permite concluir la clasificación métrica geométrico diferencial (por tanto, local) de las superficies. El teorema egregio prueba que dos superficies son intrínsecamente distintas entre sí, a nivel métrico, en el entorno de un punto exactamente cuando difieren en su curvatura gaussiana. La manera habitual hoy de calcular este invariante métrico es acudiendo al llamado operador de forma

$$F(t, s) = \frac{\partial_t \times \partial_s}{\|\partial_t \times \partial_s\|}.$$

Resulta inmediato que el operador de forma asigna a cada punto el vector normal a la superficie en ese punto. Esta definición, que hemos dado localmente, es sólo posible extenderla a una definición global del operador cuando tenemos dada una orientación de la superficie. La *curvatura gaussiana* es el determinante de la jacobiana del operador de forma, $k = \det(dF)$. No es difícil ver que coincide con la definición clásica y más intuitiva, dada por Gauss, que hemos explicado antes.

Es necesario observar un hecho importante. El invariante métrico definido por la curvatura gaussiana se calcula haciendo uso exclusivamente de ángulos y longitudes de arcos medidos sobre la superficie. Este tipo de cálculos forman parte de la geometría intrínseca de la superficie.

Un invariante geométrico que, como la curvatura gaussiana, esté definido intrínsecamente distingue superficies esencialmente diferentes (en este caso a nivel métrico) o, lo que es lo mismo, encajamientos esencialmente diferentes de una misma superficie (topológica).

El teorema egregio de Gauss introduce, por tanto, en la tradición de estudiar los objetos geométricos a través de la identificación de invariantes un nuevo punto de vista basado en la superposición de estructuras geométricas. Si se pretende, por ejemplo, clasificar superficies módulo isometrías, puede partirse de una misma clase según una estructura geométrica inferior (una superficie topológica) y buscar el invariante que mida los diferentes encajamientos o maneras de dotar de estructura métrica a esa clase topológica.

Conviene en este momento explorar, pues, el invariante que identifica la clase topológica de una superficie compacta, conexa y orientada. Se trata del conocido *género* de la superficie. Es un número entero $g \geq 0$ que se interpreta habitualmente como el número de agujeros o de asas que hay en la superficie. Con $g = 0$ no hay agujeros, se trata de una esfera; con $g = 1$ la superficie es un toro simple, homeomorfa a $S^1 \times S^1$. Para $g \geq 2$ la superficie se obtiene uniendo g asas a la esfera. El género se conserva bajo la acción de cualquier transformación que deje invariante la *clase de homotopía*. Intuitivamente, un vaso tiene el mismo género, 0, que un punto, porque no forma asa. Del mismo modo, una taza, con sólo un asa, tiene el mismo género que un toro, 1.

Como hemos explicado, el tangente a la superficie M en un punto puede entenderse como el plano vectorial engendrado por los operadores derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}.$$

El espacio dual, llamado espacio cotangente, estará entonces engendrado por los duales: los operadores diferenciales dx, dy. La colección de todos estos espacios vectoriales cuando el punto base varía forman a su vez sendas variedades diferenciables, llamadas respectivamente *fibrado tangente*, TM, y *fibrado cotangente o de* 1*-formas*, $T^*M = \Omega^1$, porque están formados por fibras sobre cada punto de M que son espacios vectoriales. A su vez, el conjunto de *secciones holomorfas* de este fibrado (aplicaciones holomorfas $M \to \Omega^1$ que a cada punto de M le asignan un vector de su propia fibra) forman un nuevo espacio vectorial complejo, llamado $H^0(\Omega^1)$. Pues bien, el género de M se define como

$$g = \dim H^0(\Omega^1).$$

El género se relaciona con la conocida *característica de Euler* de la superficie, $\chi(M)$. La característica de Euler es un invariante topológico que permite estudiar la topología de las superficies mediante triangulación. Surge de la conocida *fórmula de Euler* para poliedros homeomorfos a la esfera, para los cuales el número de caras más el número de vértices menos el número de aristas es igual a 2. La característica de Euler se generaliza inmediatamente para poliedros cualesquiera como $\chi = C + V - A$ (C es el número de caras, V el número de vértices y A el número de aristas). Como toda superficie compacta puede deformarse de manera continua hasta formar un poliedro (este proceso se llama triangulación), es posible también definir la característica de Euler para estas superficies. Pues bien, puede probarse que $\chi(M) = 2-2g$, donde g es el género.

El género g identifica, decimos, la clase topológica de la superficie compacta y orientada. Para cada género, será la curvatura gaussiana $k \in \mathbb{R}$ la que identifique la estructura métrica diferenciable de la superficie en cuestión. Por consiguiente, el problema de clasificación geométrica ha dado un paso más respecto del problema clásico. Ya no se trata de la identificación de un invariante geométrico, sino de detectar este invariante para cada valor de un invariante anterior, en virtud de la superposición de estructuras geométricas (topológica y métrica) que van surgiendo.

5. Riemann y la teoría de funciones complejas

Si bien las primeras nociones de *número complejo* aparecen en el *Ars Magna* de Girolamo Cardano en 1545, podemos decir que la tesis doctoral de Gauss introdujo a comienzos del siglo XIX una visión del número complejo que iba a determinar de modo decisivo su utilización sistemática en la matemática posterior. Los números complejos se introdujeron en conexión con la resolución de ecuaciones algebraicas, como el lugar adecuado en que se puede formular con propiedad el teorema fundamental del álgebra: toda ecuación algebraica tiene todas sus soluciones en el dominio complejo. El número i, la unidad imaginaria, solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$, dio luz verde a la definición de $\mathbb{C}$ como un cuerpo que es algebraicamente cerrado y que podemos representar como el plano real a través de la expresión general de los números complejos $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ o pares (a, b) con las operaciones usuales como binomios.

