

# Introducción a la teoría de politopos

Días de Combinatoria 2017

Felipe Rincón<sup>1</sup> y Simón Soto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Queen Mary University of London

<sup>2</sup>Eindhoven University of Technology

**RESUMEN.** Estas notas están basadas en el minicurso dictado por Felipe Rincón en el evento “DÍAS de Combinatoria 2017”. Este minicurso consistió de una introducción a la teoría combinatoria de los politopos convexos, y en particular, al estudio de sus caras y de su enumeración.

**Palabras clave:** Politopo, retículo de caras, fórmula de Euler, h-vector, ecuaciones de Dehn-Sommerville.

**ABSTRACT.** These notes are based on the minicourse given by Felipe Rincón at the event “DIAS de Combinatoria 2017”. This minicourse gave a brief introduction to the combinatorial theory of convex polytopes, and, in particular, to the study of their faces and their enumeration.

**Key words:** Polytope, Face lattice, Euler’s formula, h-vector, Dehn-Sommerville equations.

*2010 AMS Mathematics Subject classification: 05E45, 51M20.*

## Índice

<b>1. Prefacio</b>	<b>178</b>
<b>2. Definiciones básicas</b>	<b>179</b>
2.1. Geometría afín . . . . .	179
2.2. Convexidad . . . . .	180
2.3. Politopos . . . . .	181

<b>3. Politopos regulares</b>	<b>184</b>
<b>4. Politopos por desigualdades</b>	<b>187</b>
<b>5. Caras de politopos</b>	<b>188</b>
<b>6. Politopos duales</b>	<b>194</b>
<b>7. Producto de politopos</b>	<b>196</b>
<b>8. Politopos cíclicos</b>	<b>199</b>
<b>9. Fórmula de Euler</b>	<b>203</b>
9.1. Característica de Euler . . . . .	204
9.2. Descascaramientos . . . . .	206
9.3. Fórmula de Euler . . . . .	209
<b>10. <math>h</math>-vectores y ecuaciones de Dehn-Sommerville</b>	<b>211</b>

## 1. Prefacio

Los politopos son objetos matemáticos de enorme importancia. Muchos problemas y aplicaciones en distintas áreas como la combinatoria, la optimización, y la geometría algebraica pueden ser modelados naturalmente mediante el uso de politopos. La teoría de politopos se ha convertido por este motivo en una pieza esencial de la matemática moderna, que goza además de gran belleza e interés intrínsecos.

Estas notas contienen algunas de las definiciones y resultados básicos en el estudio de los aspectos combinatorios de los politopos convexos. La mayoría de los resultados que acá se presentan, junto con sus pruebas completas, se encuentran también en el libro “Lectures on Polytopes” de Günter Ziegler [4]. Este libro es una excelente referencia en el tema, y contiene mucha más información.

El propósito de estas notas no es dar una presentación completamente formal y exhaustiva, sino simplemente mostrar algunas ideas que los autores encuentran especialmente interesantes. Esperamos que al leerlas el lector se motive a continuar aprendiendo por su propia cuenta, bien sea acudiendo al libro de Ziegler, o a una referencia más extensiva como el libro clásico “Convex Polytopes” de Branko Grünbaum [2].

## 2. Definiciones básicas

En esta sección estableceremos las nociones básicas y el lenguaje que usaremos constantemente en el estudio de los polítopos convexos. Supondremos que el lector tiene conocimientos básicos de álgebra lineal.

### 2.1. Geometría afín

Comenzamos con algunas definiciones del álgebra lineal.

Un **subespacio afín** de  $\mathbb{R}^n$  es una traslación de un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  de la forma  $A = L + \mathbf{a} := \{\mathbf{x} + \mathbf{a} \mid \mathbf{x} \in L\}$ , donde  $L \subset \mathbb{R}^n$  es un subespacio lineal y  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  (ver figura 1). La **dimensión** de  $A$  es por definición igual a la dimensión de  $L$ .

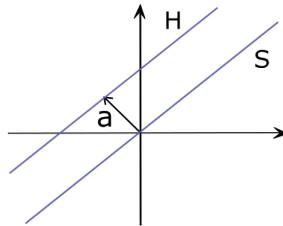


Figura 1. Un subespacio afín  $A$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Un **hiperplano afín**  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio afín de dimensión  $n - 1$ . Todo hiperplano afín tiene la forma

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b\} \quad \text{con } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R},$$

donde el vector  $\mathbf{a}$  se llama un **vector normal** al hiperplano  $H$  (ver ejercicio 3).

Una **recta afín** en  $\mathbb{R}^n$  es un subespacio afín de dimensión 1. Como ilustra la figura 2, la recta afín  $R$  que pasa por los puntos  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  se puede describir como

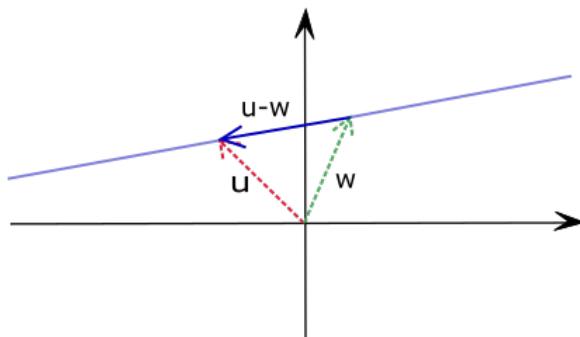
$$R = \{\mathbf{w} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  se llama un **vector director** de la recta  $R$ . El **segmento** entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  es un subconjunto propio de  $R$ , consistente de los puntos en los que  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Equivalentemente, el segmento entre  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$  está descrito por

$$\{\lambda_1 \mathbf{v} + \lambda_2 \mathbf{w} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}.$$

En general, la **envolvente afín** de un subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  se define como el menor subespacio afín que contiene a  $X$ . En el ejercicio 4, el lector puede probar que la envolvente afín de un conjunto finito de puntos  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$  es igual a

$$\text{afin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}.$$

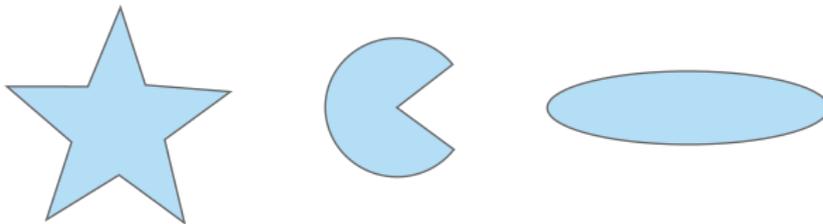


**Figura 2.** La recta afín que pasa por los puntos  $v$  y  $w$ .

**Ejemplo 2.1.** La envolvente afín de dos puntos distintos en  $\mathbb{R}^n$  es la única recta que los contiene. La envolvente afín de tres puntos no colineales en  $\mathbb{R}^n$  es el único plano que los contiene.  $\diamond$

## 2.2. Convexidad

**Definición 2.2.** Un subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  se llama **convexo** si para todo  $v, w \in X$ , el segmento entre  $v$  y  $w$  está completamente contenido en  $X$ , es decir,  $\{\lambda_1 v + \lambda_2 w \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \subset X$ .



**Figura 3.** Los dos conjuntos a la izquierda **no** son convexos, mientras que el conjunto a la derecha sí lo es.

La siguiente proposición se sigue fácilmente de la definición. Su prueba se deja como ejercicio al lector (ver ejercicio 2).

**Proposición 2.3.** *Intersección de conjuntos convexos es convexo: Si  $X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  es convexo para todo  $\alpha \in I$  entonces  $\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$  es convexo.*

La proposición anterior implica que para cualquier subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  existe un mínimo subconjunto convexo que contiene a  $X$  (igual a la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $X$ ), llamado la **envolvente convexa** (o **clausura convexa**) de  $X$ , y denotado por  $\text{convexa}(X)$ .

**Ejemplo 2.4.** El lector debe asegurarse de que la envolvente convexa de 3 puntos no colineales en  $\mathbb{R}^2$  es el triángulo formado por ellos, como lo muestra la figura.  $\diamond$



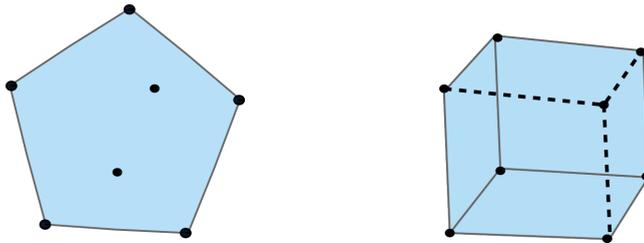
**Figura 4.** A la izquierda un subconjunto que consta de 3 puntos no colineales, y a la derecha su clausura convexa.

