Lecturas Matemáticas
Volumen **38** (1) (2017), páginas 19-29
ISSN 0120-1980

Los números metálicos y su vínculo con la función zeta de Riemann

The metallic numbers and their relation to the Riemann zeta function

Fidel López Novoa, Andrés A. González-Aguilera, Eduardo Renato Moreno Roque y Pedro M. Ricardo-Zaldívar

Universidad de Granma, Cuba

Abstract. In this article a brief introduction to metallic numbers is made. Next, these numbers are linked to the values of the Riemann zeta function at integer arguments.

***Key words*:** Metallic numbers, Riemann zeta function, irrationality.

Resumen. En este artículo se expone una breve introducción a los números metálicos. Luego, se vinculan estos números con los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros.

***Palabras clave*:** números metálicos, función zeta de Riemann, irracionalidad.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 11B37, 30B70, 14G10, 11J72, 11M06; Secondary 37B20, 11A55, 11J70, 11Y55, 11Y65.

1. Introducción

En la ciencia matemática, la aparición de los dominios numéricos ha sido un proceso evolutivo, motivado esencialmente por necesidades prácticas. El constante indagar científico con los números permite encontrar nuevas propiedades que no se limitan a una cantidad determinada, sino a toda una familia. Hoy en día se sabe que el número de oro en la antigüedad fue descubierto no como "unidad de medida", sino como una proporción entre magnitudes, conocida como *razón áurea*. De ahí que dos números x y y positivos, con $x > y$, están en proporción o razón áurea si:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}.$$

Al valor numérico de esta razón se le llama *número de oro*. La razón áurea se encuentra en algunas figuras geométricas presentes en la naturaleza. Además, se les atribuye un carácter estético especial a los objetos que poseen esta razón. Matemáticamente es notable el número de oro por expresarse como proporción entre magnitudes geométricas, es el número al cual converge la sucesión de Fibonacci y, a la vez, es raíz de una ecuación algebraica. El número de oro, denotado por la letra φ, se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} &= \frac{x}{1} \\ &\Updownarrow \\ x^2 - x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

cuyo valor es el de la solución positiva de dicha ecuación:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

El número de oro no es un número aislado: constituye un elemento de una familia de números llamados *números metálicos* [17, 37], introducida por la argentina VERA MARTHA WINITZKY DE SPINADEL en el año 1995, por su relación con la arquitectura y las aplicaciones al arte. Además, hoy en día se sabe que estos números pueden ser aplicados en cifrados de flujo, sistemas de espectro disperso, o bien en cajas de difusión o permutación [33], y en particular el número de oro está vinculado con la teoría de grafos [21]. Los números metálicos son exactamente las raíces positivas de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, con $p, q \in \mathbb{N}$. En particular, cuando $p = q = 1$, se consigue el número de oro φ, y cuando $p = 2$ y $q = 1$ se obtiene el *número de plata* $\delta = 1 + \sqrt{2}$.

El objetivo principal de este artículo es presentar algunos resultados en los que se vinculan los valores de la función zeta de Riemann con los números metálicos.

2. Relación con la función zeta de Riemann

En la historia de las matemáticas se conoce muy bien que el gran matemático LEONHARD PAUL EULER fue el primero en evaluar la función zeta de Riemann

$$\zeta(k) \equiv \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1 \frac{\log^{k-1} x}{1-x}dx, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{1\},$$

en argumentos pares, deduciendo el siguiente resultado:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

donde los B_{2k} son los llamados *números de Bernoulli* [16], aunque no ocurrió así para el caso en que los argumentos eran impares. El primer resultado en este sentido fue presentado por ROGER APÉRY [7, 38], cuando en 1979 conmovió a la comunidad matemática con una elegante y misteriosa demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$. A dicho resultado se le conoce actualmente como *teorema de Apéry*.