Pero el álgebra no fue la única área que se nutrió de la riqueza de los números complejos. El desarrollo del análisis puso de manifiesto su importancia a la hora de considerar funciones expresadas como desarrollo de potencias. En época de Gauss era conocido que la mayoría de las funciones reales usuales eran expresables como una *serie de potencias*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

La mayoría de los problemas del análisis conducían a funciones así desarrollables. Debido a las notables propiedades de regularidad de estas funciones, surgieron estudios del análisis restringuidos a ellas, que adquirieron el nombre de *funciones analíticas*.

Pronto ocurrió la generalización de este tipo de funciones al cuerpo complejo, surgiendo las *funciones analíticas complejas*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

El conocido *teorema de Abel* asegura que una tal función admite un dominio de convergencia en una cierta topología (la *topología uniforme*) que es exactamente un círculo abierto del plano complejo centrado en a. En ese círculo de convergencia, la función es analítica, está bien definida y es infinitamente diferenciable.

Íntimamente vinculado a la noción de función analítica está el concepto de *derivada compleja* de las funciones de variable compleja. Decimos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ admite derivada (compleja) $f'(z_0)$ en un punto z_0 si existe en $\mathbb{C}$ el límite

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Las funciones de variable compleja gozan de la siguiente propiedad: si son derivables en un punto entonces son infinitamente derivables en ese punto y, de hecho, son analíticas en un disco centrado en el punto. A las funciones de variable compleja verificando cualquiera de estas nociones equivalentes (derivabilidad compleja o analiticidad) se les denomina *holomorfas* ([1]).

En el estudio de las propiedades de las funciones analíticas juega un papel fundamental el concepto de *integral de línea de una función de variable compleja*. Consideremos una curva plana C con origen en $z_0 \in \mathbb{C}$ y extremo en $z \in \mathbb{C}$, de modo que esté totalmente contenida en el dominio de convergencia de una función de variable compleja f. Consideramos particiones cada vez más finas de la curva C, $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$. Consideramos la suma $\sum_{j=1}^{n} f(z_j)(z_j - z_{j-1})$. Cuando la curva C es acotada y f es continua, se puede ver que el límite cuando $n \to \infty$ de esta suma está bien definido y se conoce como la integral de la función f a lo largo de la curva C. Un teorema clásico de CAUCHY establece que una función compleja que sea diferenciable en un dominio simplemente conexo del plano complejo verifica que la integral de camino a lo largo de cualquier curva contenida en el dominio depende únicamente de los extremos de la curva y no del camino. El *teorema de Cauchy* permite recuperar el valor de la función diferenciable como una integral de camino,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

donde C es una curva contenida en el dominio de f que une un determinado punto prefijado con z. Este teorema permite también asegurar que las funciones complejas diferenciables en un disco del plano complejo son exactamente aquellas funciones diferenciables que verifican la propiedad anterior. Por tanto, las siguientes nociones son equivalentes a la holomorfía para una función compleja f definida en un disco abierto del plano, D:

1. f admite derivada compleja en todo punto del disco.

2. Toda integral de camino compleja en el dominio D depende sólo de los puntos inicial y final de la curva, y no del camino.

3. La función f es analítica.

El concepto de holomorfía, que admite diversas y muy ricas aplicaciones, por ejemplo, en la teoría de ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales y en la física matemática, introduce también una nueva estructura geométrica. Cuando una superficie diferenciable admite un atlas diferenciable en el que los cambios de carta son de hecho funciones holomorfas, decimos que este atlas define una estructura compleja en la superficie y ésta se conoce con el nombre de *superficie de Riemann*.

El concepto de superficie de Riemann fue inventado por Bernhard Riemann en su tesis de 1851 ([26]) titulada *Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de una variable compleja*. Allí, Riemann adoptó el punto de vista del análisis complejo, en donde las peculiares propiedades de las funciones de variable compleja permiten contextualizar su estudio en una familia de superficies con una estuctura peculiar, que es la holomorfa. Una aplicación definida entre superficies de Riemann es holomorfa si su composición con las cartas locales correspondientes es una función holomorfa cualesquiera que sean las cartas. Finalmente, dos estructuras complejas de una superficie de Riemann son equivalentes si existe entre ellas una *aplicación biholomorfa* (biyectiva, holomorfa y de inversa holomorfa).

La propiedad clave observada por Riemann de las funciones de variable compleja es la multievaluación. El logaritmo complejo, por ejemplo, definido como la función inversa de la exponencial compleja, es multievaluada. Existen, de hecho, infinitos logaritmos de un número complejo. En efecto, dado un número complejo z, éste tiene, como sabemos, una expresión en coordenadas polares $z = ze^{i\theta}$ que no es única, ya que $z = re^{i(\theta+2k\pi)}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Pues bien, el logaritmo de z es $\ln(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, de modo que está infinitamente evaluado. La imagen del logaritmo es un ejemplo de superficie de Riemann. Tendrá tantas hojas como enteros k, y un agujero, el que deja la imagen del 0. Riemann advierte que tales agujeros, los *puntos de ramificación* de la función holomorfa en cuestión, son un invariante topológico de la superficie, que la *fórmula de Riemann-Hurwitz* hace depender de la característica de Euler de la superficie. Por tanto, ya en 1851 Riemann lleva a cabo una primera clasificación, que llamaremos *teorema de uniformización*, en este caso, topológica, de las superficies que llevan su nombre. Pero aún tiene que pasar un tiempo para que adopte una perspectiva geométrica y efectúe una clasificación de las estructuras complejas de una superficie dada.

