

Índices de capacidad para la Distribución Weibull

Manuel Baro Tijerina¹, Manuel Piña Monarrez¹,
Roberto Romero López¹ y Jaime Romero González¹

¹Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Resumen

Los índices de capacidad de proceso (ICP) C_p y C_{pk} como una medición de las veces que la desviación estándar ajusta dentro de los límites de especificación del cliente, son ampliamente utilizados en la industria para medir el desempeño de los procesos normales. Como quiera, para procesos con comportamiento Weibull, los ICP basados en la distribución normal son ineficientes para medir el desempeño de los procesos Weibull, esto debido a la asimetría de la distribución Weibull. De esa forma, ICP no normales son usados para determinar el desempeño de procesos Weibull. El ICP no normal más utilizado es el método de Clement, el cual está basado en los percentiles 99.865 y 0.135, incorporado en Minitab 17 y recomendado por la ISO/TS16949. Desafortunadamente, debido a que el método utiliza la mediana como medida de tendencia central, este es ineficiente para determinar los ICP Weibull. Por otro lado, en este artículo, el método analizado para estimar los ICP Weibull, está basado en la relación Weibull/Gumbel dada en Piña et. al. 2015. La eficiencia del método, es comparada con el método normal y el método de Clements para diferentes niveles del parámetro de forma β . Los resultados muestran que el método de Piña, es más eficiente que los métodos normal y de Clements.

Palabras clave: Índice de Capacidad no Normal, Distribución Weibull, Distribución Gumbel, Distribución normal.

Introducción

Los índices de capacidad de proceso (ICP) son una medida adecuada de la capacidad que un proceso tiene para cumplir con los requerimientos del cliente, en particular en la industria automotriz este índice está normado por la ISO/TS16949. Como quiera, estos indicadores solo son eficientes cuando se cumple con el supuesto de normalidad de los datos (Gutiérrez & Salazar, 2009). Por otro lado, cuando el supuesto de normalidad no se cumple, se emplean diferentes Este método está basado en los percentiles 99.865 y 0.135 y se utiliza la mediana

métodos de transformación para normalizar los datos y así, analizarlos como si fueran normales o bien, se aplican métodos para índice de capacidad no normales (Pan & Wu, 1997). El método más empleado para el cálculo de ICP no normales y que es recomendado para su utilización en la industria por la ISO/TS16949, es el método de los percentiles de Clements (A. Czarski, 2009).

(percentil 0.50) como medida de tendencia central, para simular el comportamiento

normal de los datos, dentro de $\pm 3\sigma$ con respecto de la media μ . Esto con la expectativa de que el 99.73% de las observaciones estén dentro de especificación (Pearn, et al. 1999). Sin embargo cuando la distribución de los datos es asimétrica, como es el caso de la distribución Weibull con parámetro de forma (β), el ICP calculado resulta ineficiente (Pearn & Chen, 2002). De esa forma, utilizar el método de Clements en

el cálculo de los ICP Weibull es incorrecto ya que la distribución Weibull siempre es asimétrica, (ver Fig. 1). En particular observe que la distribución Weibull para $\beta \leq 1$ es exponencial y para valores de $\beta \ll 3$, la distribución Weibull es sesgada a la izquierda, de esa forma, el uso de la mediana en el método de Clements resultan ineficientes.

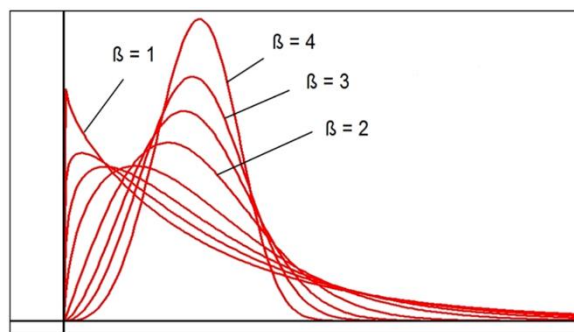


Figura 1: Comportamiento de la distribución Weibull

Por otro lado, en este artículo se analizan y comparan los ICP (C_p y C_{pk}) para datos Weibull, basados en la relación cerrada de las distribuciones Weibull y Gumbel dada en Piña 2015, los ICP normales y los ICP de Clement. Aquí, es importante hacer notar que aunque la distribución Gumbel, al igual que la distribución normal, tiene parámetros de forma y escala μ_{ev} y σ_{ev} , su comportamiento es siempre sesgado a la izquierda, lo cual la hace eficiente para determinar los índices de capacidad Weibull (C_p y C_{pk}), como fue demostrado en (Piña-Monarez, Ortiz-Yañez, & Rodríguez-Borbón, 2015). La estructura del artículo es como sigue: La Sección 2 presenta las