### 2.3. Polítopos

A continuación definimos los objetos centrales en estas notas.

**Definición 2.5.** Un **politopo** (convexo)  $P \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto que se puede obtener como la clausura convexa de finitos puntos. La **dimensión** de  $P$  se define como la dimensión de su envolvente afín  $\text{afin}(P)$ .

**Ejemplo 2.6.** La figura 5 muestra dos politopos, un pentágono y un tetraedro. El pentágono es obtenido como la clausura convexa de 8 puntos en  $\mathbb{R}^2$  (aunque resulta ser igual a la clausura convexa de solo 5 de ellos), y es un politopo de dimensión 2. El tetraedro es obtenido como la clausura convexa de 4 puntos en  $\mathbb{R}^3$ , y tiene dimensión 3.  $\diamond$



**Figura 5.** Dos politopos vistos como la clausura convexa de un conjunto de puntos.

La siguiente proposición describe algebraicamente todos los puntos en un politopo.

**Proposición 2.7.** La envolvente convexa de un conjunto finito de puntos  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$  está descrita por

$$\text{convexa}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \left\{ \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\}. \quad (2.1)$$

*Idea de la demostración.* Un punto de la forma  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i$  se llama una **combinación convexa** de los puntos  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ . Denotemos por  $C$  el conjunto del lado derecho de la Ecuación (2.1), es decir, el conjunto de combinaciones convexas de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ .

Es posible ver que si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  entonces cualquier punto en el segmento entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{y}$  está también en  $C$ , lo que muestra que  $C$  es efectivamente convexo. Además, todo

$\mathbf{v}_i$  es un elemento de  $C$ , luego, por definición,  $C$  debe contener a la clausura convexa convexa( $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ).

Para probar la inclusión contraria, es necesario ver que toda combinación convexa de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  debe estar en la clausura convexa de  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ . Esto se puede hacer por inducción en  $k$ , usando el hecho que

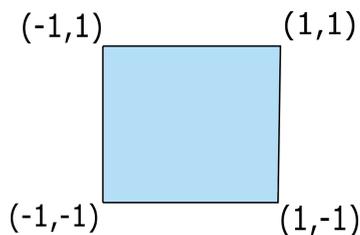
$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = (1 - \lambda_k) \left( \frac{\lambda_1}{(1 - \lambda_k)} \mathbf{v}_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1}}{(1 - \lambda_k)} \mathbf{v}_{k-1} \right) + \lambda_k \mathbf{v}_k,$$

si  $\lambda_k < 1$ . □

Terminamos esta sección con un par ejemplos fundamentales de politopos.

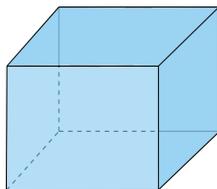
**Ejemplo 2.8.** Una familia importante de politopos son los **hipercubos**  $C_n \subset \mathbb{R}^n$ . Estos politopos generalizan el cuadrado y el cubo a dimensión  $n$  arbitraria.

- El **cuadrado** es el politopo  $C_2 := \text{convexa}\{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$ , y tiene dimensión 2.



**Figura 6.** El cuadrado.

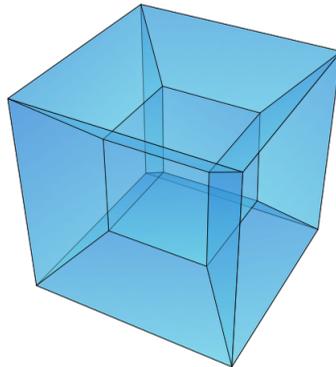
- El **cubo** es el politopo 3-dimensional dado como la envolvente convexa de los ocho puntos en  $\mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas son 1 o  $-1$ , es decir, el politopo  $C_3 := \text{convexa}\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ .



**Figura 7.** El cubo.

- Más generalmente, el **hipercubo** de dimensión  $n$  es la envolvente convexa de los  $2^n$  puntos en  $\mathbb{R}^n$  cuyas coordenadas son 1 o  $-1$ , es decir, el politopo  $C_n := \text{convexa}\{(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^n$ .

◇



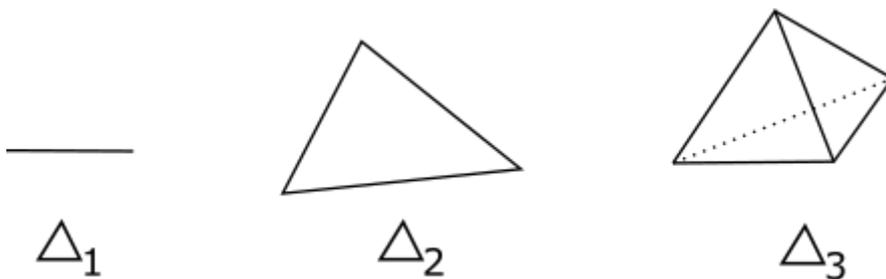
**Figura 8.** Una representación en dimensión 3 del hipercubo 4-dimensional.<sup>1</sup>

Otra clase fundamental de polítopos son los símlices, que generalizan los triángulos y los tetraedros a cualquier dimensión.

**Definición 2.9.** Un conjunto de puntos es **afínmente independiente** si ninguno de ellos está en la envolvente afín de los demás.

**Ejemplo 2.10.** En  $\mathbb{R}^2$ , tres puntos son afínmente independientes si forman los vértices de un triángulo (no degenerado), es decir, si no son colineales. Cuatro puntos en  $\mathbb{R}^2$  no pueden ser afínmente independientes. En  $\mathbb{R}^3$ , cuatro puntos son afínmente independientes si forman los vértices de un tetraedro (no degenerado), es decir, si no son coplanares. Cinco puntos en  $\mathbb{R}^3$  no pueden ser afínmente independientes.  $\diamond$

**Definición 2.11.** Un **símplice**  $\Delta_k$  de dimensión  $k$  es la envolvente convexa de  $k+1$  puntos afínmente independientes. Por ejemplo, un símlice de dimensión 1 es un segmento, de dimensión 2 es un triángulo, y de dimensión 3 es un tetraedro.



**Figura 9.** Símlices de dimensión 1, 2, y 3.

## EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2

<sup>1</sup>Figura 8 creada por Mouagip bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

- 2.1. (*Politopos en 3D con pocos vértices.*) ¿Cuántos politopos distintos de 3 dimensiones existen con 4 vértices? ¿Con 5 vértices? ¿Con 6 vértices? (Ayuda: Hay 1, 2, y 4, respectivamente.)
- 2.2. (*Intersección de conjuntos convexos.*) Pruebe que si  $X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  es convexo para todo  $\alpha \in I$  entonces  $\bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha$  es convexo.
- 2.3. (*Hiperplanos afines.*) Muestre que un conjunto  $H \subset \mathbb{R}^n$  es de la forma  $H = L + \mathbf{v}$  con  $L \subset \mathbb{R}^n$  un subespacio de dimensión  $n - 1$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  si y solo si  $H$  tiene la forma  $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b\}$  con  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  distinto de cero y  $b \in \mathbb{R}$ .
- 2.4. (*Envolventes afines.*) Pruebe que la envolvente afín de los puntos  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  está dada por

$$\text{afin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}.$$

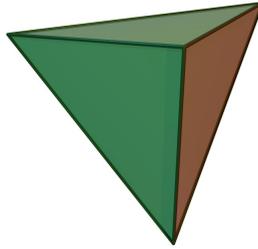
- 2.5. (*Independencia afín.*) Pruebe que las siguientes propiedades son equivalentes para puntos  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ :
- Ninguno de los  $\mathbf{v}_i$  está en la envolvente afín de los demás.
  - $\dim(\text{afin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)) = k - 1$ .
  - $\dim(\text{span}((1, \mathbf{v}_1), (1, \mathbf{v}_2), \dots, (1, \mathbf{v}_k))) = k$ .

### 3. Politopos regulares

Sin ser completamente precisos, diremos que un politopo se llama **regular** si es completamente simétrico, es decir, si se ve igual desde cualquier parte. La definición formal la daremos más adelante, cuando hablemos de caras de un politopo (ver definición 5.15).

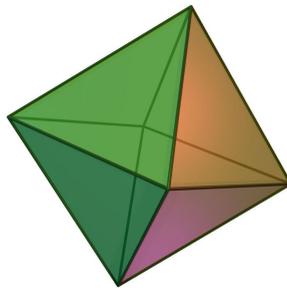
Es posible clasificar todos los politopos regulares de cualquier dimensión. En esta sección nos limitaremos a estudiar brevemente aquellos politopos regulares de baja dimensión, y a entender por qué no existen más que éstos.