La noción de Riemann de las superficies que llevan su nombre es al día de hoy la noción particular para dimensión (compleja) 1 de *variedad compleja*. Una variedad compleja es una variedad diferenciable de dimensión real $2n$ tal que los cambios de carta son funciones holomorfas, entendidas como aplicaciones entre abiertos de $\mathbb{C}^n$. Cuando $n = 1$, mediante esta definición recuperamos la noción de superficie de Riemann. Esta forma de ver las superficies de Riemann permite su comprensión como variedades intrínsecamente definidas, al margen de sus posibles encajamientos, como hicimos con las superficies diferenciables. Esta estructura geométrica fundamental, la estructura compleja, será omnipresente, desde Riemann hasta nuestros días, en el desarrollo de la geometría.

En sus *Principios fundamentales*, Riemann elaboró un modelo que será relevante en su estudio geométrico posterior y que permite pensar en la compactificación del plano complejo: la *esfera de Riemann*. Ésta es el resultado de añadir el punto del infinito al plano complejo $\mathbb{C}$, de modo que obtenemos un espacio topológico compacto, $\widehat{\mathbb{C}}$, al que de modo natural se dota de estructura de superficie de Riemann. Riemann también probó que hay tres superficies de Riemann notables, que son las únicas superficies de Riemann simplemente conexas. La primera es el plano complejo, $\mathbb{C}$; en segundo lugar la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$; finalmente, el disco abierto unidad, $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Riemann probó que cualquier abierto simplemente conexo de una superficie de Riemann es equivalente en cuanto a su estructura compleja a $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ o D. Es la versión analítica del llamado *teorema de uniformización de Riemann*, generalizado después por Koebe y Poincaré, que jugará un importante papel en el problema geométrico de clasificación de estructuras complejas en superficies.

6. Riemann y los fundamentos de la Geometría

En 1854 Riemann imparte una lección inaugural ante un tribunal con el fin de conseguir la condición plena de profesor universitario. Para ello, tiene que proponer una colección ordenada de tres temas sobre los que disertar, de los cuales el tribunal elegirá uno. Formó parte de este tribunal el eminente profesor Gauss, quien, atraído por su título, eligió, en contra de la práctica habitual e incluso de la preferencia de Riemann, el tercero de los temas: *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*.

En sus *Disquisiciones generales circa superficies curvas* de 1828, Gauss había roto con la visión tradicional de estudio de superficies como sólidos encajados en un espacio euclídeo, tratándolas ahora como entidades definidas por sí mismas (estos son los fundamentos de la geometría intrínseca). La primera idea fundamental de Riemann es extender esta visión a variedades

n-dimensionales. Lo hace de manera diferente a como nosotros hemos introducido el estudio (mediante cartas locales) pero en su disertación aclara los tres conceptos esenciales que juegan un papel en este estudio: variedad, métrica (globalmente definida en la superficie, después llamada métrica riemanniana) y curvatura.

La noción de variedad la ilustra Riemann mediante el ejemplo del movimiento de una partícula puntual, cuya trayectoria define una curva, cuyo movimiento a su vez genera una superficie y cuyo movimiento genera una 3-variedad. De este modo, el movimiento de las variedades generaría sucesivamente variedades de dimensiones superiores. De modo intuitivo está vinculando la dimensión de una variedad con el número de parámetros que se necesitan para identificar un punto de la variedad. Ciertamente, la noción de variedad así presentada no es exacta debido a las singularidades que habitualmente presentan las variedades, pero la aproximación es muy acertada.

En su disertación, Riemann utilizó sus propios estudios sobre funciones de variable compleja y su conocimiento de la geometría desarrollada por Gauss para estudiar las recién creadas superficies de Riemann. De hecho, la novedad de la estructura compleja le lleva a inaugurar una nueva forma de pensar su estudio geométrico. Esta nueva forma de pensar la geometría compleja condujo a Riemann a la elaboración de una profunda descripción de las estructuras complejas en superficies, llevada a cabo en su trabajo de 1854 y culminado en su trabajo de 1857 sobre *funciones abelianas*, [27].

Riemann observó que dos superficies de Riemann pueden ser no equivalentes pero estar soportadas sobre el mismo espacio topológico. El problema geométrico radica en encontrar el invariante que identifique las posibles estructuras complejas que pueden asentarse en una misma superficie (topológica) con género dado. Con este fin, en su trabajo de 1857 Riemann acuña el término *espacio de moduli* para referirse al conjunto de todos los parámetros que identifican las diferentes posibilidades para una determinada estructura geométrica (en este caso, el conjunto de posibles estructuras complejas de una superficie con una topología fija, dada por el género). La novedad radica en que ahora este espacio de parámetros, espacio de moduli, tiene, a su vez, una cierta estructura geométrica cuyo estudio redunda en el conocimiento de las estructuras originales. Haremos ahora un breve resumen de la construcción del espacio de moduli de superficies de Riemann de género 1. Utilizaremos el lenguaje moderno respetando las ideas originales de Riemann de 1854 y 1857 y el trabajo de sistematización y unificación de ideas sobre superficies de Riemann de Hermann Weyl de 1913 [34].