En realidad, un elemento crucial en la demostración presentada por APÉRY tiene que ver precisamente con la siguiente relación de recurrencia a tres términos [7, 8, 18, 38]:

$$(n+2)^3 y_{n+2} - (2n+3)(17n^2+51n+39)y_{n+1} + (n+1)^3 y_n = 0, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

la cual se satisface por los numeradores p_n y denominadores q_n de los aproximantes diofánticos a $\zeta(3)$ definidos mediante

$$q_n \equiv \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \quad \text{y} \quad p_n \equiv \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k}, \qquad (3)$$

donde

$$\gamma_{n,k} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j^3} + \sum_{1 \leq j \leq k} \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1}.$$

Además, a partir de (2) se consigue el siguiente desarrollo en fracciones continuas irregulares:

$$\zeta(3) = \frac{6\,|}{|\,5} - \frac{1\,|}{|\,117} - \frac{64\,|}{|\,535} - \cdots - \frac{n^6 \qquad |}{|\,(2n+1)(17n^2+17n+5)} - \cdots,$$

siendo $\lambda^2 - 34\lambda + 1 = 0$ la ecuación característica de dicha relación de recurrencia. Curiosamente, sus raíces están vinculadas al número de plata mediante la siguiente relación:

$$\lambda_1 = \delta^4 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \delta^{-4}.$$

De esta manera, teniendo en cuenta el teorema de Poincaré [29, 30] se deducen las siguientes relaciones , en las que también aparece el número de plata:

$$q_n = \mathcal{O}\left(\delta^{4n}\right) \quad \text{y} \quad q_n\zeta(3) - p_n = \mathcal{O}\left(\delta^{-4n}\right).$$

Equivalentemente,

$$\left|\zeta(3) - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k \geq n+1} \frac{6}{k^3 q_{k-1} q_k} = \mathcal{O}\left(\delta^{-8n}\right).$$

De igual modo que para el caso de $\zeta(3)$, APÉRY estableció una nueva demostración para la irracionalidad de $\zeta(2)$ sin llegar a recurrir al preciado resultado de EULER (1). Para este caso, dedujo que los numeradores $\tilde{p}_n$ y denominadores $\tilde{q}_n$ de los aproximantes diofánticos a $\zeta(2)$ definidos mediante

$$\tilde{q}_n \equiv \sum_{0\le k\le n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}^2 \quad \text{y} \quad \tilde{p}_n \equiv \sum_{0\le k\le n} \binom{n+k}{k}\binom{n}{k}^2 \tilde{\gamma}_{n,k},$$

donde

$$\tilde{\gamma}_{n,k} = 2\sum_{1\le j\le n} \frac{(-1)^{j-1}}{j^2} + \sum_{1\le j\le k} \frac{(-1)^{n+j-1}}{j^2}\binom{n+j}{j}^{-1}\binom{n}{j}^{-1},$$

satisfacen la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$(n+1)^2 y_{n+2} - (11n^2+11n+3)y_{n+1} - n^2 y_n = 0, \quad n \ge 1,$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 - 11\lambda - 1 = 0$. Luego, teniendo en cuenta el teorema de Poincaré [29, 30] se deduce el siguiente comportamiento asintótico, donde aparece la razón áurea o el número de oro:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|l_n^2 \tilde{q}_n \zeta(2) - l_n^2 \tilde{p}_n|} = \frac{e^2}{\varphi^5},$$

denotándose por l_n el mínimo común múltiplo de los números $1, 2, \ldots, n$.

Cabe mencionar que el tan esperado resultado de APÉRY atrajo la atención de un considerable número de investigadores matemáticos, quienes abordaron de diferentes maneras la demostración del teorema de Apéry. Por citar uno, BEUKERS en [9, 10, 26] consiguió el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} q_n\zeta(3) - p_n &= -\int_0^1\int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy}\mathcal{L}_n(x)\mathcal{L}_n(y)\,dxdy \qquad (4)\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{(xyz(1-x)(1-y)(1-z))^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz = \mathcal{O}\left(\delta^{-4n}\right), \end{aligned}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{L}_n(x)$ denotan los polinomios de Legendre, ortogonales con respecto a la medida de Lebesgue en $(0,1)$, definidos mediante

$$\mathcal{L}_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} z^n(1-z)^n = \sum_{0\le k\le n}(-1)^k\binom{n+k}{k}\binom{n}{k}z^k.$$

Resultado similar presentó para $\zeta(2)$, donde nuevamente aparece el número de oro

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n\mathcal{L}_n(x)}{1-xy}dxdy &= \tilde{q}_n\zeta(2) - \tilde{p}_n \\ &= \mathcal{O}\left(\varphi^{-5n}\right). \end{aligned}$$