- Dimensión  $n = 1$ . El segmento es el único politopo de dimensión 1, y es un politopo regular.
- Dimensión  $n = 2$ . Los politopos de dimensión 2 (o **polígonos**) que son regulares son el triángulo equilátero (con ángulos iguales a  $\frac{\pi}{3}$ ), el cuadrado (con ángulos  $\frac{2\pi}{4}$ ), el pentágono regular (con ángulos  $\frac{3\pi}{5}$ ), el hexágono regular (con ángulos  $\frac{4\pi}{6}$ ), etc. De esta manera, hay exactamente un polígono regular por cada entero  $l \geq 3$ , que especifica el número de lados.
- Dimensión  $n = 3$ . Contrario a dimensión 2, de dimensión 3 hay solo un número finito de politopos regulares. De hecho, hay exactamente 5 de ellos. Podemos encontrarlos todos pensando en cómo se ven alrededor de cada vértice o esquina. Como son poliedros regulares, todas sus caras (de dimensión 2) deben ser regulares también, luego son polígonos regulares. Pensemos en las distintas posibilidades de cuáles y cuántas caras se encuentran alrededor de cada vértice:



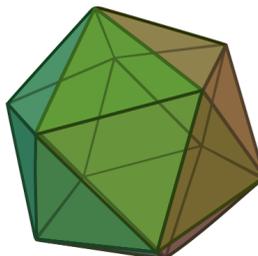
**Figura 10.** Tetraedro (4 caras).<sup>2</sup>

- Si en cada vértice se encuentran 3 triángulos equiláteros, el politopo es un tetraedro (figura 10).
- Si en cada vértice se encuentran 4 triángulos equiláteros, tenemos un octaedro (figura 11).



**Figura 11.** Octaedro (8 caras).<sup>3</sup>

- Si en cada vértice se encuentran 5 triángulos equiláteros, tenemos un icosaedro (figura 12).



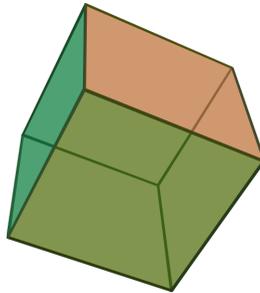
**Figura 12.** Icosaedro (20 caras).<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Figura 10 creada por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

<sup>3</sup>Figura 11 creada por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

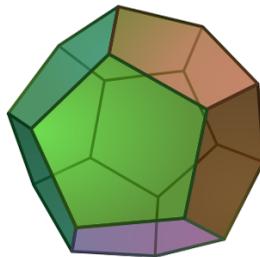
<sup>4</sup>Figura 12 creada por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

- No es posible que en cada vértice se encuentren 6 triángulos equiláteros, ya que éstos no formarían una esquina sino un plano. Similarmente, tampoco es posible que haya 7 o más triángulos equiláteros alrededor de un vértice.
- Si en cada vértice se encuentran 3 cuadrados, tenemos un cubo (figura 13).



**Figura 13.** Cubo (6 caras).<sup>5</sup>

- No es posible que en cada vértice se encuentren 4 o más cuadrados, ya que no formarían una esquina.
- Si en cada vértice se encuentran 3 pentágonos regulares tenemos un dodecaedro (figura 14).



**Figura 14.** Dodecaedro (12 caras).<sup>6</sup>

- No es posible que en cada vértice se encuentren 4 o más pentágonos regulares, ya que no formarían una esquina.
- No es posible usar hexágonos regulares (o polígonos regulares con más lados), ya que al juntar tres de ellos no se forma una esquina.
- Dimensión  $n = 4$ . De dimensión 4 hay exactamente 6 politopos regulares! Es posible encontrarlos todos de manera similar, pensando en cuáles y cuántos politopos regulares de dimensión 3 se encuentran en cada esquina. Una excelente introducción a este tema es el video *Numberphile: "Perfect shapes"* [3] en YouTube (<https://www.youtube.com/watch?v=2s4TqVAbfz4>).

<sup>5</sup>Figura 13 creada por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

<sup>6</sup>Figura 14 creada por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

- Dimensión  $n \geq 5$ . De cada dimensión  $n \geq 5$  hay exactamente 3 politopos regulares. Estos forman tres familias de politopos regulares: los símlices, los hipercubos, y los politopos cruz, las cuales son generalizaciones del tetraedro, el cubo, y el octaedro, respectivamente. En el ejercicio 2 se da la definición de la última de ellas.

### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3

- 3.1. (*Polígonos regulares.*) Pruebe que un polígono regular de  $k$  lados tiene todos sus ángulos iguales a  $\frac{(k-2)\pi}{k}$ .
- 3.2. (*Politopos cruz.*) El **politopo cruz** de dimensión  $n$  es el politopo definido como  $D_n := \text{convexa}\{\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, -\mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ , donde  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Dibuje los politopos cruz de dimensiones 1, 2, y 3.

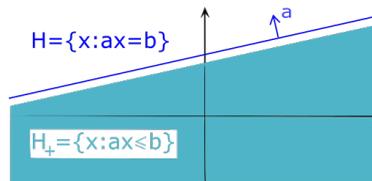
### 4. Politopos por desigualdades

Así como es posible describir cualquier politopo como la envolvente convexa de finitos puntos, también es posible hacerlo usando un número finito de desigualdades lineales, como veremos en esta sección.

**Definición 4.1.** Un **semiespacio** en  $\mathbb{R}^n$  es un conjunto de la forma

$$H_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq b\},$$

con  $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}$ .

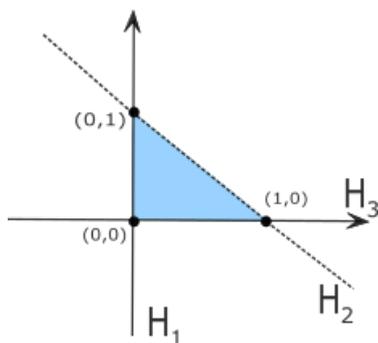


**Figura 15.** Un hiperplano  $H$ , y el semiespacio  $H_+$ .

El siguiente teorema presenta una caracterización muy importante de los politopos.

**Teorema 4.2.** *Un conjunto  $P \subset \mathbb{R}^n$  es un politopo si y solo si es una intersección acotada de finitos semiespacios.*

*Idea de la demostración.* Este teorema se sigue, por ejemplo, del Método de Eliminación de Fourier-Motzkin, que muestra de manera algorítmica que cualquier proyección de un politopo es de nuevo un politopo. Una buena discusión de este tema se encuentra en las secciones 1.1, 1.2, y 1.3 de [4].  $\square$



**Figura 16.** Un politopo descrito por desigualdades.

**Ejemplo 4.3.** Tome  $P = \text{convexa}\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$  (ver figura 16). El politopo  $P$  se puede describir como la intersección de semiespacios

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

El cuadrado  $C_2$  lo podemos describir como

$$C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

y el cubo  $C_3$  se puede describir como

$$C_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

◇

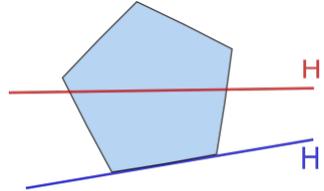
#### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4

- 4.1. (*Vértices y desigualdades.*) Explique por qué:
  - a) Intersección de politopos es un politopo.
  - b) Intersección de un politopo con un hiperplano afín es un politopo.
  - c) Proyección de un politopo es un politopo.
- 4.2. (*Desigualdades para hipercubos.*) Encuentre (y pruebe) una descripción por desigualdades del hipercubo  $C_n \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$ .
- 4.3. (*Desigualdades para politopos cruz.*) Halle una descripción por desigualdades de los politopos cruz de dimensión 1,2, y 3. ¿Puede hallar (y probar) una descripción por desigualdades del politopo cruz  $D_n \subset \mathbb{R}^n$ ?

### 5. Caras de politopos

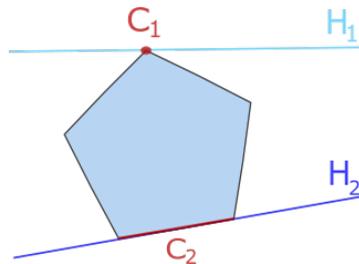
En esta sección definiremos formalmente las caras de un politopo, y hablaremos de qué es exactamente la estructura combinatoria de un politopo.

**Definición 5.1.** Un **hiperplano de soporte** para un politopo  $P$  es un hiperplano  $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = b\}$  tal que  $P \cap H \neq \emptyset$  y además  $P \subset H_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq b\}$ .



**Figura 17.**  $H$  es un hiperplano de soporte para el pentágono, mientras que  $H'$  no lo es.

**Definición 5.2.** Una **cara** de  $P$  es un politopo obtenido como la intersección de  $P$  con un hiperplano de soporte. Adicionalmente, adoptaremos la convención que  $\emptyset$  y  $P$  también son caras de  $P$ .