En la visión de Gauss, la métrica de una determinada superficie M puede exprearse localmente, en un entorno de cada punto, en la forma $\sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$, donde $x_1 = x$, $x_2 = y$ y $x_3 = z$ y g_{ij} son funciones diferenciables que toman valores en un pequeño abierto de la superficie. Esta fórmula, que se llama habitualmente *Primera forma fundamental*, permite ver la métrica como un objeto estrictamente local, definido como un producto escalar en el plano tangente de cada punto, $T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$. De esta manera es como GAUSS puede definir el invariante fundamental en su visión de la geometría de superficies: la curvatura.

La primera idea crucial de RIEMANN fue considerar métricas globalmente definidas en la superficie en cuestión: *métricas riemannianas*. Estas métricas globales tienen en cada punto una expresión local como la considerada, por cuanto se recupera la visión gaussiana. Pero la consideración del objeto global supone un avance significativo. Por ejemplo, la superficie esférica usual es localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^2$, con lo que hereda de $\mathbb{R}^2$ una métrica localmente definida en cada punto. Sin embargo, si se considera la métrica natural de la esfera heredada de su inmersión en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ vemos que esta métrica tiene curvatura gaussiana 1, con lo que no es localmente la métrica de $\mathbb{R}^2$, que tiene curvatura 0. La generalización de esta observación a variedades n-dimensionales, realizada por RIEMANN en 1854, supone la definitiva superación del problema de la existencia de geometrías no euclídeas. Desde entonces, se llama *variedad riemanniana* a una variedad n-dimensional dotada de una métrica globalmente definida.

En el conjunto de métricas globales definidas en una determinada superficie topológica existe una relación de equivalencia que es relevante para nosotros. Esta relación, llamada *equivalencia de Weyl*, está dada por la noción de *métricas conformes*. Decimos que dos métricas, g_1 y g_2 globalmente definidas en la misma superficie M son conformes si existe una función ω también globalmente definida en M e infinitamente diferenciable de modo que $g_1 = e^{2\omega} g_2$. Se puede demostrar (ver [13]) que el conjunto de clases de métricas conformes está en correspondencia biyectiva con el conjunto de estructuras complejas en la superficie, de modo que buscar estructuras complejas diferentes en una superficie es equivalente a buscar métricas globalmente definidas que no sean conformes unas con otras.

Este importante resultado permite matizar el *teorema de uniformización* que RIEMANN probó en su tesis doctoral de 1851 para abiertos simplemente conexos de la esfera de Riemann (y que en su versión más general se debe a KOEBE y POINCARÉ). Ahora podemos decir que toda superficie de Riemann simplemente conexa debe ser conformemente equivalente a una y sólo una de las siguientes: $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ o D.

El teorema de uniformización lleva de modo natural al interés por considerar el *revestimiento universal* de una superficie de Riemann. Dada una superficie de Riemann M, su revestimiento universal es otra superficie de Riemann Σ, ésta simplemente conexa, que admite una aplicación holomorfa sobreyectiva $\pi : \Sigma \to M$ que verifica una cierta condición de regularidad: para cada punto $P \in M$ existe un entorno U de P de manera que la contraimagen $\pi^{-1}(U)$ se puede expresar como una unión numerable de hojas disjuntas,

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} V_\alpha.$$

Hay que observar que la aplicación π establece un homeomorfismo entre U y cada hoja V_α del revestimiento.

El revestimiento universal es el objeto relevante para estudiar las estructuras complejas posibles en una determinada superficie. La razón es que siempre existe un grupo $\mathcal{G}$, subgrupo del grupo $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ de homeomorfismos del revestimiento Σ, que verifica que $\mathcal{G} \cong \pi_1(M)$, existe el cociente $\Sigma/\mathcal{G}$, es posible dotarle de una estructura de variedad diferenciable y, además,

$$\Sigma/\mathcal{G} \cong M.$$

Observamos ahora que, de lo dicho, el revestimiento universal Σ de cualquier superficie de Riemann debe ser conformemente equivalente a $\mathbb{C}$, a $\widehat{\mathbb{C}}$ o bien a D. Esta observación nos lleva a matizar nuevamente nuestro teorema de uniformización. Podemos ya asegurar que toda superficie de Riemann debe ser conformemente equivalente a $\Sigma/\mathcal{G}$, donde $\Sigma = \mathbb{C}, \widehat{\mathbb{C}}$ o D y $\mathcal{G}$ es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Sigma)$ tal que $\Sigma/\mathcal{G}$ es variedad diferenciable.

Además, se puede demostrar que dos superficies de Riemann sólo pueden coincidir cuando tienen el mismo revestimiento universal, Σ, y los correspondientes grupos de homeomorfismos, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ son conjugados por un automorfismo interno, es decir, existe $\phi \in \mathrm{Aut}(\Sigma)$ tal que $\mathcal{G}_2 = \phi \mathcal{G}_1 \phi^{-1}$.

Identificar superficies de Riemann consiste, por tanto, en detectar subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$, $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ y $\mathrm{Aut}(D)$ de modo que los correspondientes cocientes tengan estructura de variedad. Esos subgrupos serán, a su vez, el grupo fundamental de la variedad cociente. Se puede demostrar, por ejemplo, que la única superficie de Riemann cuyo revestimiento universal es la esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$, es la propia esfera de Riemann. En efecto, los únicos biholomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ son las *transformaciones de Moebius* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ con

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I\},$$

de modo que $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ (ver [9]). Se puede comprobar que ningún subgrupo propio de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ induce una acción en la esfera de Riemann tal que el cociente admita estructura de variedad.