SOROKIN, en [35, 39], obtuvo los aproximantes racionales de APÉRY (3) del mismo modo que BEUKERS, considerando el problema de aproximación racional

$$\begin{aligned} A_n(z)f_1(z) + B_n(z)f_2(z) - C_n(z) &= \mathcal{O}\left(z^{-n-1}\right),\\ A_n(z)f_2(z) + 2B_n(z)f_3(z) - D_n(z) &= \mathcal{O}\left(z^{-n-1}\right), \end{aligned}$$

a partir del cual consiguió lo siguiente:

$$\begin{aligned} q_n\zeta(3) - p_n &= \int_0^1 \frac{(A_n(x) - B_n(x)\log x)\log x}{1-x}dx \\ &= -\int_0^1\int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y)\, dxdy = \mathcal{O}\left(\delta^{-4n}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, en 1996 NESTERENKO, inspirado en la obra de GUTNIK [20], consideró la siguiente función racional:

$$R_n(z) = \frac{(1-z)_n^2}{(z)_{n+1}^2}, \quad (z)_n = \prod_{0\le j\le n-1} (z+j), \tag{5}$$

y de esta manera demostró que la sucesión residuo dada en (4) se podía escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_n\zeta(3) - p_n &= -\sum_{k\ge 1} \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{(1-k)_n^2}{(k)_{n+1}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{(1-\nu)_n^2}{(\nu)_{n+1}^2} \left(\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\right)^2 d\nu, \end{aligned}$$

donde L es la línea vertical Re $z = C$, $0 < C < n+1$, orientada de arriba hacia abajo.

De hecho, él aplicó a esta integral el conocido método de Laplace [23, 24], lo cual le permitió llegar al mismo comportamiento $\mathcal{O}\left(\delta^{-4n}\right)$ de la sucesión residuo (4) encontrado por BEUKERS.

Luego, en el año 2009, NESTERENKO [27] publicó una nueva demostración de la irracionalidad de $\zeta(3)$, donde nuevamente aparece el número de plata

$$\begin{aligned} (-1)^n l_n^3 \sum_{k\ge 1} \frac{\partial}{\partial k}\left(k^{-2} \prod_{j=1}^{[(n-1)/2]} \frac{k-j}{k+j} \prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{k-j}{k+j}\right) &= (-1)^{n-1} l_n^3 \left(2\mathcal{B}_n\zeta(3) - \mathcal{D}_n\right) \\ &= \mathcal{O}\left(\delta^{-2n}\right), \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} b_k \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} \left(2b_k H_k^3 + a_k H_k^2\right),$$

con

$$\begin{aligned} b_k &= (-1)^{n-1} \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]+k}{k}\binom{\left[\frac{n}{2}\right]+k}{k}\binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{k}\binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{k}, \\ a_k &= b_k\left(\frac{2}{k} + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]}\left(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j}\right) + \sum_{j=0}^{[n/2]}\left(\frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j}\right)\right). \end{aligned}$$

Aquí, $H_k^{(r)}$ denota el k-ésimo número armónico de orden r [16].

Otro resultado interesante fue el presentado por ZUDILIN en el año 2002 [41], donde también aparece el número de plata, según la siguiente relación:

$$\begin{aligned} q_n\zeta(3) - p_n &= n!^2 \sum_{k\geq 1} (-1)^n \left(t + \frac{n}{2}\right) \frac{(1-t)_n\,(t+n+1)_n}{(t)_{n+1}^2}\bigg|_{t=k} \\ &= \mathcal{O}\left(\delta^{-4n}\right). \end{aligned}$$