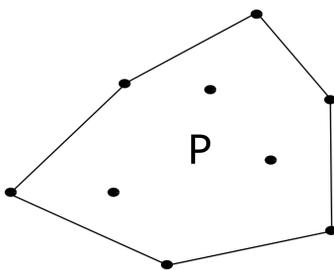
**Figura 18.** Dos hiperplanos de soporte, y las caras del pentágono correspondientes.

Como las caras de un politopo son politopos también, podemos hablar de la dimensión de una cara (que es, por definición, la dimensión de su envolvente afín). Por convención, diremos que  $\emptyset$  es una cara de dimensión  $-1$ . Si  $P$  tiene dimensión  $d$ , las caras de dimensión  $0$  se llaman **vértices**, las caras de dimensión  $1$  se llaman **aristas**, y las caras de dimensión  $d - 1$  se llaman **caras maximales** o carotas.

**Ejemplo 5.3.** El pentágono de la figura 18 tiene una cara de dimensión  $-1$ , cinco caras de dimensión  $0$  (vértices), cinco caras de dimensión  $1$  (aristas), y 1 cara de dimensión  $2$ . Similarmente, el lector debe asegurarse de que el octaedro  $D_3 \subset \mathbb{R}^3$  tiene 6 vértices, 12 aristas, y 8 caras maximales.  $\diamond$

Los vértices de un politopo  $P$  son el conjunto más pequeño de puntos necesarios para generar a  $P$ , como lo muestra la siguiente proposición (ver figura 19).

**Proposición 5.4.** *Todo politopo  $P$  es la envolvente convexa de sus vértices. Más aún, si  $P = \text{convexa}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  entonces todos los vértices de  $P$  se encuentran entre el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .*



**Figura 19.** Un hexágono  $P$  obtenido como la clausura convexa de 9 puntos.

*Idea de la demostración.* Si  $V$  es el conjunto de vértices de  $P$ , como  $P$  es convexo tenemos que  $P \supset \text{convexa}(V)$ . La contención opuesta se sigue del hecho que  $w \in P$  es un vértice de  $P$  si y solo si  $w$  no está en la envolvente convexa del conjunto  $P - \{w\}$ . Esto se puede probar usando el llamado Lema de Farkas. Para más información, el lector puede consultar [4, Proposición 2.2].  $\square$

Estaremos interesados en estudiar el número de caras de cada dimensión de un politopo.

**Definición 5.5.** El  $f$ -vector de un politopo  $P$  es el vector  $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_{\dim(P)})$ , donde  $f_i$  es el número de caras de  $P$  de dimensión  $i$ .

**Ejemplo 5.6.** El  $f$ -vector del símplice  $\Delta_1$  es  $(1, 2, 1)$ , del símplice  $\Delta_2$  es  $(1, 3, 3, 1)$ , y del símplice  $\Delta_3$  es  $(1, 4, 6, 4, 1)$ . ¿Puede el lector conjeturar cuál es el  $f$ -vector del símplice  $\Delta_4$ ? ¿Qué tal el del símplice  $\Delta_n$ ?  $\diamond$

Aunque el  $f$ -vector es un invariante muy importante de un politopo, la estructura combinatoria de un politopo está dada no solo por el número de caras en cada dimensión, sino por la forma en que unas caras están contenidas en otras. Esto nos motiva a introducir la siguiente definición.

Supondremos que el lector tiene cierta familiaridad con el lenguaje de posets (o conjuntos parcialmente ordenados). Para una introducción detallada a este tema, referimos al lector a las notas de clase del minicurso en Días de Combinatoria 2017 sobre conjuntos parcialmente ordenados, por Jhon Bladimir Caicedo y Rafael González D'León [1].

**Definición 5.7.** El **orden de caras**  $\mathcal{L}(P)$  de un politopo  $P$  es el poset que consiste de todas las caras de  $P$  ordenadas por inclusión.

**Ejemplo 5.8.** El símplice  $\Delta_2$  y su orden de caras  $\mathcal{L}(\Delta_2)$  se muestran en la figura 20. Los elementos de  $\mathcal{L}(\Delta_2)$  son las 8 caras de  $\Delta_2$ , ordenadas por inclusión.  $\diamond$

Ahora podemos definir formalmente cuándo dos politopos son “combinatoriamente iguales”.

**Definición 5.9.** Dos politopos  $P, Q$  se llaman **combinatoriamente isomorfos** si sus órdenes de caras son isomorfos, es decir, si  $\mathcal{L}(P) \cong \mathcal{L}(Q)$ .

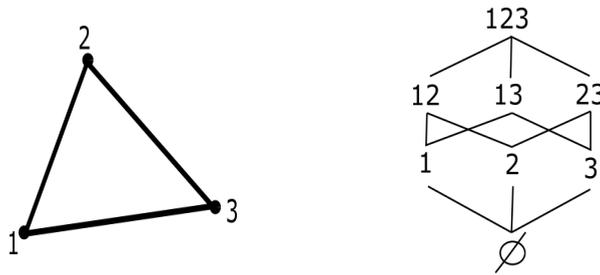


Figura 20. El símplice  $\Delta_2$  y su orden de caras  $\mathcal{L}(\Delta_2)$ .

**Ejemplo 5.10.** Cualesquiera dos triángulos son combinatoriamente isomorfos. Igualmente, cualesquiera dos cuadriláteros son combinatoriamente isomorfos, sin importar la longitud de sus lados. De hecho, dos polítopos de dimensión 2 son combinatoriamente isomorfos si y solo si tienen el mismo número de vértices (o equivalentemente, el mismo número de lados).  $\diamond$

Enunciaremos un par de propiedades fundamentales de las caras de un polítopo  $P$ .

**Proposición 5.11.** *Intersección de caras de  $P$  es una cara de  $P$ .*

*Idea de la demostración.* Supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  son caras de  $P$  tales que  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ . Para  $i = 1, 2$  tenemos que  $C_i = P \cap H_i$ , donde  $H_i$  un hiperplano de soporte para  $P$ . Queremos encontrar un hiperplano de soporte que defina la cara  $C_1 \cap C_2$ . Digamos que  $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \cdot x = b_i\}$  para  $i = 1, 2$ , y consideremos  $H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a_1 + a_2) \cdot x = b_1 + b_2\}$ . Se deja al lector comprobar que  $H$  es un hiperplano de soporte para  $P$ , y que  $P \cap H = C_1 \cap C_2$ .  $\square$

**Proposición 5.12.** *Sea  $P$  un polítopo y  $C$  una cara de  $P$ . Las caras de  $C$  son las caras de  $P$  que están contenidas en  $C$ .*

*Idea de la demostración.* Se sigue de la definición que cualquier cara de  $P$  contenida en  $C$  debe ser una cara de  $C$  también. La implicación opuesta tampoco es muy difícil de probar; referimos al lector a [4, Proposición 2.3] para más información.  $\square$

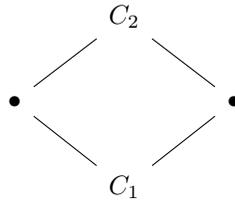
Para describir algunas de las propiedades más importantes del orden de caras de un polítopo, necesitamos las siguientes definiciones.

**Definición 5.13.** Sea  $\mathcal{L}$  un poset con mínimo  $\hat{0}$  y máximo  $\hat{1}$ . Un **átomo** de  $\mathcal{L}$  es un elemento  $a \in \mathcal{L}$  tal que el intervalo  $[\hat{0}, a] := \{x \in \mathcal{L} \mid \hat{0} \leq x \leq a\}$  tiene exactamente 2 elementos  $\hat{0}$  y  $a$ . Si  $\mathcal{L}$  es un poset graduado, sus átomos son los elementos de rango 1. Dualmente, el elemento  $a$  se llama un **coátomo** si el intervalo  $[a, \hat{1}]$  tiene exactamente 2 elementos.

Se dice que un retículo  $\mathcal{L}$  es **atómico** si cualquier elemento de  $\mathcal{L}$  distinto a  $\hat{0}$  se puede obtener como el supremo de algunos átomos. Dualmente,  $\mathcal{L}$  se llama **coatómico** si cualquier elemento distinto a  $\hat{1}$  es el ínfimo de algunos **coátomos**.

