Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra

Proofs without words, visualization, animation and GeoGebra

CARMEN VIEIRA MATHIAS [1]

HILÁRIO ALENCAR DA SILVA [2]

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS[3]

http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077

RESUMO

Este artigo apresenta uma pesquisa teórica que tem por objetivo expor exemplos de demonstrações visuais denominadas Provas Sem Palavras (PSP), com base em fundamentos teóricos da habilidade de visualização. Foram considerados cinco problemas geométricos constantes de literatura específica, a fim de se utilizar o software de matemática dinâmica GeoGebra para realizar as PSP. Empregou-se, principalmente, as ferramentas sequências e controles deslizantes, que propiciam aspectos dinâmicos visuais fundamentais para o que se pode compreender como demonstração. Além desses recursos, translações, rotações e reflexões fazem parte na fundamentação das PSP, pois entende-se que tais aspectos são relevantes para a melhor compreensão de teoremas fundamentais no ensino e aprendizagem de Geometria, especialmente na escola básica.

Palavras-chave: *visualização; animações; provas sem palavras.*

ABSTRACT

This paper presents a theoretical research that aims to present examples of visual demonstrations called Proofs Without Words (PSP), based on theoretical fundamentals of visualization ability. We considered five geometric problems in the literature to use the GeoGebra dynamic mathematics software to perform the PSP. Mainly, we used the sequences tools and sliders, which provide fundamental dynamic visual aspect for what can be understood as a demonstration. In addition to these resources translations, rotations, reflections take part in the grounds of the PSP, which we believe to be relevant to a better understanding of important theorems for teaching and learning geometry, particularly in elementary school.

Key-words: *visualization; animations; proofs without words.*

[1] Universidade Federal de Santa Maria - UFSM – carmen@ufsm.br
[2] Universidade Federal de Alagoas - UFAL –hilario@mat.ufal.br - https://orcid.org/0000-0002-1315-8048
[3] Universidade Franciscana - UFN – leivasjc@ufn.edu.br -https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

Introdução

Pedersen, Mancosu e Jorgensen (2005) debatem sobre o potencial da contribuição das representações visuais nas demonstrações de resultados em Matemática. Conforme Mancosu (2005):

> [...] o interesse pela visualização na lógica e na matemática surgiu como consequência dos desenvolvimentos em diferentes áreas, incluindo ciência da computação, matemática, educação matemática, psicologia cognitiva e filosofia. Quando se fala de renascimento na visualização, há uma implicação óbvia de que a visualização foi relegada a um papel secundário no passado. Geralmente se refere ao fato de que o desenvolvimento da matemática no século XIX mostrou que afirmações matemáticas que pareciam óbvias por conta de uma visualização intuitiva e imediata revelaram-se incorretas em uma inspeção mais próxima (Mancosu, 2005, p.13, "tradução nossa").

Outro fator que instiga essas discussões é a premissa de que representações visuais devem ser tratadas como um acompanhamento figurativo nas demonstrações, ou como parte integrante da prova ou como a própria demonstração (HANNA & SIDOLI, 2007; GIAQUINTO, 2007; NÓBRIGA, 2019).

Em particular, Nóbriga (2019) apresenta um conceito denominado "Demonstrações Matemáticas Dinâmicas", o qual, segundo o autor, não se refere a uma nova forma de demonstração, mas a um tipo específico realizado em ambientes de Matemática Dinâmica com a finalidade de explicar e não apenas de validar.

Devido a esse dinamismo proveniente das tecnologias digitais, é possível aliar as demonstrações matemáticas ou, até mesmo, as resoluções de problemas, a animações. Conforme Lin e Atkinson (2011), muitas pesquisas têm sido conduzidas no intuito de investigar questões relativas ao uso de representações visuais estáticas e dinâmicas em ambientes de aprendizagem multimídia. Nesse sentido, duas questões importantes são desenvolvidas: a eficácia relativa do formato (ou seja, animação *versus* mídia estática) e os potenciais benefícios instrucionais da representação visual.

Pensando no ensino aprendizagem de Matemática, existem ambientes de aprendizagem multimídia que podem proporcionar os benefícios acima mencionados, como os já referidos ambientes de Matemática Dinâmica, em particular o *software* GeoGebra. Tal ambiente possui um aspecto peculiar, que é o de proporcionar ao usuário a manipulação e a animação das construções realizadas, de forma que não percam suas propriedades inerentes. Além disso, é possível obter a sua posterior visualização, a fim de perceber possíveis generalizações. Apesar de ser um software que está disponível, de forma gratuita, há mais de uma década, nem sempre essa característica de manipulação, que o torna de fato um ambiente de Matemática Dinâmica, é explorada.

Para quem trabalha diariamente com o GeoGebra, perceber uma imagem, animação ou resultado matemático e pensar em como reproduzir isso utilizando as ferramentas que o *software* possui é algo comum. Assim, a pesquisa realizada por Alencar, Cândido e Farias (2019) serviu de inspiração para a produção do presente artigo. Observou-se que o foco desses autores não foi explorar as características inerentes a um ambiente de aprendizagem multimídia, mas construir sequências de figuras para visualizar a resolução de alguns problemas em Matemática. Dessa forma, vendo o potencial de movimento que as resoluções elaboradas possuíam, surgiu um forte interesse em reproduzi-las envolvendo animações.