generalidades de los ICP normales. En la Sección 3 se presenta las generalidades del método de Clement. La Sección 4 las bases en las que se formularon los ICP Weibull es dada. En la Sección 5 se muestran los ICP Weibull basados en la relación Weibull/Gumbel. En la sección 6 se muestran los pasos para la estimación de los ICP Weibull, se da la aplicación y la comparación del método con el método normal y el método de Clement. En la Sección 7 se presentan las conclusiones. Por último, en la Sección 8 se muestran las referencias.

2. Generalidades de los ICP Normales

El índice de capacidad de proceso (ICP) está formulado de manera tal que éste mide las veces que la desviación estándar del proceso está dentro de los límites de especificación del cliente. Por otro lado, cuando se cumple que un proceso es normal y éste se encuentra bajo control estadístico, entonces la característica de calidad a medir de los elementos fabricados, se espera se encuentre entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$ (99.73%). Por otra parte, mientras que el parámetro μ depende del punto en el que se centre el proceso, el parámetro σ depende del número y la variabilidad de las causas comunes del proceso, implicando que la variabilidad natural del proceso 6σ , es intrínseca e independiente de las tolerancias que se le asignen al proceso (Rojas, 2006). Por lo tanto, sí 6σ es menor (o mayor) que el intervalo de las tolerancias a cumplir se tiene índice de capacidad está dado por

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (1)$$

Por otro lado, el índice de habilidad del proceso Cp_k , conocido también como índice de capacidad real del proceso, es considerado una versión corregida del Cp que sí toma en cuenta el centrado del proceso; y aunque existen varias formas equivalentes para calcularlo, la más común es

$$Cpk = \text{Minimo} \left[\frac{\mu - LSL}{3\sigma}, \frac{USL - \mu}{3\sigma} \right] \quad (2)$$

Cabe mencionar que cuando un proceso no tiene un comportamiento normal, las ecuaciones (1) y (2), no son empleadas para el cálculo de los índices de capacidad de proceso, en su lugar, se usa el método de los percentiles de Clements, el cual aunque es recomendado por la ISO/TS16949 para la estimación de los ICP no normales (Shauly & Parmet, 2011), para el caso Weibull, es ineficiente debido al uso de la mediana como medida de tendencia central; la Weibull está representada por el cuantil 0.632. El método de Clemets es como sigue.

3. Método de Clements para Índices de Capacidad no Normales

El métodos de los percentiles de Clement es ampliamente utilizado en la industria para el cálculo de índices de capacidad, cuando los datos de la muestra no presentan un comportamiento normal (a Czarski, 2008). Clement propuso la sustitución de los valores de 6σ por la longitud de sus los percentiles 0.135 y 0.99865, estos percentiles equivalen al valor de las 6σ que se utiliza para el cálculo de capacidad

cuando los datos son normales (A. Czarski, 2009). Las fórmulas que se utilizan en este método son:

$$Cp = \frac{USL - LSL}{x_{0.99865} - x_{0.00135}} \quad (3)$$

$$Cpk = \min\left[\frac{x_{0.5}-LSL}{x_{0.5}-x_{0.00135}}; \frac{USL-x_{0.5}}{x_{0.99865}-x_{0.5}}\right]$$

(4)

Donde $x_{0.5}$ es la mediana. De esa forma, aunque el método de Clement utiliza los estimadores estandarizados de curtosis y asimetría, basándose en las curvas de Pearson, investigaciones han demostrado que el método no es exacto cuando los valores de la muestra son sesgados (A Czarski, 2008). Por lo que los ICP basados en éste método deben de ser restringidos a procesos con tolerancias simétricas (Pearn et al., 1999). De esa forma, debido a que la distribución Weibull siempre es asimétrica (Rinne, 2009), este método no debe ser usado para estimar los ICP Weibull.