Sin embargo, si tomamos el plano complejo $\mathbb{C}$ como punto de partida, la situación cambia. Es fácil ver que

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{C}^*, \ b \in \mathbb{C} \right\},$$

el conjunto de transformaciones afines del plano complejo. Hay numerosos subgrupos propios de este grupo que inducen superficies de Riemann. Por ejemplo, el subgrupo $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ generado por la traslación $z \mapsto z+1$ da lugar a la superficie de Riemann $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}^*$. En este caso, todo otro subgrupo $\mathcal{G}$ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ tal que $\mathbb{C}/\mathcal{G}$ sea topológicamente equivalente a $\mathbb{C}^*$ es conjugado al anterior por un automorfismo interno.

Si nos fijamos ahora en un retículo del plano complejo, engendrado por los números complejos no nulos y linealmente independientes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$,

$$\Lambda(\alpha,\beta) = \{p\alpha + q\beta \ : \ p,q \in \mathbb{Z}\},$$

tenemos que $\Lambda(\alpha,\beta)$ induce un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. El cociente $\mathbb{C}/\Lambda(\alpha,\beta)$ es homeomorfo al toro, T^2, que tiene género 1. Pero, en este caso, se puede ver que existe una familia de subgrupos no conjugados de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ isomorfos a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ verificando esta condición que está en correspondencia con $\mathcal{U}/\operatorname{PSL}(2,\mathbb{Z})$, donde $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im(z) > 0\}$ es el semiplano complejo superior. Esto significa que el toro, de género 1, admite una familia de estructuras complejas que puede parametrizarse según el espacio $\mathcal{U}/\operatorname{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Dicho de otro modo, el espacio de moduli de estructuras complejas de género 1 al menos contiene el espacio $\mathcal{U}/\operatorname{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Más aún, el espacio $\mathcal{U}/\operatorname{PSL}(2,\mathbb{Z})$ parametriza pares (M,p) donde M es una superficie de Riemann de género 1 y $p \in M$, de modo que identificamos dos de estos pares, (M_1,p_1) y (M_2,p_2) cuando existe un biholomorfismo $f : M_1 \to M_2$ tal que $f(p_1) = p_2$. De hecho, se puede comprobar que, considerando la acción de $\operatorname{SL}(2,\mathbb{Z})$ en $\mathcal{U}$, el espacio de estructuras complejas de género 1 se identifica con el conjunto de órbitas $\mathcal{U}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{Z})$. Al estudiar el espacio $\mathcal{U}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{Z})$ se observa que, con la topología cociente, resulta un espacio topológico no compacto. Es posible compactificarlo agregando un punto de manera que el espacio resultante sea una superficie de Riemann compacta que incluye a $\mathcal{U}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{Z})$ como subsuperficie de Riemann abierta.

Finalmente, en su trabajo de 1857 Riemann conjeturó que en general el número de parámetros (moduli) necesarios para determinar las estructuras complejas en una superficie topológica de género g es $3g-3$. En general, no es posible dotar al espacio de estructuras complejas de una estructura compleja sino después de eliminar ciertas singularidades que es necesario extraer para poder construir el espacio de moduli. Haciendo esta salvedad, podemos decir que la *conjetura de Riemann* se traduce en que la dimensión del espacio de moduli de superficies de Riemann de género g es $3g-3$, resultado que fue finalmente demostrado por Ahlfors ([9, Chapter 5]).

Recopilando todo lo dicho, podemos interpretar el aporte de Riemann como un avance significativo que, estando plenamente insertado en la tradición geométrica, supone a la vez una visión nueva y fundamental para entender el desarrollo posterior de la geometría. Decimos que Riemann se inserta en la tradición porque aborda el estudio de la geometría mediante clasificación de estructuras que se superponen sucesivamente (la estructura compleja de las superficies de Riemann superpuesta a la variedad topológica). Sin embargo, antes de que Riemann apareciera en la escena, la geometría se afanaba en la introducción de invariantes para llevar a cabo esta clasificación. El género, por ejemplo, clasifica en cierto sentido las superficies topológicas. Pero con la introducción de las estructuras complejas, esta visión deja de ser totalmente satisfactoria. El problema de clasificación deja de ser sólo la identificación de ciertos invariantes nuevos fijado uno anterior (el género). Se muestra necesario dotar al conjunto de objetos que se pretende clasificar de una estructura geométrica análoga a la de las variedades en consideración. En nuestro caso, el conjunto de estructuras complejas conformemente equivalentes de género dado g tiene a su vez estructura de variedad compleja de dimensión $3g-3$, de modo que el estudio de esta nueva variedad compleja (el espacio de moduli) conduce a un mayor conocimiento de las superficies de Riemann en cuestión.

Las superficies de Riemann son objetos muy versátiles en geometría y en otras áreas de la matemática y la ciencia. En particular, las superficies de Riemann tienen en las curvas algebraicas su correlato algebraico. Una *curva algebraica* es el lugar geométrico determinado por $n-1$ funciones polinómicas independientes en $\mathbb{C}^n$ o bien polinomios homogéneos independientes en $\mathbb{CP}^n$. Existe una correspondencia biunívoca entre superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas complejas. Cuando nos restringimos a género 1, obtenemos que hay una biyección entre superficies de Riemann con género 1 y curvas dadas por polinomios homogéneos de grado 3 en $\mathbb{CP}^2$ ([29]).