Assim, o objetivo desse artigo é apresentar, na forma de animações, os exemplos de demonstrações visuais (ou PSP) de alguns resultados enunciados em Alencar, Cândido e Farias (2019). Os exemplos, criados com o GeoGebra pelos autores, serão apresentados de forma a enfatizar as potencialidades que o *software* possui, sem passar um protocolo de construção, mas exprimindo as ideias do que foi realizado em cada caso. Neste artigo, são apresentadas as seis primeiras resoluções visuais elaboradas por eles, sendo que as demais construções estão disponíveis em um GeoGebrabook[4] especialmente construído para apresentar as PSP .

1. Sobre provas sem palavras e visualização

Segundo Alsina e Nelsen (2012), demonstrações visuais ou provas sem palavras (do inglês *Proofs Without Words - PWW)* são imagens ou esquemas que auxiliam a entender por que uma afirmação matemática específica pode ser verdadeira, e a perceber como começar a provar que tal afirmação é válida. Para Casselmann (2000) *apud* Gierden (2007),

> uma prova sem palavras pode ser pensada como uma "prova" que faz uso de representações visuais, isto é, imagens ou outros meios visuais para mostrar uma ideia matemática, equação ou teorema. Não contém quaisquer palavras além de símbolos literais ou numéricos e desenhos geométricos, por exemplo. (GIERDIEN, 2007, p.65, “tradução nossa”)

Na década de 70, conforme Nelsen (1993), em quase todas as edições das revistas publicadas pela Associação Matemática da América, as PSP eram bem

[4] https://www.GeoGebra.org/m/bgvhmxh8

comuns. Elas começaram a aparecer na *Mathematics Magazine,* por volta de 1975, e no *College Mathematics Journal*, cerca de dez anos mais tarde.

Existe uma discussão se realmente uma PSP se qualifica como uma demonstração. Conforme explicam Alsina e Nelsen (2012, p.-) “Alguns argumentam que as PSP não são realmente provas, nem são, aliás, sem palavras, por conta das equações que frequentemente as acompanham”

Por mais esclarecedoras que as PSP possam ser, “sem estrutura formal e semântica lógica, elas não podem garantir qualquer tipo de verdade” (MULLER, 2012, p.21, “tradução nossa”), ou seja, a natureza das PSP as impossibilita de serem chamadas de provas/demonstrações sob a visão formalista. Nesse sentido, o autor usa as palavras de James Robert Brown para resumir o ponto de vista daqueles que não acreditam que as PSP são provas.

> Os matemáticos, como o resto de nós, valorizam ideias inteligentes; em particular, eles se encantam com uma imagem engenhosa. Mas essa apreciação não subjulga um ceticismo predominante. Afinal de contas, um diagrama é (no melhor dos casos) apenas um caso especial e, portanto, não é possível estabelecer um teorema geral. Ainda pior, pode ser francamente enganador. Embora não seja universal, a atitude predominante é que as imagens não são mais que dispositivos heurísticos; eles são psicologicamente sugestivos e pedagogicamente importantes, mas não provam nada. " (BROW, 1997 apud MILLER, 2012, p.21“tradução nossa”,)

Hanna (1989) contribui para o debate sobre a natureza de uma prova em Matemática estabelecendo uma diferença entre as provas que provam e as provas que explicam. As provas que "provam" são aquelas que verificam um teorema, ou seja, que convencem de que tal afirmação é verdadeira. As provas que "explicam” são aquelas que mostram porque um teorema ou afirmação é verdadeira.

Gierdien (2007) defende as PSP, enfatizando que, para interpretar uma prova sem palavras, é necessário explicações que se baseiem em várias ideias matemáticas, as quais não necessariamente estão evidentes na imagem ou esquema. Quando se inicia o processo de desvendar e explicar os diagramas ou imagens que compõem uma PSP, esta pode se tornar uma "prova que explica", em oposição a uma "prova que prova". Ou seja, as PSP “tornaram-se provas que explicam via visualização como processo e produto” (GIERDIEN,2007, p.60, “tradução nossa”). Para o autor o produto é um meio de dar suporte sobre a capacidade do aluno de descrever a demosntração.

O mesmo autor refere-se à visualização, no caso de uma PSP, colocando-a como um atrativo para "preencher as palavras", a fim de tornar verdadeiro o teorema ou afirmação nesse tipo de tarefa. Isto é, ao se debruçar sobre uma PSP deve-se tentar "ver a matemática invisível" (ARCAVI, 2003) por meio da visualização.

Nesse caso, “os processos de visualização, como generalizar, observar, inferir, representar, prever, descrever por meio da anotação do que é observado e verbalizar são aplicáveis” (GIERDIEN,2007, p.60, “tradução nossa”).

Para Giaquinto (1992), a visualização é uma experiência individual que ocorre em um espaço mental interno. Esse autor preocupa-se com os aspectos epistêmicos dessa experiência interior. Um dos seus principais interesses é o uso da imaginação visual para descobrir verdades matemáticas. Nas palavras dele, “Descobre-se a verdade chegando a acreditar de uma maneira epistemicamente aceitável” (GIAQUINTO, 1992, p. 382).

Essa concepção de descoberta permite que o autor faça duas afirmações importantes: a) a descoberta exige independência, ou seja, não se deve aceitar cegamente a afirmação do outro; b) a aceitabilidade epistêmica depende de uma congruência maior: uma descoberta não é válida se entrar em conflito com outras crenças adquiridas independentemente.

Nesse sentido, afirma-se que se convencer de que uma PSP é, de fato, uma prova, é uma experiência indivual e depende do nível de maturidade matemática de cada um.