Finalmente, obsérvese que debido a la ineficiencia del método para modelar o capturar la asimetría de los datos, cuando el método es utilizado los índices estimados no pueden interpretarse como las veces que la desviación estándar está dentro de los límites de especificación analizados.

Por otro lado, para la distribución Weibull y la distribución lognormal, el método que si mide las veces que la desviación estándar ajusta dentro de las especificaciones es dado en la sección 5. Como quiera, antes de presentar el método, las bases para su formulación se dan en la siguiente sección.

4. Bases para el Método Piña

Dado que la distribución Weibull es una distribución dependiente del tiempo, es aconsejable iniciar definiendo ambos, cual es el requerimiento de confiabilidad ($R(t)$) requerido para el proceso o producto ($R(t)$ generalmente lo define el cliente), y cuál es el tiempo (t) al que se requiere que se cumpla como mínimo este índice de confiabilidad $R(t)$, (el tiempo t es el requerimiento del cliente o el periodo de Dado que el parámetro de forma (β) está relacionado con el modo de falla dominante que el producto o proceso presenta, entonces, se espera β sea constante a través del tiempo de análisis. De esa forma, el valor de β , generalmente se determina por datos históricos de ingeniería, (ver Tabla 1), o por medio de experimentación. Aquí se

garantía deseado). Luego basados en $R(t)$ y t , se deben de determinar los parámetros de la distribución Weibull que los representan. Los parámetros a estimar son: parámetro de forma β y parámetro de escala η . La estimación de dichos parámetros puede ser como sigue.

4.1 Estimación de los Parámetros de la distribución Weibull

prueban n piezas hasta la falla, y basados en el tamaño de muestra n usado y la desviación y media de los logaritmos de los tiempos de falla observados, los parámetros Weibull son estimados, (para detalles ver Piña, et. al. 2015b). Finalmente, β también es determinada de productos similares al que

se está analizando. De esa forma, basados en función densidad de probabilidad Weibull dada por

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \quad (5)$$

Al sustituir los requerimientos $R(t)$, t y el valor β seleccionado, en la función de confiabilidad Weibull dada por

$$R(t) = \exp - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \quad (6)$$

la

El correspondiente parámetro de escala (η) es estimado como

$$\eta = \frac{-1}{\ln[R(t)]^{\frac{1}{\beta}}} t \quad (7)$$

De esa forma, una vez que se tienen los parámetros Weibull que representan los requerimientos $R(t)$ y t , se hace uso de la relación Weibull/Gumbel para formular los ICP Weibull. La relación Weibull/Gumbel es como sigue.