Ya para el 2014, en [34] el autor dedujo, a partir de una modificación de la función racional (5), la siguiente relación de recurrencia de tipo Apéry:

$$\begin{aligned} &(n+2)^4\left(24n^3+30n^2+16n+3\right)y_{n+2} \\ &\qquad - 4(n+1)(204n^6+1173n^5+2668n^4+3065n^3 \\ &\qquad\qquad + 1905n^2+634n+86)y_{n+1} \\ &\qquad\qquad\quad + n^4\left(24n^3+102n^2+148n+73\right)y_n = 0, \quad n\geq 1, \end{aligned}$$

la cual es satisfecha por los numeradores ϖ_n y denominadores η_n de los aproximantes diofánticos a $\zeta(3)$ definidos mediante

$$\eta_n = \sum_{0\leq k\leq n} d_k^{(n)} \quad \text{y} \quad \varpi_n = \sum_{1\leq k\leq n} d_k^{(n)} H_k^{(3)} + 2^{-1} \sum_{1\leq k\leq n} c_k^{(n)} H_k^{(2)},$$

donde

$$d_k^{(n)} = n^{-1}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n}{k}^2 + n^{-1}\binom{n+k-1}{k}^2\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}, \quad k=0,\ldots,n,$$

y

$$c_k^{(n)} = 2d_k^{(n)}\left[2H_k - H_{n+k-1} - H_{n-k} - 2^{-1}(n+k)^{-1}\right], \quad k=0,\ldots,n.$$

a partir de los cuales obtuvo el siguiente desarrollo en fracciones continuas irregulares para $\zeta(3)$:

$$\zeta(3) = \frac{7\,|}{|\,6} + \frac{-146\,|}{|\;\;827} + \frac{-38864\,|}{|\;\;\mathcal{Q}_3} + \frac{\mathcal{P}_4\,|}{|\,\mathcal{Q}_4} + \cdots + \frac{\mathcal{P}_n\,|}{|\,\mathcal{Q}_n} + \cdots,$$

donde

$$\mathcal{P}_n = -(n-2)^4(n-1)^4\left(24n^3-186n^2+484n-423\right)\left(24n^3-42n^2+28n-7\right),$$

y

$$\mathcal{Q}_n = 4(n-1)\left(204n^6-1275n^5+3178n^4-3999n^3+2667n^2-910n+126\right),$$

así como el siguiente desarrollo en serie:

$$\zeta(3) = \frac{7}{6} + \sum_{n\geq 1} \frac{24n^3+30n^2+16n+3}{2n^3(n+1)^3\,\Theta_n},$$

siendo

$$\Theta_n = {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n-1,-n-1,n+1,n+2 \\ \\ 1,1,1 \end{matrix}\middle|\, 1\right) {}_4F_3\left(\begin{matrix} -n,-n,n,n+1 \\ \\ 1,1,1 \end{matrix}\middle|\, 1\right),$$

donde ${}_rF_s$ denota las series hipergeométricas ordinarias; véase para más detalle [19, 22, 28]. En este caso también aparece el número de plata, como se puede apreciar:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2nl_n^3\eta_n\zeta(3) - 2nl_n^3\varpi_n\right|} = \frac{e^3}{\delta^{4n}}.$$

Se conoce, además, que de los pocos resultados desarrollados para $\zeta(4)$, se encuentran los aportados por ZUDILIN en [42, 43], donde basado en la serie de tipo hipergeométrica

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n+1}}{6}\sum_{k\geq 1}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{(1-k)_n^2(k+n+1)_n^2(2k+n)}{(k)_{n+1}^4}\right) &= q_{n,z}\zeta(4) - p_{n,z}\\ &= \mathcal{O}\left((-1)^{3n}3^{3n}\left(3+2\sqrt{3}\right)^{-3n}\right), \quad (6)\end{aligned}$$

dedujo la relación de recurrencia [45]

$$\begin{aligned}(n+1)^5 y_{n+1} - 3(2n+1)\left(3n^2+3n+1\right)\left(15n^2+15n+4\right)y_n&\\ - 3n^3\left(9n^2-1\right)y_{n-1} = 0, \quad n\geq 1,&\end{aligned}$$

donde los aproximantes racionales involucrados en (6) la satisfacen con condiciones iniciales:

$$q_{0,z} = 1, \quad q_{1,z} = 12, \quad p_{0,z} = 0, \quad p_{1,z} = 13,$$

y a partir de la misma obtuvo el desarrollo en fracciones continuas,

$$\begin{aligned}\zeta(4) = \frac{13\ |}{|\ \mathcal{P}_z(0)} + \frac{1^7\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ |}{|\quad \mathcal{P}_z(1)} + \frac{2^7\cdot 5\cdot 6\cdot 7\ |}{|\quad \mathcal{P}_z(2)} + \cdots&\\ + \frac{n^7(3n-1)(3n)(3n+1)\ |}{|\qquad \mathcal{P}_z(n)} + \cdots,&\end{aligned}$$

siendo $\mathcal{P}_z(n) = 3(2n+1)\left(3n^2+3n+1\right)\left(15n^2+15n+4\right)$. Como se observa, en (6) hace aparición un nuevo número metálico, solución de la ecuación $x^2-6x-3=0$.