2. As provas sem palavras e sua conexão com o GeoGebra

Hitt Espinosa (1997) sugere que visualizar não significa a mesma coisa que ver. Em sua opinião, a visualização representa a capacidade de criar imagens ricas e mentais, com as quais é possível criar diferentes representações de conceitos matemáticos e, se necessário, usar papel ou computador.

Quanto ao uso do computador, Arcavi (2003) afirma que os ambientes dinâmicos não só permitem aos alunos a construção e a visualização de figuras com determinadas propriedades, mas também possibilitam que o usuário transforme essas construções em tempo real. Algumas pesquisas realizadas no Brasil (FERREIRA, SOARES, LIMA (2009); GRAVINA, SANTAROSA (1999); NÓBRIGA, 2019), mostram que esse dinamismo pode contribuir para formar o hábito de generalizar um caso particular (mentalmente ou por meio de uma ferramenta). Isso facilita o estudo de variações, sugere alguns invariantes geométricos de forma visual e pode fornecer um embasamento intuitivo para justificativas formais de propriedades matemáticas.

As demonstrações/provas possuem vários propósitos/ funções em Matemática. A esse respeito, Hanna (2000), a partir de diversas fontes, realiza uma compilação de tais objetivos:

- verificação (preocupa-se com a verdade de uma afirmação);

> • explicação (fornece informações sobre por que a afirmação é verdade);
> • sistematização (preocupa-se com organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas);
> • descoberta (preocupa-se com a descoberta ou invenção de novos resultados)
> • comunicação (transmite o conhecimento matemático);
> • construção de uma teoria empírica;
> • exploração do significado de uma definição ou as conseqüências de uma suposição;
> • incorporação de um fato conhecido em uma nova estrutura e a possibilidade de visualizá-lo sob uma nova perspectiva. (HANNA, 2000, p.8, "tradução nossa")

A autora afirma, ainda, que a disponibilidade, em sala de aula de *software* com recursos gráficos dinâmicos, deu um novo impulso à exploração matemática e, em particular, redespertou o interesse ao ensino da geometria. Ela alega que esses *softwares* auxiliam os alunos a compreenderem as proposições, o que facilita sua compreensão quanto ao significado destas. Além disso, a pesquisadora afirma que aqueles que utilizam tais recursos podem testar facilmente conjecturas, explorando determinadas propriedades das construções que produziram, ou, até mesmo, "descobrindo" novas propriedades.

Pecebendo as funções de uma demonstração em Matemática e as potencialidades do GeoGebra como um *software* dinâmico, serão apresentados, a seguir, exemplos de construções de PSP realizadas em tal ferramenta. Descreve-se o protocolo utilizado e, principalmente, explora-se a função "incorporação de um fato conhecido em uma nova estrutura e a possibilidade de visualizá-lo sob uma nova perspectiva", citada em Hanna (2000, p.8).

Considera-se como animação a representação visual que "gera uma série de quadros, de modo que cada quadro aparece como uma alternação do anterior" (BÉTRANCOURT e TVERSKY, 2000, p. 313). Ou seja, visto a sua natureza, a animação é capaz de apresentar eventos que mudam com o tempo, como movimento, processos e procedimentos. Algumas pesquisas (YANG, ANDRE e GREENBOWE (2003); KRIZ e HEGARTY (2007)) afirmam que as animações fornecem um suporte maior, para que os alunos possam construir representações internas dinâmicas, e não apenas gráficos estáticos.

Os exemplos a seguir são animações das resoluções visuais retiradas do artigo original de Alencar, Cândido e Farias (2019), as quais estão apresentadas na mesma ordem.

3. Os exemplos

A primeira resolução visual apresentada no artigo refere-se ao Teorema de Pitágoras, que possui muitas demonstrações, sendo a que foi utilizada é conhecida como geométrica, como ilustra a Figura 1.

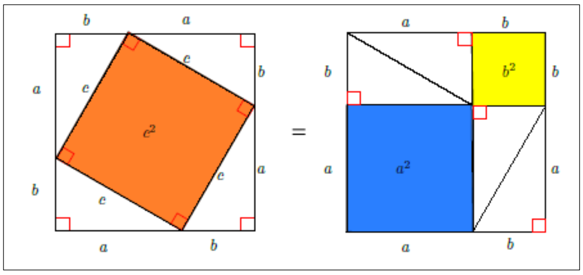

FIGURA 1: Etapa final da resolução visual apresentada no artigo referência
FONTE: Alencar, Cândido e Farias (2019, p.4)

Segundo Miller (2012), a figura resultante é creditada a Zhou Bi Suan Jing, um antigo matemático chinês. Na opinião do autor, "É uma prova visual encantadoramente simples do Teorema de Pitágoras, um dos resultados mais fundamentais da matemática. Seria difícil argumentar que essa prova não é convincente" (MILLER, 2012, p.1)

Para realizar a animação que resultará na PSP[5], começou-se construindo controles deslizantes. Nesse caso específico, foram utilizados dois controles que representam as medidas dos catetos do triângulo retângulo inicial.

Após construir o triângulo retângulo, determinou-se o baricentro e arquitetou-se uma sequência de rotações com centro nesse baricentro, de modo a encaixar os triângulos determinados pela sequência no formato de um quadrado (Figura 2).