Esta visión aportada por la geometría algebraica ha permitido en los últimos tiempos un estudio muy fructífico de las superficies de Riemann y de otras estructuras asociadas. En la próxima sección citaremos algunos puntos de interés en este sentido. Aquí señalaremos la dimensión aritmética que se abre a partir de esta perspectiva algebraica. Podemos considerar extensiones del cuerpo racional $\mathbb{Q}$, todas ellas contenidas, naturalmente, en $\mathbb{C}$, que es el cierre algebraico, y en esta extensión, raíces de polinomios homogéneos de grado 3. Dada una extensión de $\mathbb{Q}$, se puede construir el espacio de moduli de tales curvas. Estos objetos, a su vez, se relacionan con las *formas modulares*, que son las funciones analíticas complejas definidas en el semiplano superior y que verifican cierto tipo de ecuación funcional. De aquí que el espacio $\mathcal{U}/\operatorname{PSL}(2,\mathbb{Z})$, que también es una variedad algebraica, goce de un alto interés en la geometría aritmética, y haya jugado un papel en determinados desarrollos aritméticos como la resolución del *último teorema de Fermat* ([10]).

7. Los espacios de moduli en la Geometría actual

El gran aporte de Riemann en el área que nos ocupa consiste en estudiar un conjunto de objetos geométricos dotando de una cierta estructura de variedad al espacio que clasifica esos objetos. En esto consiste justamente un espacio de moduli. Después de que Riemann acuñase este concepto en 1857, los espacios de moduli han sido abundantemente utilizados en geometría de una manera más oficiosa hasta que su formulación fue definitivamente sistematizada en los años sesenta.

El estudio de espacios de móduli en el siglo XX ha venido desarrollándose en una doble vertiente, local y global. Los trabajos iniciales de KODAIRA-SPENCER y las aportaciones de KURANISHI contribuyeron a la versión local, mientras que la teoría global, que es la que introduce una noción precisa de moduli y una manera sistemática de abordar su construcción, se debe a la *Teoría Geométrica de Invariantes* (GIT) desarrollada por MUMFORD ([21], [22]) a partir de la teoría geométrico-algebraica de esquemas de GROTHENDIECK.

En general, dada una colección de objetos geométricos, X, y una relación de equivalencia $\sim$ en esa colección de objetos, se desea dotar de estructura geométrica al conjunto de clases de equivalencia, $X/\sim$. El caso que dio origen a esta perspectiva es el de la colección de todas las estructuras geométricas en una superficie topológica dada, siendo $\sim$ la relación de ser conformemente equivalentes.

Un ejemplo sencillo lo obtenemos si retomamos el estudio de APOLONIO en las *Cónicas*. Como ya explicamos, la colección de cónicas del plano módulo la relación de equivalencia afín (es decir, módulo traslaciones, giros y simetrías) está parametrizado por un ángulo $\beta \in [0, 2\pi]$. El valor de β (en concreto, el valor de $\alpha + \beta$, donde α es el ángulo del cono) permite identificar si se trata de una elipse, una hipérbola o una parábola. Pero ahora vemos que el estudio no es plenamente satisfactorio porque el mero valor del ángulo β no nos permite conocer nada acerca de la geometría de la cónica a la que representa. Lo que necesitamos para disponer de información acerca de la geometría de la cónica es poder verla inmersa en una variedad en donde todas ellas estén representadas a través del parámetro β. Esa variedad es justamente el cono del que partimos.

Tras los trabajos de RIEMANN se identificaron estructuras geométricas variadas y se pudo construir el correspondiente espacio de moduli. Es el caso, por ejemplo, de las variedades abelianas. En las últimas décadas han aparecido ciertos objetos geométricos novedosos con gran interés en diversos ámbitos de la matemática y la física. Estos son los *fibrados vectoriales*. Los trabajos de DONALDSON [11] y UHLENBECK y YAU [32] permiten vincular la noción de fibrado vectorial a la existencia de soluciones de ciertas ecuaciones de la física-matemática, llamadas de Yang-Mills. Estas ecuaciones brotan de la teoría de unificación de fuerzas.

Dada una superficie de Riemann compacta, X, la idea de fibrado vectorial es la de una familia de espacios vectoriales de la misma dirección sobre cada punto de X que esté parametrizada por una variedad compleja. En concreto, un *fibrado vectorial de rango n sobre X* es una variedad compleja E que admite una proyección $\pi : E \to X$ sobreyectiva de modo que cada fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ (con $x \in X$) es un espacio vectorial de rango n. Además, se le exige a la variedad E unas ciertas condiciones técnicas de regularidad para ser fibrado que no explicitaremos aquí. Por ejemplo, $E = X \times \mathbb{C}^n$ es evidentemente un fibrado vectorial de rango n sobre X. Se llama *fibrado trivial*. En el caso en que X es la esfera de Riemann, se puede considerar E el cilindro sobre X junto con la proyección π sobre la esfera. Se trata entonces de un fibrado en que las fibras son espacios de dimensión compleja 1. Este tipo de fibrados reciben el nombre de fibrados de línea.