| Item | Beta Values (Weibull Shape Factor) | | | Eta Values (Weibull Characteristic Life--hours) | | |
|------------------------------|---------------------------------------|------------|------|---|------------------|-------------|
| | Low | Typical | High | Low | Typical | High |
| Components | | | | My engineering judgment does not support the range of a few values shown in published databases | | |
| Ball bearing | 0.7 | 1.3 | 3.5 | 14,000 | 40,000 | 250,000 |
| Roller bearings | 0.7 | 1.3 | 3.5 | 9,000 | 50,000 | 125,000 |
| Sleeve bearing | 0.7 | 1 | 3 | 10,000 | 50,000 | 143,000 |
| Belts, drive | 0.5 | 1.2 | 2.8 | 9,000 | 30,000 | 91,000 |
| Bellows, hydraulic | 0.5 | 1.3 | 3 | 14,000 | 50,000 | 100,000 |
| Bolts | 0.5 | 3 | 10 | 125,000 | 300,000 | 100,000,000 |
| Clutches, friction | 0.5 | 1.4 | 3 | 67,000 | 100,000 | 500,000 |
| Clutches, magnetic | 0.8 | 1 | 1.6 | 100,000 | 150,000 | 333,000 |
| Couplings | 0.8 | 2 | 6 | 25,000 | 75,000 | 333,000 |
| Couplings, gear | 0.8 | 2.5 | 4 | 25,000 | 75,000 | 1,250,000 |
| Cylinders, hydraulic | 1 | 2 | 3.8 | 9,000,000 | 900,000 | 200,000,000 |
| Diaphragm, metal | 0.5 | 3 | 6 | 50,000 | 65,000 | 500,000 |
| Diaphragm, rubber | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 50,000 | 60,000 | 300,000 |
| Gaskets, hydraulics | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 700,000 | 75,000 | 3,300,000 |
| Filter, oil | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 20,000 | 25,000 | 125,000 |
| Gears | 0.5 | 2 | 6 | 33,000 | 75,000 | 500,000 |
| Impellers, pumps | 0.5 | 2.5 | 6 | 125,000 | 150,000 | 1,400,000 |
| Joints, mechanical | 0.5 | 1.2 | 6 | 1,400,000 | 150,000 | 10,000,000 |
| Knife edges, fulcrum | 0.5 | 1 | 6 | 1,700,000 | 2,000,000 | 16,700,000 |
| Liner, recip. comp. cyl. | 0.5 | 1.8 | 3 | 20,000 | 50,000 | 300,000 |
| Nuts | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 14,000 | 50,000 | 500,000 |
| O-rings, elastomeric | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 5,000 | 20,000 | 33,000 |
| Packings, recip. comp. rod | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 5,000 | 20,000 | 33,000 |
| Pins | 0.5 | 1.4 | 5 | 17,000 | 50,000 | 170,000 |
| Pivots | 0.5 | 1.4 | 5 | 300,000 | 400,000 | 1,400,000 |
| Pistons, engines | 0.5 | 1.4 | 3 | 20,000 | 75,000 | 170,000 |
| Pumps, lubricators | 0.5 | 1.1 | 1.4 | 13,000 | 50,000 | 125,000 |
| Seals, mechanical | 0.8 | 1.4 | 4 | 3,000 | 25,000 | 50,000 |
| Shafts, cent. pumps | 0.8 | 1.2 | 3 | 50,000 | 50,000 | 300,000 |
| Springs | 0.5 | 1.1 | 3 | 14,000 | 25,000 | 5,000,000 |
| Vibration mounts | 0.5 | 1.1 | 2.2 | 17,000 | 50,000 | 200,000 |
| Wear rings, cent. pumps | 0.5 | 1.1 | 4 | 10,000 | 50,000 | 90,000 |
| Valves, recip comp. | 0.5 | 1.4 | 4 | 3,000 | 40,000 | 80,000 |
| | | | | | | |
| Machinery Equipment | | | | | | |
| Circuit breakers | 0.5 | 1.5 | 3 | 67,000 | 100,000 | 1,400,000 |
| Compressors, centrifugal | 0.5 | 1.9 | 3 | 20,000 | 60,000 | 120,000 |
| Compressor blades | 0.5 | 2.5 | 3 | 400,000 | 800,000 | 1,500,000 |
| Compressor vanes | 0.5 | 3 | 4 | 500,000 | 1,000,000 | 2,000,000 |
| Diaphragm couplings | 0.5 | 2 | 4 | 125,000 | 300,000 | 600,000 |
| Gas turb. comp. blades/vanes | 1.2 | 2.5 | 6.6 | 10,000 | 250,000 | 300,000 |

Tabla 1: Valores Beta de Barringer

4.2 Relación de los parámetros de las Distribuciones Weibull-Gumbel

En esta sección se demuestra la relación de los parámetros de la distribución Weibull y la distribución Gumbel, con el objetivo de demostrar la relación cerrada entre estas distribuciones, y cómo es posible estimar los valores de la media y la desviación estándar Gumbel (μ_{ev} y σ_{ev}), a partir de la familia Weibull formada en la sección anterior. Para ello, se hace uso del teorema dado en (Piña-Monarez et al., 2015):

Teorema: si una variable aleatoria t sigue una distribución Weibull ($t \sim W(\eta, \beta)$), entonces su logaritmo $x = \ln(t)$ sigue una distribución Gumbel [$x \sim G(\mu_{ev}, \sigma_{ev})$].