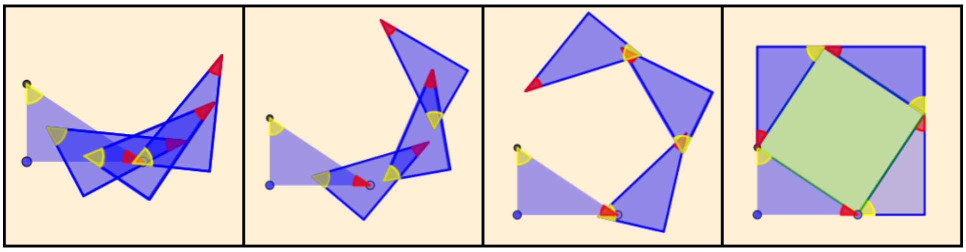

FIGURA 2: Sequência de rotações

O próximo passo foi aplicar translações a dois elementos (triângulos) da sequência. Para isso, foi utilizado o comando *Transladar (<Objeto>, <Vetor>)* e, no lugar do objeto, o comando *Elemento (<Lista>, <Posição do Elemento>)*, onde a lista incorporada foi a sequência construída anteriormente com o vetor foi

[5] https://www.GeoGebra.org/m/bgvhmxh8#material/trv6fq9t

previamente construído. Usando a mesma ideia, aplicamos rotações aos outros dois elementos da lista. A Figura 3 ilustra o resultado.

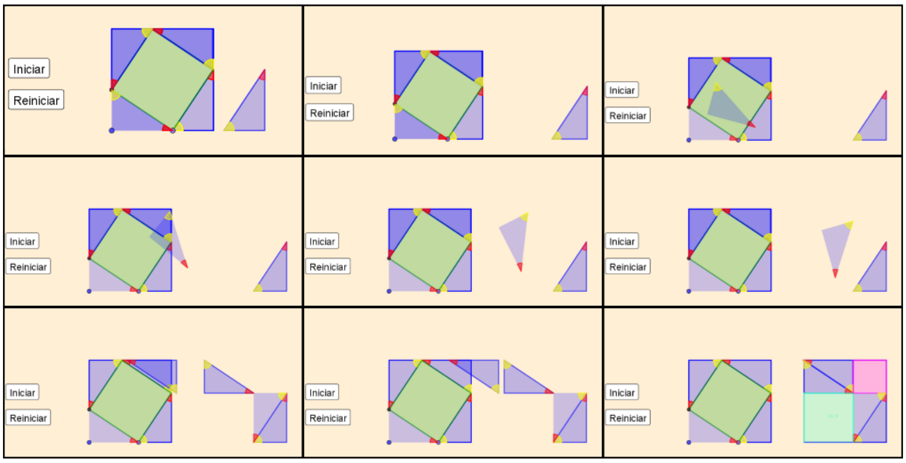

FIGURA 3: Sequência de rotações

Após realizar esses passos, colocou-se um botão que fornece a animação. Para fazê-lo, houve a necessidade de construir, previamente, alguns artifícios, como criar controles deslizantes que forneceram os ângulos de rotação (γ, ε e δ, ilustrados na Figura 4A) e pontos pertencentes aos vetores de translação, cujos parâmetros são controles deslizantes (t_1 e t_2 na Figura 4A).

Para programar os botões, foi necessário, previamente, estabelecer condições para cada um dos controles deslizantes, na aba programação. Por exemplo, o controle deslizante γ foi o responsável pela primeira rotação realizada, e o segundo controle ativado foi o t_1. Assim, para que o GeoGebra realizasse essa transição, automaticamente, de um controle para o outro, foi inserida a condição *Se(γ==90°,IniciarAnimação(t_1)),* na aba programação, ao atualizá-la, como ilustra a Figura 4B.

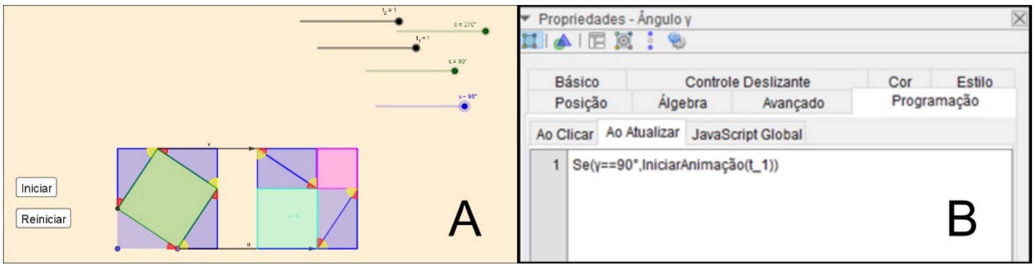

FIGURA 4: Controles deslizantes que fornecem movimentos (A) e condicional para os mesmos (B)

Essa mesma ação foi realizada para os demais controles, respeitando a ordem em que deveriam ser ativados. Para finalizar, inseriu-se uma condição, na aba programação, do botão denominado iniciar, e condições na aba do botão reiniciar, conforme ilustra a Figura 5.

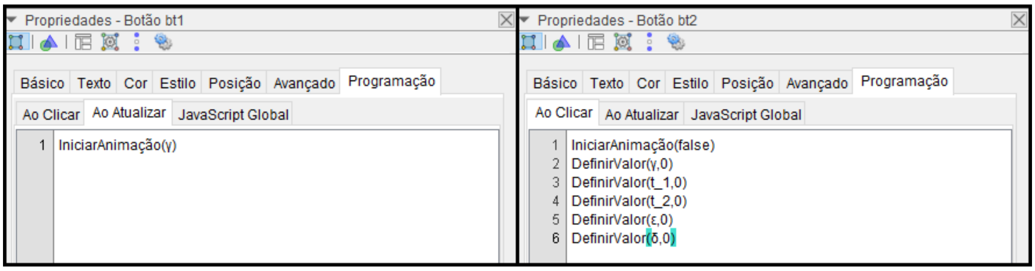

FIGURA 5: Condicional para o controle deslizante

A segunda PSP[6] descrita no artigo referência trata-se de um diagrama de pontos. Segundo Giaquinto (2007), desde a matemática antiga são usados para convencer verdades elementares da teoria dos números. Alencar, Cândido e Farias (2019) apresentam um exemplo usado para justificar que a soma dos n primeiros números impares resulta em n^2, o qual, neste trabalho, exploraremos com recurso computacional.