**Teorema 5.14.** *Sea  $P$  un politopo.*

1. *El orden de caras  $\mathcal{L}(P)$  es un retículo graduado, con función de rango (o función de grado) dada por  $\text{rango}(C) = \dim(C) + 1$  para toda cara  $C$  de  $P$ . El elemento mínimo de  $\mathcal{L}(P)$  es la cara  $\emptyset$ , y el elemento máximo es la cara  $P$ .*
2. *Si  $C$  es una cara de  $P$  entonces  $\mathcal{L}(C) = [\emptyset, C]$ .*
3. *Todo intervalo cerrado de  $\mathcal{L}(P)$  es isomorfo al orden de caras de algún politopo.*
4. **Propiedad del diamante:** *Si  $C_1 \subset C_2$  son caras de  $P$  tal que  $\dim(C_2) = \dim(C_1) + 2$  entonces el intervalo  $[C_1, C_2]$  consta exactamente de 4 elementos.*



5. *El orden dual  $\mathcal{L}(P)^*$  es el orden de caras de un politopo  $P^*$ , que se llama el politopo dual a  $P$ .*
6. *El retículo  $\mathcal{L}(P)$  es tanto atómico como coatómico.*

*Idea de la demostración.* Haremos simplemente algunos comentarios sobre la prueba de este teorema. Para una prueba completa, el lector puede ver [4, Teorema 2.7].

La proposición 5.11 implica que para cualesquiera dos caras  $C_1$  y  $C_2$  en  $\mathcal{L}(P)$  existe su ínfimo  $C_1 \wedge C_2$ , que es igual a la intersección  $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{L}$ . Como  $\mathcal{L}(P)$  tiene un elemento máximo  $P$  se sigue que  $\mathcal{L}(P)$  también tiene supremo [1, Proposición 2.4], y por lo tanto es un retículo.

La parte (2) es equivalente a la proposición 5.12. La parte (3) se sigue de la parte (2) para intervalos de la forma  $[\emptyset, C]$ . Para intervalos más generales, debemos considerar la construcción de la “figura alrededor de una cara”.

La propiedad del diamante es un caso especial de la parte (3). En efecto, todo intervalo de la forma  $[C_1, C_2]$  con  $\dim(C_2) = \dim(C_1) + 2$  debe ser isomorfo al orden de caras de un politopo de dimensión 1. Como el segmento  $\Delta_1$  es el único politopo 1-dimensional, este intervalo debe ser un diamante.

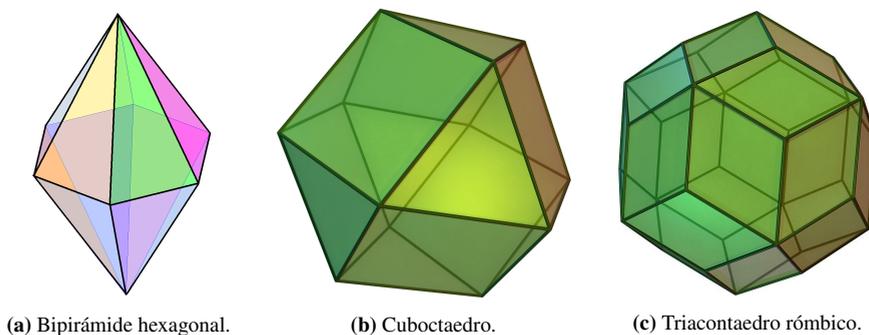
El hecho que el orden dual  $\mathcal{L}(P)^*$  es el orden de caras de un politopo  $P^*$  lo discutiremos en la sección 6.

Finalmente, el hecho que  $\mathcal{L}(P)$  es un retículo atómico se sigue de que todo politopo es la envolvente convexa de sus vértices (Proposición 5.4). Como el orden dual  $\mathcal{L}(P)^*$  es también el orden de caras de un politopo, tenemos que  $\mathcal{L}(P)$  también es un retículo coatómico.  $\square$

Concluimos esta sección con la definición de politopo regular que habíamos prometido en la sección 3.

**Definición 5.15.** Una **bandera maximal** de un politopo  $d$ -dimensional  $P \subset \mathbb{R}^n$  es una secuencia de caras  $F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{d-1} \subset F_d$  tal que, para todo  $i$ , la cara  $F_i$  tiene dimensión  $i$ . El politopo  $P$  se llama **regular** si cualquier bandera maximal de  $P$  puede ser mapeada a cualquier otra mediante una simetría de  $P$  (es decir, una simetría de  $\mathbb{R}^n$  que preserva a  $P$ ).

**Ejemplo 5.16.** El lector debe asegurarse de que el tetraedro  $\Delta_3$ , el cubo  $C_3$ , y el octaedro  $D_3$  son politopos regulares, de acuerdo a la definición anterior. Además, de entender por qué los 3 politopos de la figura 21 no son politopos regulares.



**Figura 21.** Politopos no regulares.<sup>7</sup>



#### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5

- 5.1. (*¿Posibles ordenes de caras?*) ¿Existe un politopo cuyo orden de caras sea isomorfo al poset de divisibilidad  $D_{30}$ ? (ver [1, Ejemplo 1.4]) ¿Existe un politopo cuyo orden de caras sea isomorfo al poset de divisibilidad  $D_{60}$ ? ¿Puede encontrar exactamente para cuáles números  $n$  se cumple que existe un politopo cuyo orden de caras es isomorfo al poset  $D_n$ ?
- 5.2. (*Caras de hipercubos.*) ¿Cuáles y cuántas caras tiene un cubo de dimensión 2? ¿De dimensión 3? ¿De dimensión 4? (Compare con la figura 8.) ¿Qué tal el hipercubo  $C_n$  de dimensión  $n$ ?
- 5.3. (*¿Posibles  $f$ -vectores?*) ¿Existe un politopo cuyo  $f$ -vector tenga la forma  $f = (1, 5, 9, ?, 1)$ ? ¿Qué tal  $f = (1, 5, 10, ?, 1)$ ? ¿ $f = (1, 6, 13, ?, 1)$ ?

<sup>7</sup>Figura 21a creada por Quatrostein bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported, 2.5 Generic, 2.0 Generic and 1.0 Generic. figura 21b creada por Hellisp bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. figura 21c creada por DTR bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

- 5.4. (*Mismo  $f$ -vector.*) Encuentre dos politopos de dimensión 3 con el mismo  $f$ -vector pero que no sean combinatoriamente isomorfos.
- 5.5. (*Orden de caras de  $\Delta_n$ .*) Pruebe que el orden de caras del s3mplice es el 3lgebra Booleana, es decir, que  $\mathcal{L}(\Delta_n) \cong \mathbb{B}_{n+1}$ .

## 6. Politopos duales

Describiremos expl3citamente la construcci3n del politopo dual  $P^*$  a un politopo  $P$ , enunciada en el teorema 5.14 (5).

Si  $P$  es un politopo, llamaremos **interior** de  $P$  al conjunto  $\text{int}(P) \subset P$  consistente de todos los puntos en  $P$  que no est3n en ninguna cara propia de  $P$ .

**Definici3n 6.1.** Sea  $P \subset \mathbb{R}^d$  un politopo de dimensi3n  $d$  tal que  $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$ . El **politopo dual**  $P^*$  a  $P$  se define como

$$P^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 1 \text{ para todo } \mathbf{y} \in P\}.$$

Note que en la definici3n anterior suponemos que  $P$  es un politopo de dimensi3n igual a la dimensi3n del espacio en el que vive, y adem3s que  $P$  contiene a  $\mathbf{0}$  en su interior. Estas hip3tesis garantizan que  $P^*$  es tambi3n un politopo. En caso de que  $P$  no satisfaga dichas condiciones, podemos simplemente trasladarlo y restringirlo al espacio  $\text{afin}(P)$ , que tiene dimensi3n igual a la dimensi3n de  $P$ .