En particular, para $\zeta(5)$ en [6, 13] se muestra la siguiente relación vinculada al número de oro

$$\begin{aligned}\zeta(5) = 2^{-1}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k^5\binom{2k}{k}} + \frac{5}{4}\mathrm{Li}_5(\varphi) - \frac{5}{4}\mathrm{Li}_4(\varphi)&\\ + 2^{-1}\zeta(3)\log^2\varphi - 6^{-1}\zeta(2)\log^3\varphi - 48^{-1}\log^5\varphi,&\end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{k^n},$$

es el polilogaritmo de orden n.

Los autores consideran que el resto de los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros están vinculados a los números metálicos, pero esto queda a consideración de la comunidad científica de esta área de la investigación.

Agradecimientos

Los autores agradecemos al proyecto ClaveMat, financiado por la Unión Europea, www.clavemat.com.

Referencias

[1] S. A. Abramov, *Applicability of Zeilberger's algorithm to hypergeometric terms*, ISSAC'02: Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, New York, 2002, pp. 1-7.

[2] S. A. Abramov & H. Q. Le, *A criterion for the applicability of Zeilberger's algorithm to rational functions*, Discrete Math. **259** (2002), 1-17.

[3] S. A. Abramov, *When does Zeilberger's algorithm succeed?*, Appl. Math. **30** (2003), 424-441.

[4] S. A. Abramov, J. J. Carette, K. O. Geddes & H. Q. Le, *Telescoping in the context of symbolic summation in Maple*, J. of Symb. Comput. **30** (2004), 1303-1326.

[5] H. Alzer, D. Karayannakis & H. M. Srivastava, *Series representations for some mathematical constants*, J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), 145-162.

[6] G. Almkvist & A. Granville, *Borwein and Bradley's Apéry-like formulae for* $\zeta(4n+3)$, Experiment. Math. **8** (1999), 197-203.

[7] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque, Vol. 61, 1979, pp. 11-13.

[8] J. Arvesú, *Orthogonal forms: A key tool for deducing Apéry's recurrence relation*, J. Approx. Theory, accepted (2012).

[9] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268-272.

[10] F. Beukers, *Legendre polynomials in irrationality proofs*, Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980), 431-438.

[11] F. Beukers, *Padé approximations in number theory*, Padé approximation and its applications (Amsterdam, 1980), Lecture Notes in Math., Vol 888, Springer, Berlin-New York, 1981, pp. 90-99.

[12] F. Beukers, *Consequences of Apéry's work on* $\zeta(3)$, preprint of a talk presented at the Rencontres Arithmétiques de Caen, $\zeta(3)$, Irrationnel: Les Retombées, 1995.

[13] J. M. Borwein, D. J. Broadhurst & J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta Values*, Experiment. Math. **10** (2001), 25-41.

[14] H. Cheng, B. Gergel & E. Kim, *Space-efficient evaluation of hypergeometric series*, ACM SIGSAM Bulletin. **39** (2005), no. 2, 41-52.

[15] H. Cohen, *Demonstration de l'irrationalite de* $\zeta\,(3)$ *(d'aprés R. Apéry)*, Séminaire de Théorie des Nombres, Grenoble, 1978, pp. VI.1-VI.9.

[16] J. Cohen & R. Guy, *The book of numbers*, Copernicus, Springer-Verlag New York Inc., 1997.

[17] V. Condesse & C. Minnaard, *La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro*, Revista Iberoamericana de Educación **42** (2007), no. 2, 1-9.

[18] C. Elsner, *On prime-detecting sequences from Apéry's recurrence formulae for* $\zeta\,(3)$ *and* $\zeta\,(2)$, J. Integer Sequences **11** (2008).

[19] G. Gasper & M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[20] L. A. Gutnik, *On the irrationality of certain quantities involving* $\zeta(3)$, Acta Arith. **42** (1983), 255-264.