Demostración: Sea $F(\ln(t)) = \Pr(\ln(t) \leq \ln(T))$ la función acumulada de $x = \ln(t)$, donde (T) es el tiempo de falla. Dado que en términos de x , $F(\ln(t)) = \Pr[\ln(t) \leq \ln(x)]$; $F(x) = \Pr[t \leq \exp(x)]$, entonces sustituyendo $t = \exp(x)$, en $F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)^\beta$; $F(x)$ es:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\exp(x)}{\eta}\right)^\beta\right] \tag{8}$$

Y sustituyendo $W = \left(\frac{x - \mu_{ev}}{\sigma_{ev}}\right)$, la ecuación (8) es dada por $F(x) = 1 - \exp[-\exp\{x - \ln(\eta) * \beta\}]$, la cual en términos de W es igual a:

$$F(x) = 1 - \exp^{-\exp^W} \tag{9}$$

De la ecuación (8) la función de confiabilidad es:

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp^{-\exp^W} \tag{10}$$

Y la función de densidad es dada por:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{d(t)} = -[-\exp^{-\exp^W} \exp^W] = \exp^{W - \exp^W} \tag{11}$$

Finalmente, (11) en términos de W es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_{ev}} \exp\left(\frac{x - \mu_{ev}}{\sigma_{ev}}\right) - \exp\left(\frac{x - \mu_{ev}}{\sigma_{ev}}\right) \tag{12}$$

La ecuación (12) es conocida como la distribución Gumbel (mínimo valor extremo tipo I).

Por otro lado, la relación de los parámetros de la distribución Weibull y Gumbel (Martin J. Crowder, Alan Kimber, T. Sweeting, 1994) está dada por:

$$\mu_{ev} = \ln(\eta) \tag{13}$$

$$\sigma_{ev} = \frac{1}{\beta} \tag{14}$$

De esa forma, utilizando el método de momentos (NIST/SEMATECH, 2012) los parámetros de la ecuación(12) están dados por:

$$\mu_{ev} = E(x) = \mu_\gamma + \gamma\sigma_{ev} \tag{15}$$

$$\sigma_{ev} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_\gamma \tag{16}$$

Donde μ_γ y σ_γ son la media y la desviación estándar del logaritmo de los tiempos de

falla. Finalmente una estimación de μ_γ y σ_γ , representada por $\hat{\mu}_\gamma$ y $\hat{\sigma}_\gamma$ están dados por:

$$\hat{\mu}_\gamma = \mu_{ev} - \gamma\sigma_{ev} \quad (17)$$

$$\hat{\sigma}_\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sigma_{ev} \quad (18)$$

En (17) γ es la constante de Euler ($\gamma = 0.577216$). Finalmente de la relación cerrada entre la distribución Weibull y la distribución Gumbel dada en (15-18), los ICP Weibull son formulados como sigue.

5. Índice de Capacidad Weibull

En esta sección se presentan los índices de capacidad Weibull/Gumbel, los cuales son calculados a partir de la relación de los parámetros Weibull/Gumbel, mostrados en la sección anterior. En particular, se hace notar que aunque los ICP basados en una característica de calidad, miden la habilidad del proceso para producir partes

homogéneas, debido a que en el análisis Weibull, la distribución Gumbel (ver figura 2) es usada para formular los ICP Weibull, entonces los límites de especificación (USL y LSL), se establezcan tomando el logaritmo (ln) del valor esperado del tiempo máximo y del tiempo mínimo de la familia Weibull estimada en la sección 4.1.

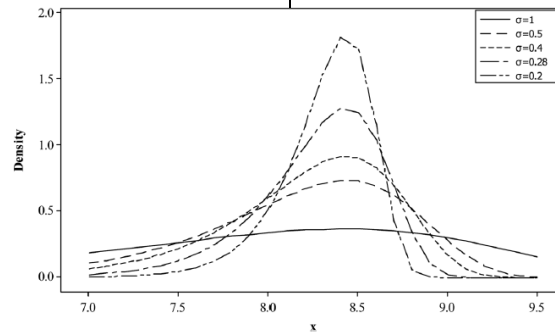


Figura 2: Distribución Gumbel con μ Constante

Por lo que se observa a partir de las ecuaciones (15) y (16), que μ_γ y σ_γ son la media y la desviación estándar de los logaritmos del componente analizado, los cuales en función de (17) y (18) dan una estimación de la media y desviación del logaritmo de los datos analizados, de esa forma, los índices de capacidad para Confiabilidad Weibull C_{pw} y C_{pkw} están dados por:

$$C_{pw} = \frac{[\ln(t_{max}) - \hat{\mu}_\gamma]}{6\hat{\sigma}_\gamma} \quad (19)$$

$$C_{pkw} = \frac{\hat{\mu}_\gamma - \ln(t_{min})}{3\hat{\sigma}_\gamma} \quad (20)$$

Finalmente, de (19) y (20), se observa que estos miden las veces que la desviación estándar estimada cabe dentro de las especificaciones.

5.1 Pasos del Método Piña

En esta sección se establecen los pasos, que son necesarios para determinar los ICP Weibull.

Determine los requerimientos $R(t)$ y t .

Determine el valor de β a utilizar. Usando este valor de β , $R(t)$ y t del paso 1 en la ecuación (7), determine el valor de η .

Utilizando los valores de β y η del paso 2, forme la familia Weibull correspondiente.

Luego utilizando β y η en las ecuaciones (13) y (14), determine los valores de la media y desviación estándar (σ_{ev} , μ_{ev}) de valor extremo (Gumbel).

Con los valores de (μ_{ev} y σ_{ev}), calcule usando (17) y (18) los valores de la media y la desviación estándar $\hat{\mu}_Y$ y $\hat{\sigma}_Y$.

De los tiempos observados (completos o con censura), tome el valor del tiempo más alto y más bajo (t_{max} y t_{min}) y calcule su logaritmo ln .

Por usar los parámetros $\hat{\mu}_Y$ y $\hat{\sigma}_Y$ del paso 5 y los logaritmos de los tiempos del paso 6, calcule los ICPs definidos en (19) y (20).

5.2 Aplicación del Método Piña

En esta sección se presenta una aplicación del método para el Cálculo de los CPI basado en la relación Weibull/Gumbel, y se compara con los métodos de percentiles de Clements, método que utiliza Minitab 17 en los ICP no normales, y además con el método de ICP para datos normales; con el fin de hacer una comparación entre los tres métodos e identificar cual método presenta

mayor eficiencia en la estimación de los ICP Weibull. Con el objetivo de diferenciar entre resultados de los tres métodos a evaluar, se establece un nivel de confiabilidad $R(t)$, se calculan los valores del parámetro de escala η , y se establecen diferentes valores para el parámetro de forma β . Suponga que para un análisis de vida acelerado con comportamiento Weibull, las especificaciones del cliente son: confiabilidad $R(t) = 96\%$, a un tiempo deseado de $t = 1500$ horas. Los valores del parámetro de forma a emplear son $\beta = 0.5, 3.5$ y 5 . Por otro lado los límites de especificación serán tomados de los datos Weibull, donde el ln del valor máximo es el límite superior de especificación $USL (t_{max})$ y el ln del valor más bajo de los datos, es el límite inferior de especificación $LSL (t_{min})$.

5.3 Procedimiento

El nivel de confiabilidad mínimo deseado es $R(t)=0.96$, para $t=1500$ hrs.

Utilizando (7), los valores de η para los diferentes valores de β son.

Para $\beta = 0.5$, $\eta = 900124.9896$. Para $\beta = 3.5$, $\eta=3740.92$. Para $\beta = 5$ $\eta = 2843.88$.

Las familias de datos Weibull formadas son: $W (0.5, 900124.9896)$, $W (3.5, 3740.92)$ y $W (5, 2843.88)$.

Se estiman los valores σ_{ev} y μ_{ev} con los valores correspondientes de $\beta = 0.5, 3.5$ y 5 , con $\eta = 900124.9896, 3740.92$ y 2843.88 .

Los valores obtenidos para las medias y desviaciones estándar de valor extremos, de acuerdo a los diferentes valores de β y η son: $(\mu_{ev} = 13.71$ y $\sigma_{ev1} = 2)$, $(\mu_{ev} = 8.23$ y $\sigma_{ev} = 0.2857)$ y $(\mu_{ev} = 7.95$ y $\sigma_{ev} = 0.2)$.