Este objeto se define también para variedades reales. En este caso, el cilindro sobre la circunferencia o la banda de Moebius sobre la misma variedad real son ejemplos de fibrados vectoriales. Además, éstos son fibrados no equivalentes módulo la equivalencia natural de fibrados vectoriales. Más aún, cualquier fibrado de línea sobre la circunferencia es equivalente a uno de estos dos, de modo que la orientabilidad es el invariante que los clasifica.

Con los fibrados vectoriales se puede operar de forma análoga a como se opera usualmente con espacios vectoriales: podemos considerar el fibrado dual de uno dado, la suma directa o el producto tensorial de varios, el producto simétrico o la potencia exterior. En particular, dado un fibrado vectorial de rango n, E, su *potencia exterior n-ésima*, $\Lambda^n E$ es un fibrado de línea asociado al fibrado E. Se llama *determinante* de E y se denota $\det(E)$.

Desde nuestra perspectiva geométrica, el interés está en construir el espacio de moduli de este tipo de objetos. Como sabemos, esta tarea conlleva definir la oportuna relación de equivalencia en esa colección de objetos, identificar y fijar los invariantes topológicos correspondientes y finalmente dotar de estructura compleja al conjunto resultante.

Dados dos fibrados vectoriales E y F sobre la superficie de Riemann X, con proyecciones respectivas π_E y π_F, decimos que estos fibrados son isomorfos si fibra a fibra los espacios vectoriales correspondientes son isomorfos de modo que la familia de isomorfismos vectoriales así generada induzca un holomorfismo global entre las variedades. Es decir, E y F son *isomorfos* si existe un holomorfismo $f : E \to F$ que va de fibra en fibra, es decir $\pi_F \circ f = \pi_E$, y en cada fibra $f_x : E_x \to F_{f(x)}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. La relación de isomorfía así definida, $\sim$, es de equivalencia, de modo que se busca construir el espacio de moduli de fibrados vectoriales módulo isomorfía.

En cuanto a los invariantes topológicos, es necesario tener en cuenta dos. El primero de ellos es, naturalmente, el *rango* n de los fibrados. El segundo es el *grado*, d, del fibrado. El grado de un fibrado vectorial E coincide con la *primera clase de Chern* $c_1(E)$ (si se quiere estudiar las definiciones precisas de las diferentes clases características se puede acudir, por ejemplo, a los textos de Dupont [12] o de Milnor y Stasheff [20]). Para un fibrado de línea L, podemos ver el grado $c_1(L)$ como la suma de las multiplicidades de los ceros de una sección del fibrado ([16]). En el caso de un fibrado vectorial E de rango $n \geq 2$, el grado de E será el grado del determinante de E, $c_1(E) = c_1(\det(E))$. Es claro que el grado d de un fibrado vectorial ha de ser un número entero.

Llamemos $\mathcal{V}(n,d)$ al conjunto de todos los fibrados vectoriales de rango n y grado d sobre X. Nuestro propósito sería dotar de estructura compleja al espacio $\mathcal{V}(n,d)/\sim$.

Como sabemos, la única superficie de Riemann de género $g=0$ es la esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$. El trabajo de GROTHENDIECK en [15] prueba que todo fibrado vectorial sobre la esfera de Riemann es suma directa de fibrados de línea. En el caso de las superficies de Riemann de género 1, ATIYAH [6] describió los fibrados vectoriales en términos de extensiones. Cuando $g \geq 2$, es posible introducir en el conjunto $\mathcal{V}(n,d)/\sim$ una topología junto con una estructura diferenciable, que no es sin embargo compatible, en general, con ninguna estructura compleja. Es necesario considerar, en lugar de esta estructura, espacios de Sobolev apropiados que inducen en $\mathcal{V}(n,d)/\sim$ una cierta topología. Esta nueva topología es, en general, no Hausdorff (ver [23]). Este hecho exige eliminar de nuestro espacio ciertos puntos. Con este fin se introduce la noción de fibrado vectorial estable.

Dado un fibrado vectorial de rango n y grado d, definimos la pendiente del fibrado como

$$\mu(E) = \frac{d}{n}.$$

El fibrado E es *estable* si $\mu(F) < \mu(E)$ para cualquier subfibrado vectorial propio F de E. Si nos restringimos al espacio $M^s(n,d)$ de los fibrados vectoriales estables de rango n y grado d, módulo isomorfía, sobre X, se puede comprobar que entonces sí se le puede dar a este espacio estructura de variedad compleja. Si g es el género de X y $g \geq 2$, entonces la dimensión de esta variedad será $1 + n^2(g-1)$.

El fibrado vectorial E se dice *semiestable* si $\mu(F) \leq \mu(E)$ para todo subfibrado propio F de E. Utilizando la teoría GIT de MUMFORD [22] se puede comprobar que el espacio $M(n,d)$ de fibrados vectoriales semiestables de rango n y grado d es una variedad algebraica proyectiva en la que $M^s(n,d)$ es un abierto formado por puntos no singulares. En el caso de fibrados, la relación que define el espacio de moduli no es la relación de isomorfía, como en los problemas de clasificación precedentes. En este caso, la relación adecuada es la de S-equivalencia. Dado un fibrado vectorial E, éste admite una filtración (llamada de Jordan-Hölder) en subfibrados, $0 = E_0 \subseteq E_1 \subseteq \cdots \subseteq E_m = E$, tales que los cocientes sucesivos son estables. Llamamos *graduado de E* al fibrado suma directa de esos cocientes $\bigoplus_{i=1}^m E_i/E_{i-1}$. Decimos, finalmente, que dos fibrados vectoriales son *S-equivalentes* cuando tienen graduados isomorfos.