Inicialmente, a animação foi construída a partir de três pontos A, B e C e dois vetores AB e AC. Também criou-se um controle deslizante, o qual irá determinar o número de pontos no diagrama. Depois, utilizou-se o comando sequência para definirmos duas sequências. A primeira é constituida de pontos verticais que, posteriormente, são transladados, via o comando *Sequência(Transladar(ParteDaLista(L, 1, n - i), Vetor(i u)), i, 1, n),* para formar um diagrama de pontos na forma triangular.

Observou-se que o diagrama não representa os n primeiros números impares e, para conseguir essa ideia, houve a necessidade de expandir a imagem, o que foi feito criando o ponto D e o vetor AD (simético do vetor AB). Após criamos a sequência que completou o diagrama (Figura 6).

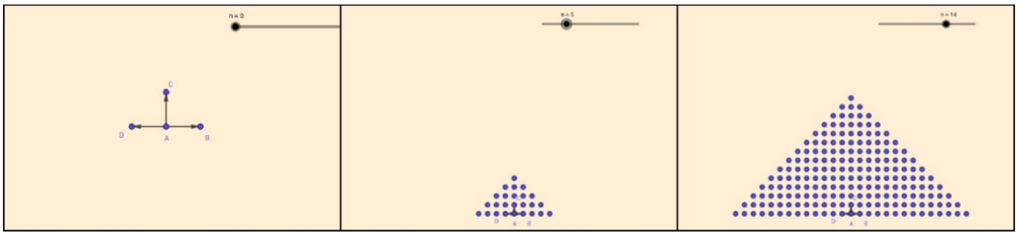

FIGURA 6: Diagrama completo

[6] https://www.GeoGebra.org/m/bgvhmxh8#material/ae6ychmt

Para animar a sequência, do mesmo modo que na primeira construção, foram criados botões para Iniciar e Reiniciar a animação. Também, foi necessário utilizar mudar a cor da última sequência construida (para ser fiel ao artigo de referência). A estratégia para realizar a mudança de cores foi utilizar um controle deslizante com uma condicional *(Se(t==1,IniciarAnimação(α)),* onde α é um controle deslizante que possibilita a rotacionar a sequência dos pontos coloridos) Após, rotacionou-se a sequência dos pontos coloridos, formando um quadrado (Figura 7).

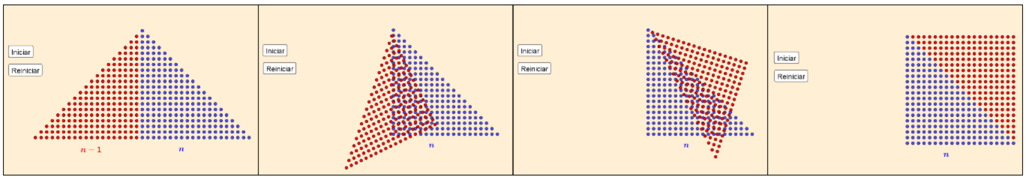

FIGURA 7: Esquema da animação resultante

Observou-se que a PSP apresentada na animação, utilizando o GeoGebra, não pode ser aplicada para *n=1*, mas permite modificar o valor de n (nesse caso foi feito para *n=20*, mas isso pode ser extrapolado). Essa não é uma demonstração formal (que nesse caso seria feita por indução), mas permite perceber um caminho a ser percorrido para chegar à formalização.

Alencar, Cândido e Farias (2019) também ilustram uma PSP, originalmente apresentada em Mabry (1999), Figura 8.

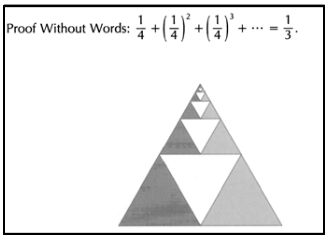

FIGURA 8: Ilustração original do sexto problema apresentado em Alencar, Cândido e Farias (2019)
FONTE: Mabry (1999, p.63)

A animação construída[7], com base nas duas referências citadas anteriormente, refere-se à série geométrica de razão *1/4*. Começou-se a construção com dois controles deslizantes (“a”, que indica a medida do lado do triângulo isósceles a ser construído, e “n”, que designa o número de “termos” representados pelas áreas dos triângulos internos ao primeiro triângulo). Após, construiu-se o triângulo isósceles e

[7] https://www.GeoGebra.org/m/bgvhmxh8#material/gachvpwc

um círculo, cujo raio mede *a/n*. Esse raio especifica o tamanho do lado de cada um dos triângulos interiores.

Posteriormente, criou-se os pontos D e E, de interseção da circunferência com os lados do triângulo; um triângulo de vértices ADE e vetores AD e AE. Tais vetores foram criados com o intuito de serem as direções das translações do triângulo ADE, por meio de duas sequências. Além disso, o número de triângulos internos varia conforme modifica-se o valor de *n*, como ilustra a Figura 9.