Se calculan los valores de $\hat{\mu}_Y$ y $\hat{\sigma}_Y$, con las ecuaciones (17) y (18). Obteniéndose

$\hat{\mu}_Y = 12.56, 8.06$ y 7.84 y $\hat{\sigma}_Y = 2.56, 0.366$ y 0.256 respectivamente.

Se simulan los datos con Minitab 17, para los respectivos valores de η y β , de las familias Weibull formadas en el paso 3.

| Tiempo de Falla Beta=0.5 | Tiempo de Falla Beta=3.5 | Tiempo de Falla Beta=5 | Tiempo de Falla Beta=0.5 | Tiempo de Falla Beta=3.5 | Tiempo de Falla Beta=5 |
|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 702.97 | 1346.07 | 1390.51 | 540861.3 | 3478.37 | 2702.64 |
| 4319.61 | 1744.66 | 1667.34 | 672726.1 | 3588.49 | 2762.26 |
| 11368.77 | 2003.32 | 1836.75 | 834095.1 | 3700.42 | 2822.29 |
| 22310.84 | 2205.87 | 1964.86 | 1033302 | 3815.39 | 2883.39 |
| 37685.97 | 2377.4 | 2070.61 | 1282238 | 3934.87 | 2946.3 |
| 58132.16 | 2529.26 | 2162.33 | 1598562 | 4060.79 | 3011.99 |
| 84408.45 | 2667.67 | 2244.49 | 2009873 | 4195.81 | 3081.75 |
| 117425.1 | 2796.5 | 2319.83 | 2562295 | 4343.92 | 3157.5 |
| 158283.8 | 2918.37 | 2390.14 | 3340436 | 4511.65 | 3242.36 |
| 208330.4 | 3035.18 | 2456.72 | 4522508 | 4711.2 | 3342.09 |
| 269228.7 | 3148.43 | 2520.53 | 6581957 | 4970.66 | 3469.89 |
| 343060.3 | 3259.34 | 2582.36 | 11610107 | 5390.46 | 3672.52 |
| 432467.8 | 3368.99 | 2642.87 | | | |

Tabla 2: Valores de Tiempo Weibull con Beta=0.5, 3.5 y 5 con Minitab 17.

Los resultados de los Índices de Capacidad Weibull (C_{pw} y C_{pkw}) de la aplicación, para los diferentes niveles de $\beta = 0.5, 3.5$ y 5 , se muestran a continuación:

| Beta (β) | C_{pw} | C_{pkw} |
|---------------------|------------|------------|
| 0.5 | 0.24136631 | 0.78186013 |
| 3.5 | 0.24243443 | 0.77873906 |
| 5 | 0.23999567 | 0.78460174 |

Tabla 3: Índices de Capacidad Weibull

Con el objetivo es hacer un comparativo del método ICP basado en la relación Weibull/Gumbel, con los métodos de ICP basados en el método de ICP normal de la

sección 2 y el método de los percentiles de Clements de la sección 3, para los datos de la tabla 2, se calcularon los ICP normal y de Clement usando Minitab 17. Los resultados

obtenidos para los diferentes métodos se presentan en la siguiente tabla, así como también los cálculos del método basado en

la relación Weibull/Gumbel para los ICP (C_p y C_{pk}) Weibull.

| Método | C_p | C_{pk} | Método | P_p | P_{pk} | Método | C_{pw} | C_{pkw} |
|----------------------|-------|----------|------------------------|-------|----------|--------------------|------------|------------|
| Normal $\beta = 0.5$ | 4.51 | 1.19 | Clements $\beta = 0.5$ | 0.39 | 0.38 | Piña $\beta = 0.5$ | 0.24136631 | 0.78186013 |
| Normal $\beta = 3.5$ | 4.34 | 4.16 | Clements $\beta = 3.5$ | 0.7 | 0.69 | Piña $\beta = 3.5$ | 0.24243443 | 0.77873906 |
| Normal $\beta = 5$ | 4.3 | 4.19 | Clements $\beta = 5$ | 0.68 | 0.63 | Piña $\beta = 5$ | 0.23999567 | 0.78460174 |