**Ejemplo 6.2.** Supongamos que  $P \subset \mathbb{R}^2$  es la envolvente convexa de los puntos  $(-1, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, -1)$ , y  $(-1, -1)$ . Note que el vector  $\mathbf{0}$  est3 en el interior de  $P$ . Por definici3n, el politopo dual  $P^*$  consiste de todos los vectores  $\mathbf{x}$  cuyo producto punto con cualquier vector en  $P$  es menor o igual a uno. Sin embargo, para que  $\mathbf{x}$  satisfaga esta condici3n, es suficiente que el producto punto con los *v3rtices* de  $P$  sea menor o igual a uno (ejercicio 3). Por lo tanto, el politopo dual  $P^*$  est3 descrito por las cuatro desigualdades  $\mathbf{x} \cdot (-1, 2) \leq 1$ ,  $\mathbf{x} \cdot (1, 0) \leq 1$ ,  $\mathbf{x} \cdot (1, -1) \leq 1$ , y  $\mathbf{x} \cdot (-1, -1) \leq 1$ .  $\diamond$

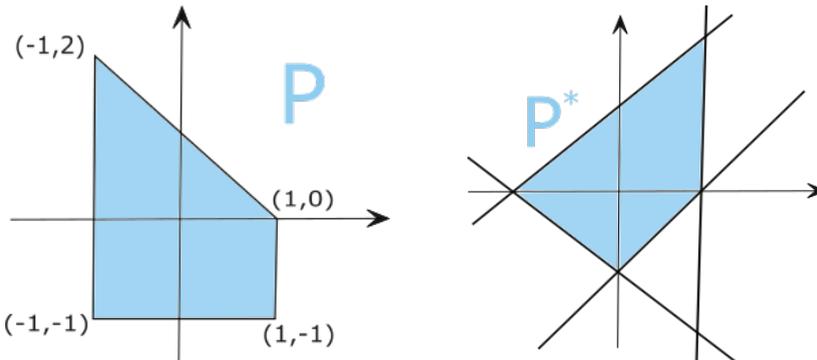
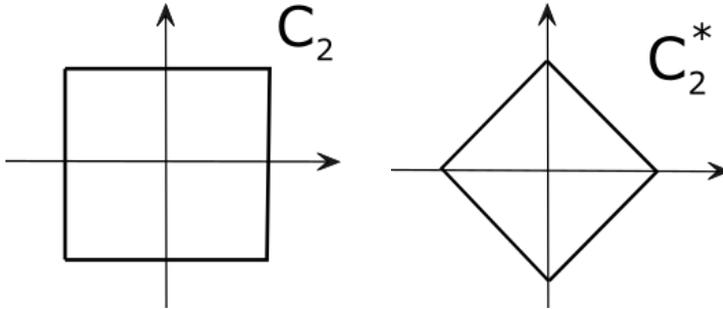


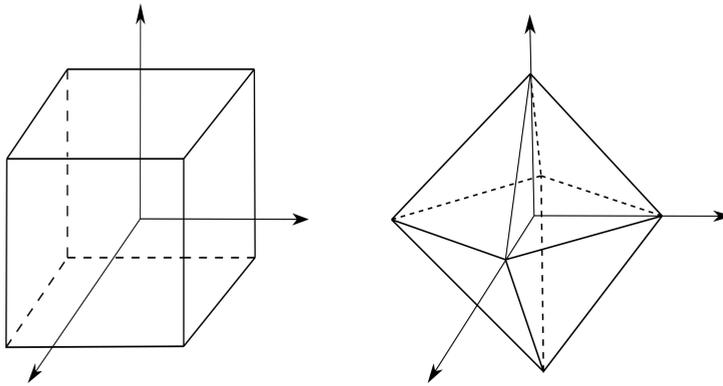
Figura 22. Un politopo y su politopo dual.

La demostración de la siguiente proposición se deja como ejercicio al lector (ver ejercicio 2).

**Proposición 6.3.** *El hipercubo  $C_n \subset \mathbb{R}^n$  es dual al polítopo cruz  $D_n \subset \mathbb{R}^n$ , y viceversa.*



**Figura 23.** El cuadrado  $C_2$  y el polítopo cruz  $D_2$  son duales entre sí.



**Figura 24.** El cubo  $C_3$  y el polítopo cruz  $D_3$  son duales entre sí.

Como se puede ver en los ejemplos anteriores, cada vértice de un polítopo  $P$  da lugar a una cara maximal del polítopo dual  $P^*$ . Más generalmente, hay una correspondencia entre las caras de dimensión  $i$  en  $P$  y las caras de dimensión  $d - i$  en  $P^*$ , donde  $d$  es la dimensión de  $P$ . Esta correspondencia induce un antiisomorfismo entre los órdenes de caras, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 6.4.** *Si  $P \subset \mathbb{R}^d$  es un polítopo de dimensión  $d$  con  $\mathbf{0} \in \text{int}(P)$  entonces  $(P^*)^* = P$ , y más aún,  $\mathcal{L}(P^*) = \mathcal{L}(P)^*$ .*

*Idea de la demostración.* Como se discutió en el ejemplo 6.2, cada vértice de  $P$  da lugar a una desigualdad para  $P^*$ , y de esta forma a una cara maximal. Esta correspondencia se extiende a una correspondencia entre caras de dimensión  $i$  de  $P$  y caras de dimensión  $d - i$  de  $P^*$ , que reversa la inclusión. Una prueba de esto se puede encontrar en [4, Corolario 2.14].  $\square$

**Ejemplo 6.5.** Si  $P$  es un símplice de dimensión  $d$ , el politopo dual  $P^*$  es combinatoriamente isomorfo a  $P$ , es decir, es también un símplice de dimensión  $d$ . Esto se puede comprobar directamente de la definición, o usando el teorema anterior junto con el hecho que el orden de caras del símplice es el álgebra Booleana  $\mathbb{B}_{n+1}$ :

$$\mathcal{L}(\Delta_n^*) = \mathcal{L}(\Delta_n)^* = \mathbb{B}_{n+1}^* = \mathbb{B}_{n+1} = \mathcal{L}(\Delta_n).$$

◇

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 6

- 6.1. (*Politopos duales.*) ¿Cuál es el politopo dual al prisma triangular de dimensión 3? Dibuje los ordenes de caras de ambos politopos.
- 6.2. (*Hipercubos y politopos cruz son duales.*) Pruebe que el hipercubo  $C_n \subset \mathbb{R}^n$  es dual al politopo cruz  $D_n \subset \mathbb{R}^n$ , y viceversa.
- 6.3. (*Desigualdades para politopos duales.*) Pruebe que si  $P = \text{convexa}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \subset \mathbb{R}^n$  entonces

$$P^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i \leq 1 \text{ para todo } 1 \leq i \leq k\}.$$

**7. Producto de politopos**

En esta sección introduciremos el producto de politopos, y estudiaremos un poco su estructura combinatoria.

**Definición 7.1.** Si  $P \subset \mathbb{R}^n$  y  $Q \subset \mathbb{R}^m$  son politopos, su **producto** es el politopo

$$P \times Q := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} \in P \text{ y } \mathbf{y} \in Q\}.$$

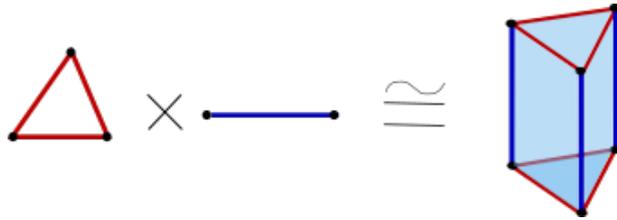
**Ejemplo 7.2.** Miremos algunos ejemplos de producto entre politopos.

- El producto del segmento  $C_1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}^1$  consigo mismo  $C_1 \times C_1 \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^2$  es igual al cuadrado  $C_2$  (ver figura 25).



**Figura 25.** Producto de dos segmentos.

- El producto  $C_2 \times C_1$  del cuadrado  $C_2 \subset \mathbb{R}^2$  con el segmento  $C_1 \subset \mathbb{R}_1$  es igual al cubo  $C_3 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}^3$ .
- En general, el producto del hipercubo  $C_k \subset \mathbb{R}^k$  con el hipercubo  $C_l \subset \mathbb{R}_l$  es igual al hipercubo  $C_{k+l} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \cong \mathbb{R}^{k+l}$ .
- El producto  $\Delta_2 \times \Delta_1$  de un 2-símplice y un 1-símplice es un prisma triangular (ver figura 26).



**Figura 26.** El producto de un 2-símplice y un 1-símplice es un prisma triangular.

◇

Enunciaremos algunas propiedades básicas del producto entre politopos.

**Proposición 7.3.** *La dimensión del producto de politopos es*

$$\dim(P \times Q) = \dim(P) + \dim(Q).$$

*Idea de la demostración.* La envolvente afín de  $P \times Q$  está dada por  $\text{afin}(P \times Q) = \text{afin}(P) \times \text{afin}(Q)$ , y por lo tanto  $\dim(\text{afin}(P \times Q)) = \dim(\text{afin}(P)) + \dim(\text{afin}(Q))$ , lo que prueba el resultado. □

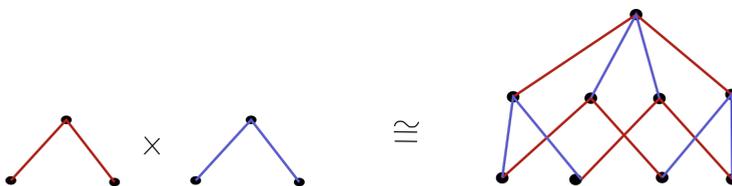
La operación producto entre politopos se comporta particularmente bien con respecto a caras, como lo muestra la siguiente teorema.