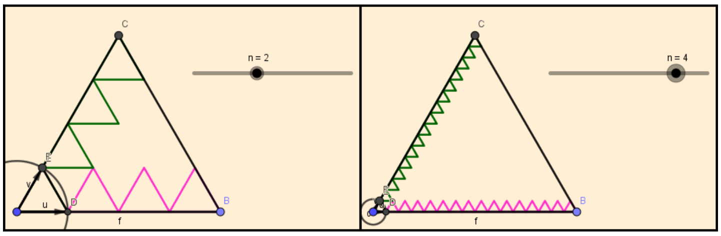

FIGURA 9: Construção das sequências

Depois, criou-se reta AB, que serviu de suporte para a construção e uma circunferência cujo raio mede *a/4*, apenas para separar os triângulos a serem construídos. Marcou-se o ponto de interseção da circunferência com a reta (Ponto G) e criou-se o vetor AG, que foi utilizado na sequência de translações da primeira lista anteriormente construída.

O próximo passo foi desenvolver um artificio para construir os triângulos internos. Marcou-se um ponto H qualquer e, com centro nesse ponto, foram construídas circunferências de raios *a/n* e triângulos isósceles de lados com a mesma medida (Figura 10A). Posteriormente, criou-se um vetor HA e transladou-se os triângulos construídos para a figura original, via esse vetor (Figura 10B).

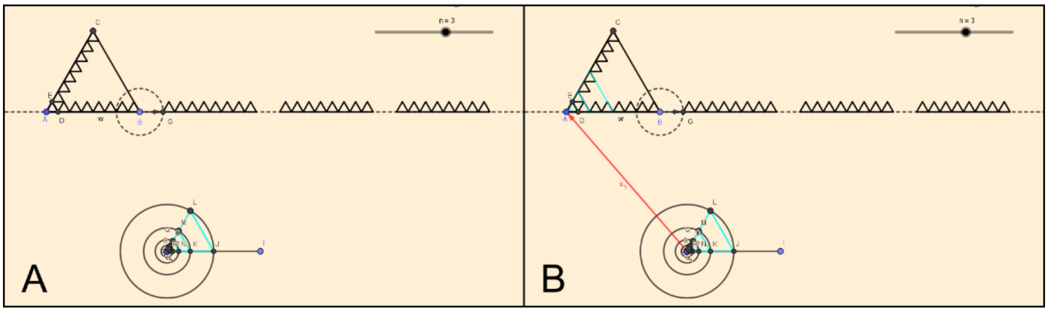

FIGURA 10: Outras translações

Na sequência, foram realizadas combinações lineares dos vetores AE e AG e transladados os triângulos anteriormente construídos (chamados, neste trabalho, de triângulos azuis), via tais combinações, para os seus lugares de destaque nas sequências que foram posteriormente criadas. A Figura 11 ilustra os vetores e os polígonos transladados.

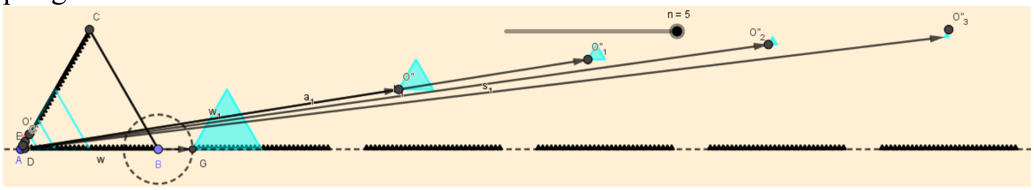

FIGURA 11: Translação dos polígonos

Em seguida, completou-se o interior do primeiro triângulo construído com triângulos isósceles de lado *a/n*, por meio do comando *Sequência(Transladar(ParteDaLista)),* como realizado no segundo problema aqui apresentado. A Figura 12 ilustra essa construção.

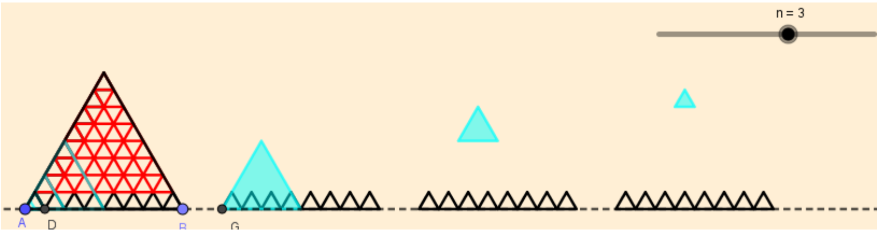

FIGURA 12: Construção dos triângulos internos

A nova sequência de triângulos foi transladada, via outra sequência, para completar os demais triângulos necessários à animação (Figura 13).

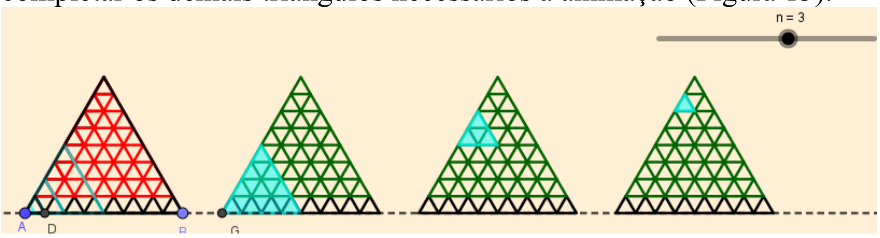

FIGURA 13: Construção da segunda sequência de triângulos internos

O "n" criado varia de 1 até 5, e o espaço deixado entre cada triângulo da sequência mede *a/4*. Assim, transladou-se o ponto A, via o vetor 6AG, obtendo um ponto A'. Construiu-se segmento AA', depois um controle deslizante *t* e um ponto U sobre o segmento AA', o qual irá se mover sob esse segmento, por meio do parâmetro *t*. Também, criou-se o vetor AU e transladou-se o primeiro triângulo desenvolvido via esse vetor.