Tabla 4: Comparación de Métodos para Índices de Capacidad

De la tabla 4, se observa una diferencia significativa entre los ICP estimados por los métodos. Así, la conclusión es que debido a que (19) y (20), realmente miden las veces que la desviación estándar cabe dentro de

los límites de especificación y a que $\hat{\mu}_Y$ y $\hat{\sigma}_Y$ estimados en (17) y (18), son derivadas directamente de los parámetros Weibull, el método de Piña es eficiente para determinar los ICP de procesos Weibull.

6. Conclusiones

Una vez determinados los requerimientos del cliente $R(t)$ y t y seleccionado el valor de β a utilizar, el correspondiente valor de η en (7), está completamente determinado. Esto implica que la familia Weibull formulada en el paso 3 del método dado en la sección 4.1, *completamente* representa los requerimientos del cliente, por lo que los CPI que de estas relaciones se derivaron en ecuaciones (19) y (20), también representan dichos requerimientos. Debido a que como se puede observar de (19) y (20), los ICP estimados, miden las veces que la

desviación estándar cabe dentro de las especificaciones, entonces, estos ICP Weibull tienen el mismo significado que los ICP normales. Dado que la distribución Weibull y la distribución Gumbel están completa y directamente relacionadas por las ecuaciones (13) y (14), y debido a que la distribución Gumbel es siempre sesgada a la izquierda, entonces, la distribución Weibull es siempre asimétrica, implicando que los CPI normal y de Clement son siempre ineficientes para estimar los CPI Weibull.

Referencias

Czarski, a. (2008). Estimation of process capability indices in case of distribution unlike the normal one. Archives of Materials Science and Engineering, 34(1), 39–42. <http://doi.org/http://www.archivesmse.org/>

Czarski, A. (2009). ANALYSIS OF CLEMENTS METHOD, 35(1), 55–64.

Gutiérrez, H., & Salazar, R. (2009). Control estadístico de la calidad y seis sigmas.

Martin J. Crowder, Alan Kimber, T. Sweeting, R. S. (1994). *Statistical Analysis of Reliability Data* (1st ed.). Retrieved from https://books.google.com.mx/books?id=LEI_1aJDygAC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

NIST/SEMATECH. (2012). *e-Handbook of Statistical Methods*. Retrieved January 1, 2015, from <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda366g.htm>

Pan, J. N., & Wu, S. L. (1997). Process capability analysis for non-normal relay test data. *Microelectronics Reliability*, 37(3), 421–428. [http://doi.org/10.1016/S0026-2714\(96\)00071-6](http://doi.org/10.1016/S0026-2714(96)00071-6)

Pearn, W. L., Chen, K. S., & Lin, G. H. (1999). A generalization of Clements' method for non-normal Pearsonian processes with asymmetric tolerances. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 16(5), 507–522. <http://doi.org/10.1108/02656719910243618>

Piña-Monarez, M. R., & Ortiz-Yañez, J. F. (2015)b. Weibull and lognormal Taguchi

analysis using multiple linear regression. *Reliability Engineering & System Safety*, 144, 244–253. <http://doi.org/10.1016/j.res.2015.08.004>

Piña-Monarez, M. R., Ortiz-Yañez, J. F., & Rodríguez-Borbón, M. I. (2015). Non-normal Capability Indices for the Weibull and Lognormal Distributions. *Quality and Reliability Engineering International*, n/a–n/a. <http://doi.org/10.1002/qre.1832>

Rinne, H. (2009). *Distribution The Weibull Distribution A Handbook*. (T. & F. Group, Ed.). Giessen, Germany. <http://doi.org/10.1201/9781420087444>

Rojas, P. A. R. (2006). *Control estadístico de procesos*, 1–74.

Shauly, M., & Parmet, Y. (2011). Comparison of Pearson distribution system and response modeling methodology (RMM) as models for process capability analysis of skewed data. *Quality and Reliability Engineering International*, 27(5), 681–687. <http://doi.org/10.1002/qre.1232>