**Teorema 7.4.** *Las caras no vacías del producto  $P \times Q$  son exactamente los productos entre una cara no vacía de  $P$  y una cara no vacía de  $Q$ . Por lo tanto, tenemos la igualdad de posets*

$$\mathcal{L}(P \times Q) - \{\emptyset\} = (\mathcal{L}(P) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{L}(Q) - \{\emptyset\}).$$

*Idea de la demostración.* El teorema se sigue del hecho que toda cara de  $P \times Q$  tiene la forma  $F \times G$  con  $F$  cara de  $P$  y  $G$  cara de  $Q$ . Este hecho no es difícil de probar, y se deja como ejercicio al lector (ejercicio 2). □

**Ejemplo 7.5.** Como  $C_2 = C_1 \times C_1$ , tenemos la igualdad de posets  $\mathcal{L}(C_2) - \{\emptyset\} = (\mathcal{L}(C_1) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{L}(C_1) - \{\emptyset\})$ , como se muestra en la figura 27. ◇



**Figura 27.** La igualdad de posets  $(\mathcal{L}(C_1) - \{\emptyset\}) \times (\mathcal{L}(C_1) - \{\emptyset\}) = \mathcal{L}(C_2) - \{\emptyset\}$ .

**Ejemplo 7.6.** Consideremos el politopo 4-dimensional  $P = \Delta_2 \times \Delta_2$ . Aunque es difícil visualizar a  $P$ , podemos intentar entender todas sus caras. De acuerdo al teorema 7.4, las caras de  $P$  se obtienen como producto de una cara de  $\Delta_2$  con otra cara de  $\Delta_2$ . Podemos listarlas de la siguiente manera:

- *Vértices:* Todo vértice de  $P$  debe ser el producto de un vértice de  $\Delta_2$  con otro vértice de  $\Delta_2$ . Como cada  $\Delta_2$  tiene 3 vértices, obtenemos en total 9 vértices en  $P$ .
- *Aristas:* Cada arista de  $P$  se obtiene como el producto de una arista de  $\Delta_2$  con un vértice de  $\Delta_2$ , o viceversa. Como cada  $\Delta_2$  tiene 3 aristas y 3 vértices, tenemos 9 aristas de la forma arista  $\times$  vértice, y otras 9 de la forma vértice  $\times$  arista. En total  $P$  tiene entonces 18 aristas.
- *Caras de dimensión 2:* Hay 6 caras 2-dimensionales que se obtienen como el producto entre un vértice y todo  $\Delta_2$ , o viceversa. Todas estas caras son por lo tanto caras triangulares. Además, hay 9 caras 2-dimensionales que se obtienen como producto de arista con arista. Estas 9 caras son cuadrados. En total,  $P$  tiene 15 caras de dimensión 2.
- *Caras maximales:* Todas las caras maximales son de la forma arista  $\times \Delta_2$ , o viceversa. Hay en total 6 de éstas.
- *Cara total:* Hay 1 cara de dimensión 4, igual a todo  $\Delta_2 \times \Delta_2$ .

En particular, hemos calculado que el  $f$ -vector de  $P$  es  $(1, 9, 18, 15, 6, 1)$ . ◇

El método usado en el ejemplo anterior para contar las caras del producto entre dos politopos puede ser formalizado en el lenguaje de posets. Para esto introducimos la siguiente definición.

**Definición 7.7.** La **función generatriz de caras** de un politopo  $P$  de dimensión  $d$  es el polinomio en la variable  $t$  definido como

$$F_P(t) := f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots + f_d t^d,$$

donde  $f_i$  es el número de caras de  $P$  de dimensión  $i$ .

**Ejemplo 7.8.** La función generatriz de caras del segmento  $\Delta_1$  es  $F_{\Delta_1}(t) = 2 + t$ , y la del triángulo  $\Delta_2$  es  $F_{\Delta_2}(t) = 3 + 3t + t^2$ . La función generatriz de caras del cubo  $C_3$  es  $F_{C_3}(t) = 8 + 12t + 6t^2 + t^3$ , y la del octaedro  $D_3$  es  $F_{D_3}(t) = 6 + 12t + 8t^2 + t^3$ . ◇

Note que la función generatriz de caras de un politopo  $P$  es simplemente la función generatriz de rango del poset  $\mathcal{L}(P) - \{\emptyset\}$ . El teorema 7.4 y el hecho que la función generatriz de un producto de posets es el producto de sus funciones generatrices, implican por lo tanto el siguiente resultado.

**Corolario 7.9.** La función generatriz de caras del producto  $P \times Q$  satisface

$$F_{P \times Q}(t) = F_P(t) \cdot F_Q(t).$$

**Ejemplo 7.10.** La función generatriz de caras del producto  $\Delta_2 \times \Delta_2$  es

$$F_{\Delta_2 \times \Delta_2}(t) = F_{\Delta_2}(t) \cdot F_{\Delta_2}(t) = (3 + 3t + t^2) \cdot (3 + 3t + t^2) = 9 + 18t + 15t^2 + 6t^3 + t^4.$$

El lector puede comparar el contenido de esta última igualdad con el análisis del ejemplo 7.6.  $\diamond$

**Ejemplo 7.11.** Como vimos en el ejemplo 7.2, el hipercubo  $n$ -dimensional  $C_n$  es igual al producto de  $n$  segmentos  $C_1$ , es decir,  $C_n = (C_1)^n$ . Su orden de caras se puede describir entonces como

$$\mathcal{L}(C_n) - \{\emptyset\} = (\mathcal{L}(C_1) - \{\emptyset\})^n.$$

Además, su función generatriz de caras está dada por

$$F_{C_n}(t) = (F_{C_1}(t))^n = (2 + t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} t^i.$$

Esto nos dice que, para todo  $i \geq 0$ , el hipercubo  $C_n$  tiene exactamente  $\binom{n}{i} 2^{n-i}$  caras de dimensión  $i$ .  $\diamond$

## EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 7

- 7.1. (*Productos de símplexes.*) ¿Cuál es el  $f$ -vector del politopo  $\Delta_3 \times \Delta_1$ ? Describa todas sus caras.
- 7.2. (*Politopos producto.*) Si  $P$  y  $Q$  son politopos, pruebe las caras de  $P \times Q$  son exactamente los posibles productos de una cara de  $P$  con una cara de  $Q$ .

## 8. Politopos cíclicos

En esta sección introduciremos una familia importante de politopos, llamados politopos cíclicos. Estos politopos son extremales en varios sentidos; por ejemplo, los politopos cíclicos tienen el mayor número de caras posible entre todos los politopos de determinada dimensión y con determinado número de vértices.

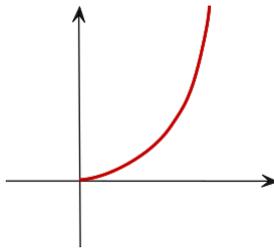
**Definición 8.1.** La **curva de momento** en  $\mathbb{R}^n$  es la curva  $C$  parametrizada como

$$C = \{\mathbf{m}(t) := (t, t^2, t^3, \dots, t^n) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

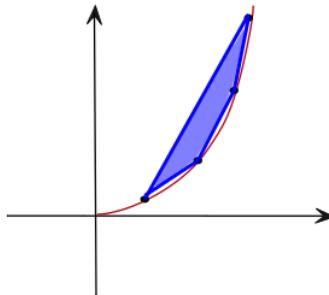
**Definición 8.2.** Para  $n < k$ , el **politopo cíclico**  $C_n(k)$  de dimensión  $n$  y con  $k$  vértices es

$$C_n(k) := \text{convexa}\{\mathbf{m}(t_1), \mathbf{m}(t_2), \dots, \mathbf{m}(t_k)\}, \quad \text{donde } t_1 < t_2 < \dots < t_k \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 8.3.** El politopo cíclico  $C_2(4)$  es la envolvente convexa de 4 puntos en una parábola, luego es combinatoriamente isomorfo al cuadrado (figura 29). El politopo cíclico  $C_3(5)$  es la envolvente convexa de 5 puntos en la curva de momento en dimensión 3, lo que resulta en una bipirámide triangular (figura 30).  $\diamond$



**Figura 28.** La curva de momento en  $\mathbb{R}^2$ .



**Figura 29.** El politopo cíclico  $C_2(4)$  es isomorfo al cuadrado.

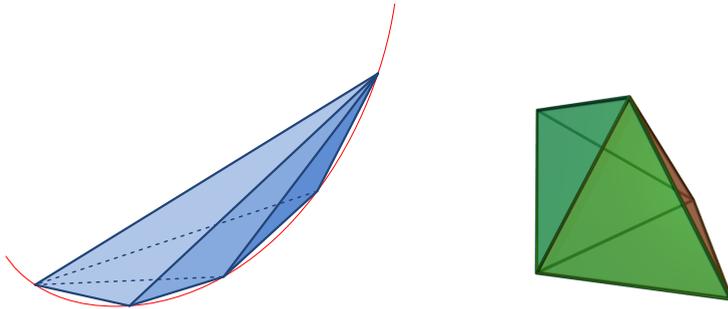
El siguiente resultado caracteriza combinatoriamente las caras (maximales) en un politopo cíclico.