Esse mesmo procedimento foi utilizado para realizar a translação dos triângulos azuis (Figura 14).

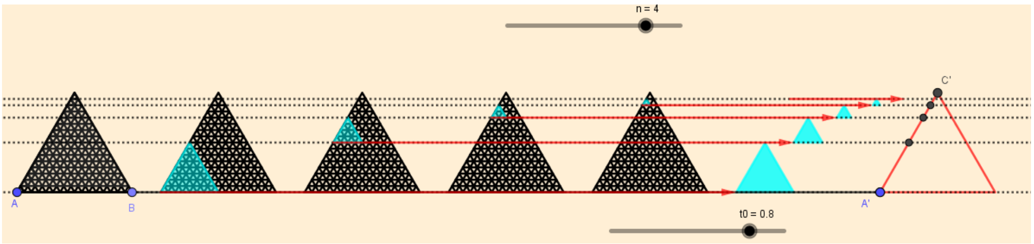

FIGURA 14: Translação dos triângulos internos

O próximo passo constitui-se a partir da inserção de sinais de adição e igualdade entre as figuras. Salienta-se que, matematicamente, esses símbolos entre as figuras geométricas não têm nenhum significado, porém o intuito foi seguir o artigo referência.

Depois, criou-se uma reta perpendicular à reta base, passando pelo ponto G e circunferências com raios dependentes de "a". Isso tem a finalidade de usar o procedimento de translação usando controles deslizantes, conforme descrito anteriormente para transladar os últimos triângulos construídos. Após essa etapa, transladou-se os triângulos azuis e, para trazer um efeito visual na animação, condicionou-se que o triângulo externo somente iria aparecer quando o controle deslizante que serviu de parâmetro para essa translação fosse igual a 1, como ilustra a Figura 15.

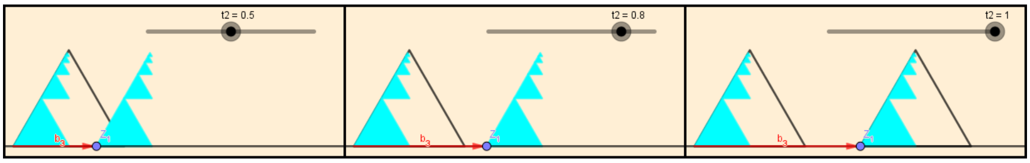

FIGURA 15: Translação e parâmetro

O próximo passo foi fazer uma reflexão dos triângulos azuis, tendo a mediatriz relativa à base do triângulo isósceles maior por eixo. Foi empregado um controle deslizante para ativar a rotação dos triângulos azuis, tendo por um ângulo de rotação aquele determinado por outro controle deslizante (Figura 16).

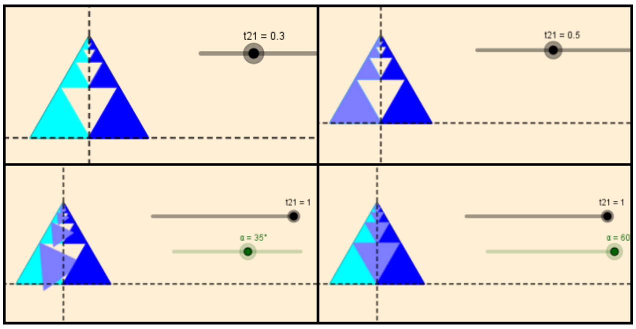

FIGURA 16: Translações e rotações

A última etapa dessa construção foi a finalização do processo. Nesse estágio, foi realizada a translação dos últimos triângulos construídos, foram criados os botões e colocou-se as condições sobre cada um dos controles deslizantes construídos. A Figura 17 ilustra o aspecto final da animação.

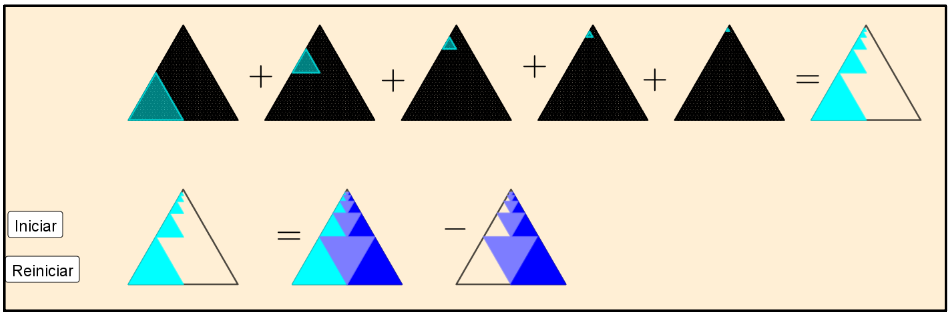

FIGURA 17: - Última etapa da construção Translações e rotações

Observou-se que, apesar de ser um processo trabalhoso, não foi complexo, pois não existem novidades nas etapas a serem realizadas. Neste caso, os comandos utilizados foram sempre os mesmos, o que não dificultou a construção.