Hoy manejamos en geometría una gran variedad de objetos geométricos de enorme riqueza e influencia en muy diversos campos de la matemática y la física. Con el fin de introducir en la geometría de los fibrados las simetrías, giros y otras transformaciones gauge, es habitual considerar *fibrados principales*, esto es, fibrados en los que las fibras son espacios en donde actúa un determinado grupo de estructura G. El grupo G es el grupo de transformaciones gauge (habitualmente es el grupo unitario, ortogonal o simpléctico, pero pueden considerarse otros). Ramanathan dio en 1976 unas nociones adecuadas de estabilidad para este tipo de fibrados de modo que logró construir el espacio de moduli de G-fibrados principales sobre una superficie de Riemann compacta. Mucha información acerca de este tipo de fibrados y los objetos de la física vinculados a ellos se puede extraer del estudio de la geometría del espacio de moduli, sus subvariedades y automorfismos (véase e.g. [5]). Hitchin, Donaldson y otros encontraron la vinculación entre determinados pares formados por un fibrado principal y una sección global de cierto fibrado vectorial asociado con las soluciones de importantes objetos y ecuaciones de la física matemática. Es el caso de los memorables *fibrados de Higgs*. De este modo, la identificación de una adecuada noción de estabilidad y semiestabilidad para estos pares y el estudio del correspondiente espacio de moduli redunda también en un mejor conocimiento de las soluciones de las ecuaciones de la física.

Referencias

[1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
[2] A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov & M.A. Laurentiev, *La matemática: su contenido, métodos y significado*, Madrid: Alianza, 2014.
[3] A. Antón, *La nueva ciencia germen de la nueva Europa.* La Razón Histórica **19** (2012), 72-87.
[4] A. Antón, *Matemáticas o la fábula de Hiperión.* La Razón Histórica **28** (2014), 117-125.
[5] A. Antón, *Principal* Spin-*bundles and triality.* Rev. Colombiana Mat. In press.
[6] M. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve.* Proc. London Math. Soc. **7** (1957) 414-452.
[7] C.B. Boyer, *Historia de la matemática*, Madrid: Alianza Universidad, 1986.
[8] J.L. Coolidge, *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Oxford: Clarendon, 1968.
[9] V.I. Danilov V.V. Shokurov, *Algebraic curves, algebraic manifolds and schemes*, Berlín: Springer-Verlag, 1998.
[10] F. Diamond & J. Shurman, *A first course in modular forms*, GTM 228, Nueva York: Springer-Verlag, 2005.
[11] S. Donaldson, *A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri.* J. Differential Geom. **18** (1983) 269-277.
[12] J.L. Dupont, *Curvature and Characteristic Classes*, Lecture Notes in Mathematics 640, Berlín: Springer-Verlag, 1978.
[13] H.F. Farkas & I. Kra, *Riemann Surfaces*, Nueva York: Springer-Verlag, 1980.
[14] J. Gow, *A short History of Greek Mathematics*, AMS Chelsea Publishing, 1968.
[15] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. J. Math. **79** (1957) 121-138.
[16] R. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton Mathematical Notes, Princeton: Princeton University Press, 1966.
[17] T.L. Heath, *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 2010.
[18] N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface.* Proc. London Math. Soc. **55** (3) (1987), no. 1, 59-126.
[19] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, New Jersey: Princeton University Press, 1987.

[20] J.W. Milnor & J.D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1974.
[21] D. Mumford, *Introduction to the theory of moduli.* Algebraic Geometry, F. Oort, ed., Oslo: Woltes-Noordhoff, 1970. pp. 171-222.
[22] D. Mumford, J. Fogarty & F. Kirwan, *Geometric Invariant Theory,* Heidelberg: Springer-Verlag, ^{3}1994.
[23] M.S. Narasimhan & C.S. Seshadri, *Stable and unitary bundles on a compact Riemann surface.* Ann. of Math. **89** (1969) 19-51.
[24] J.F. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds.* Ann. of Math. **65** (1956) 20-63.
[25] A. Ramanathan, *Stable Principal Bundles on a Compact Riemann Surface.* Math. Ann. **213** (1975), 129-152.
[26] B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse* (1851), reimpreso en Gesammelte matematische Werke, Nueva York: Dover, 1953.
[27] B. Riemann, *Theorie der Abel'schen Funktionen.* J. Reine angew. Math. **54**, 115-155.
[28] Sexto Empírico, *Esbozos pirrónicos.*
[29] J.H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, GTM 106, Nueva York: Springer-Verlag, 2009.
[30] D.J. Struik, *Outline of a history of differential geometry: I.* Isis **19** (1) (1933), 92-120.
[31] A.N. Tyurin, *The geometry of moduli of vector bundles.* Russ. Math. Surveys **29** (1974), 57-88.
[32] K. Uhlenbeck & S.-T. Yau, *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles.* Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986) S257-S293.
[33] B.L. van der Waerden, *Science Awakening*, New York: Oxford University Press, 1961.
[34] H. Weyl, *The concept of a Riemann surface*, Addison-Wesley, 1964.

Recibido en abril de 2015. Aceptado para publicación en octubre de 2015

Álvaro Antón Sancho
Escuela Universitaria de Magisterio "Fray Luis de León"
Universidad Católica de Ávila
Valladolid, España
e-mail: alvaro.anton@eumfrayluis.com