[21] R. Kellerhals, *Scissors congruence, the golden ratio and volumes in hyperbolic 5-space*, Discrete Comput Geom. **47** (2012), 629-658, 2012.

[22] R. Koekoek & R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its* q*-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998.

[23] J. L. López, & P. J. Pagola, *The Laplace's and steepest descents methods revisited*, International Mathematical Forum **2** (2007), no. 7, 297-314.

[24] J. L. López, & P. J. Pagola, *Fórmulas explícitas para los coeficientes de los métodos de Laplace y saddle point*, XI Congreso de Matemática Aplicada, Ciudad Real, septiembre 2009, pp. 1-9.

[25] Y. V. Nesterenko, *A few remarks on* $\zeta(3)$, Math. Notes **59** (1996), no. 6, 625-636.

[26] Y. V. Nesterenko, *Integral identities and constructions of approximations to zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 535-550.

[27] Y. V. Nesterenko, *An elementary proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Moscow University Mathematics Bulletin **64** (2009), no. 4, 165-171.

[28] A. F. Nikiforov & V. B. Uvarov, *Special functions in Mathematical Physics*, Birkhauser Verlag, Basel, 1988.

[29] O. Perron, *Über die Poincarésche lineare Differenzgleichung*, J. Reine Angew. Math. **137** (1910), 6-64.

[30] H. Poincaré, *Sur les équations linéaires aux différentielles et aux différences finies*, Amer. J. Math. **7** (1885), 203-258.

[31] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$ *using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **67** (1996), 219-235.

[32] M. Petkovsek, H. S. Wilf & D. Zeilberger, $A = B$, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, M.A., 1997.

[33] F. J. Romero & R. Vázquez, *Sequences cifrantes of metallic numbers to leave of continuous fractions*, Computación y Sistemas **7** (2004), no. 4, 272-284.

[34] A. Soria-Lorente, *Nesterenko-like rational function, useful to prove the Apéry's theorem*, Notes Number Theory Discrete Math. **20** (2014), no. 2, 79-91.

[35] V. N. Sorokin, *Hermite-Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of* $\zeta(3)$, Communications of the Moscow Math. Soc. **49** (1993), 176-177.

[36] V. N. Sorokin, *Apéry's theorem*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.] **3** (1998), 48-52.

[37] V. W. Spinadel, *La familia de los números metálicos*, Cuadernos del CIMBAGE **6** (2003), 17-44.

[38] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1** (1978/79), 195-203.

[39] W. van Assche, *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, Contemporary Mathematics **236** (1999), 325-342.

[40] W. van Assche, *Hermite-Padé rational approximation to irrational numbers*, Computational Methods and Function Theory **10** (2010), no. 2, 585-602.

[41] W. Zudilin, *An elementary proof of Apéry's theorem*, E-print math. NT/0202159, Moscow Lomonosov State University, 2002, 1-8.

[42] W. Zudilin, *An Apéry-Like difference equation for Catalan's constant*, Elect. J. Comb. **10** (2003), no. 1, 1-10.

[43] W. Zudilin, *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values*, Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (June 29-30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux (2003), 593-626.

[44] W. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théorie Nombres Bordeaux (2004), 251-291.

[45] W. Zudilin, *Binomial sums related to rational approximations to* $\zeta(4)$, Math. Notes **75** (2004), 594-597.

Recibido en septiembre de 2016. Aceptado para publicación en diciembre de 2016.

FIDEL LÓPEZ NOVOA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS INFORMÁTICAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-GRANMA, CUBA
e-mail: flopezn@udg.co.cu

ANDRÉS A. GONZÁLEZ-AGUILERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS INFORMÁTICAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-GRANMA, CUBA
e-mail: agonzaleza@udg.co.cu

EDUARDO RENATO MORENO ROQUE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS INFORMÁTICAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-GRANMA, CUBA
e-mail: emorenor@udg.co.cu

PEDRO M. RICARDO-ZALDÍVAR
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA FÍSICA
FACULTAD DE CIENCIAS INFORMÁTICAS NATURALES Y EXACTAS
UNIVERSIDAD DE GRANMA
BAYAMO-GRANMA, CUBA
e-mail: pricardoz@udg.co.cu