Considerações finais

Neste artigo, apresentou-se uma pesquisa que teve por objetivo apresentar exemplos de demonstrações visuais denominadas por Provas Sem Palavras –PSP, por meio de fundamentos teóricos à luz da habilidade de visualização. Foram apresentados os recursos didáticos, com base no *software* de Matemática Dinâmica GeoGebra, para a realização dessas provas.

Exibiu-se três exemplos concretos do uso de PSP geométricas dinâmicas e animadas que podem ser usadas no ensino de matemática em diferentes níveis de escolaridade.

Como primeiro exemplo sugerido, foi apresentada uma maneira de construir a PSP do teorema de Pitágoras, o qual consta do currículo do nono ano do Ensino Fundamental. Para essa construção, foram realizadas animações a partir de dois controles deslizantes que permitiam variar as medidas das dimensões dos entes geométricos construídos. Também, pontos em objetos (dependendo de parâmetro), translações e rotações para realizar a animação.

No segundo exemplo de PSP, buscou-se ilustrar, dinamicamente, um problema aritmético envolvendo a soma dos primeiros números. Nesse caso, foram plotados pontos no plano, construídos vetores e sequências que possibilitaram, por meio de controles deslizantes e animação, a conclusão de que a estratégia de colorir os triângulos formados surtiu efeito visual adequado.

A última animação descrita refere-se a um conteúdo comumente trabalhado no ensino médio e, possui um protocolo de construção complexo. Essa última construção é a que demonstra ter maior apelo visual. Observou-se que o uso de condicionais nos controles deslizantes foi fundamental no processo de todas as construções, permitindo realizar as animações descritas no artigo.

A partir das animações construídas, foi possível observar que a visualização pode ser um ponto crucial no caso de uma PSP, pois é possível observar uma propensão ao preenchimento da PSP, verbalizando ou descrevendo a mesma, a fim de tornar o teorema ou a afirmação verdadeiras. Acredita-se que, ao ver uma animação de uma PSP, processa-se um produto, fazendo com que se desperte o interesse em ver o invisível e, talvez, também prová-lo, como menciona Arcavi (2003). Além disso, a reflexão oriunda da visualização de uma PSP pôde aprofundar a compreensão da prova, dando uma percepção da direção da prova formal.

Referências

ALENCAR, H. CÂNDIDO L., FARIAS M. Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da Educação Básica. **Revista do Professor de Matemática Online**, v.7, n.1, 2019, pp.1-19.

ALSINA, Claudi; NELSEN, Roger B. Um convite a provas sem palavras. **ComCiência**, n. 143, 2012.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, v. 52, n. 3, 2003, pp. 215-241.

ASP, Gary; STACEY, Kaye. Using dynamic diagrams to motivate and assist problem solving by algebra. In: Mathematics–the way forward. **Proceedings of the 43rd Annual Conference of the Mathematical Association of Victoria**. 2006.

BÉTRANCOURT, Mireille; TVERSKY, Barbara. Effect of computer animation on users' performance: a review/(Effet de l'animation sur les performances des utilisateurs: une sythèse). **Le travail humain**, v. 63, n. 4, p. 311, 2000.

FERREIRA, E. B., SOARES, A. B., LIMA, J. C. As demonstrações no ensino de Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias**. Boletim de Educação Matemática**, vol. 22, núm. 34, pp. 185-207.

GIAQUINTO, Marcus. Visualizing as a means of geometrical discovery. **Mind & Language**, 1992.

GIAQUINTO, Marcus et al. **Visual thinking in mathematics**. Oxford University Press, 2007.

GIERDIEN, Faaiz. From 'proofs without words' to 'proofs that explain'in secondary mathematics. 2007.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, Lucila M. C. A aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. **Informática na Educação:** teoria & prática. PGIE-UFRGS. Vol. 2, nº 1, Maio, 1999.

HANNA, G. Proofs that proove and proofs that explain. **Proceedings of the 13rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,** (PME 13). Paris, França, v. 2, p. 45–51, 1989.

HANNA, Gila. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational studies in mathematics**, v. 44, n. 1-2, p. 5-23, 2000.

HANNA, Gila; SIDOLI, Nathan. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. **ZDM**, v. 39, n. 1-2, p. 73-78, 2007.

HITT ESPINOSA, F.. Researching a Problem of Convergence with Mathematica: History and Visualisation of a Mathematical Idea. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, *28*(5), 697 – 706. 1997.

KRIZ, S., & HEGARTY, M. (2007). Top-down and bottom-up influences on learning from animations. **International Journal of Human–Computer Studies**, 65(11), 911–930.

LIN, Lijia; ATKINSON, Robert K. Using animations and visual cueing to support learning of scientific concepts and processes. **Computers & Education**, v. 56, n. 3, p. 650-658, 2011.

MABRY, R. (1999). Proof without Words: $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}$. **Mathematics Magazine**, v. 72, n. 1, p. 63-63, 1999.

MANCOSU, Paolo. Visualization in logic and mathematics. In: **Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics**. Springer, Dordrecht, 2005. p. 13-30.

MILLER, Robin L. On proofs without words. **Whitman College, Washington**, 2012.

NELSEN, Roger B. **Proofs without words:** Exercises in visual thinking. MAA, 1993.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. Demonstrações matemáticas dinâmicas. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 15, n. 1, p. 1-21, 2019.

PEDERSEN, Stig Andur; MANCOSU, P.; JORGENSEN, K. F. **Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics**. Springer, 2005.

YANG, E., ANDRE, T., & GREENBOWE, T. J. Spatial ability and the impact of visualization/animation on learning electrochemistry. **International Journal of Science Education**, 25(3), 329, 2003.