**Teorema 8.4** (Teorema de paridad de Gale). *Si  $S \subset \{1, 2, \dots, k\}$ , los vértices  $\{\mathbf{m}(t_i) \mid i \in S\}$  forman una cara maximal de  $C_n(k)$  si y solo si  $|S| = n$  y para todo  $j, l \notin S$  se tiene que  $|\{i \in S \mid j < i < l\}|$  es un número par.*

Antes de hablar de la prueba, veamos un ejemplo.

**Ejemplo 8.5.** La siguiente tabla muestra todos los subconjuntos de tamaño 3 del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  y cuáles de ellos corresponden a una cara maximal de  $C_3(5)$ , de acuerdo al teorema de paridad de Gale. El lector debe asegurarse de entender completamente esta condición.

<sup>8</sup>Imagen de la bipirámide triangular creada por Jidari bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.



**Figura 30.** El politopo cíclico  $C_3(5)$  y la **bipirámide triangular** son isomorfos.<sup>8</sup>

Subconjunto	Cara maximal?
123	sí
124	no
125	sí
134	sí
135	no
145	sí
234	no
235	sí
345	sí

De aquí vemos que  $C_3(5)$  tiene 6 caras maximales, todas triangulares. ◇

*Idea de la demostración del teorema 8.4.* Veamos primero que cualesquiera  $n+1$  vértices de  $C_n(k)$  son afínmente independientes. De acuerdo al ejercicio 5 de la sección 2, podemos comprobar la independencia afín de un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$  chequeando la independencia lineal de sus levantamientos al plano de altura 1 en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Tenemos entonces que  $n+1$  puntos distintos  $\mathbf{m}(q_0), \mathbf{m}(q_1), \dots, \mathbf{m}(q_n)$  en la curva de momento en  $\mathbb{R}^n$  son afínmente independientes si y solo si sus levantamientos  $(1, \mathbf{m}(q_0)), (1, \mathbf{m}(q_1)), \dots, (1, \mathbf{m}(q_n))$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son linealmente independientes. Esto sucede si y solo si el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ q_0^2 & q_1^2 & \cdots & q_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0^n & q_1^n & \cdots & q_n^n \end{bmatrix}$$

es distinto de cero. Este es un determinante de Vandermonde, y por lo tanto se factoriza como  $\prod_{i < j} (q_i - q_j)$ . Como los  $q_i$  son todos distintos, tenemos que este determinante es diferente de cero, luego los puntos  $\mathbf{m}(q_0), \mathbf{m}(q_1), \dots, \mathbf{m}(q_n)$  son afínmente independientes, como queríamos. En particular, de lo anterior se sigue que las caras maximales de

$C_n(k)$  son todas símplices con  $n$  vértices, ya que cualesquiera  $n + 1$  vértices de  $C_n(k)$  no están en un mismo hiperplano.

Ahora, si tomamos  $n$  vértices  $\mathbf{m}(t_{i_1}), \dots, \mathbf{m}(t_{i_n})$  de  $C_n(k)$ , podemos describir el hiperplano que pasa por ellos mediante la ecuación lineal (técnicamente, afín)

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & t_{i_1} & \dots & t_{i_n} \\ x_2 & t_{i_1}^2 & \dots & t_{i_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & t_{i_1}^n & \dots & t_{i_n}^n \end{vmatrix} = 0,$$

ya que este determinante es una función lineal (afín) que se anula en todos los puntos  $\mathbf{m}(t_{i_1}), \dots, \mathbf{m}(t_{i_n})$ . Éstos  $n$  vértices forman una cara maximal precisamente cuando todos los demás vértices de  $C_n(k)$  quedan al mismo lado de este hiperplano, o equivalentemente, cuando la función  $L$  tiene el mismo signo al evaluarla en todos los demás vértices de  $C_n(k)$ .

Consideremos el polinomio  $p(t) := L(\mathbf{m}(t)) = L(t, t^2, t^3, \dots, t^n)$  en la variable  $t$ , el cual tiene grado  $n$ . Como  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}$  son  $n$  raíces distintas de  $p$ , tenemos que todas ellas deben tener multiplicidad 1, y por lo tanto  $p$  cambia de signo en cada una de ellas (ver figura 31). Para que  $L(\mathbf{m}(t)) = p(t)$  tenga el mismo signo al evaluarla en todos los puntos  $t_1, \dots, t_n$  (o que sea igual a 0), se debe cumplir entonces que entre cualesquiera dos puntos  $t_j$  y  $t_l$  que no sean ninguno de nuestros  $n$  vértices debe haber un número par de raíces  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}$ . Esta es precisamente la condición de paridad de Gale.  $\square$

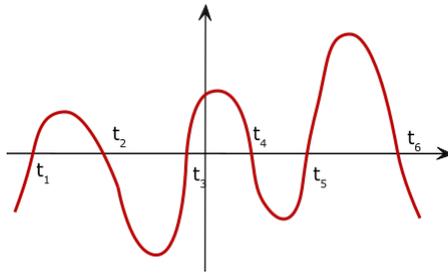


Figura 31. Polinomio  $p(t)$  en la prueba del Teorema 8.4.

Como corolario, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 8.6.** Si  $T$  es un conjunto de vértices del politopo cíclico  $C_n(k)$  de tamaño  $|T| \leq \frac{n}{2}$  entonces  $T$  forma una cara.

*Idea de la demostración.* Toda cara de  $C_n(k)$  está contenida en una cara maximal. Como todas las caras maximales de  $C_n(k)$  son símplices, es suficiente ver que cualquier subconjunto de vértices  $T$  con  $|T| \leq \frac{n}{2}$  está contenido en un subconjunto  $S$  con  $|S| = n$  que

satisface la condición de paridad de Gale. Este hecho combinatorio no es difícil de probar, y se deja como ejercicio al lector (ejercicio 3).  $\square$

**Ejemplo 8.7.** Consideremos el politopo cíclico  $C_4(k)$  de dimensión 4 con  $k \geq 5$  vértices. De acuerdo al corolario 8.6, cualesquiera 2 vértices de  $C_4(k)$  forman una arista! Esto puede ser poco intuitivo, ya que en  $\mathbb{R}^3$  el tetraedro es el único politopo que cumple que cualquier par de vértices forma una arista. En más dimensiones, sin embargo, hay “más espacio” para que todos los vértices estén conectados dos a dos en la frontera de  $C_4(k)$ .  $\diamond$

El corolario 8.6 nos dice que  $C_n(k)$  es un politopo con muchas caras de dimensión menor a  $\frac{n}{2}$ . El siguiente es un importante teorema, que asegura que lo mismo es cierto para todas las dimensiones.

**Teorema 8.8** (Teorema de la cota superior). *Si  $P$  es un politopo de dimensión  $n$  con  $k$  vértices entonces*

$$f_d(P) \leq f_d(C_n(k))$$

para todo  $0 \leq d \leq n$ .

Una prueba relativamente sencilla del teorema de la cota superior se puede encontrar en [4, Sección 8.4].

**Ejemplo 8.9.** ¿Existe un politopo cuyo  $f$ -vector tenga la forma  $(1, 6, 13, ?, 1)$ ? Como el  $f$ -vector tiene longitud 5, este politopo debe ser de dimensión 3. Por el teorema de la cota superior, el politopo de dimensión 3 con 6 vértices que más aristas tiene es el politopo cíclico  $C_3(6)$ . Pero  $C_3(6)$  tiene solamente 12 aristas (ver el ejercicio 1), por lo que no es posible que la tercera entrada del  $f$ -vector sea 13.  $\diamond$

## EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 8

- 8.1. (Politopo cíclico  $C_3(6)$ .) Dibuje el politopo cíclico 3-dimensional  $C_3(6)$ . ¿Cuál es su  $f$ -vector?
- 8.2. (Politopo cíclico  $C_5(7)$ .) ¿Cuáles son las caras maximales del politopo cíclico  $C_5(7)$ ? ¿Cuáles son las caras de dimensión 3? ¿De menor dimensión?
- 8.3. (Condición de paridad de Gale.) Si  $n \leq k$ , pruebe que todo subconjunto  $T \subset \{1, 2, \dots, k\}$  con  $|T| \leq \frac{n}{2}$  está contenido en un subconjunto  $S \subset \{1, 2, \dots, k\}$  de tamaño  $n$  que satisface la condición de paridad de Gale.
- 8.4. (¿Politopos isomorfos?) ¿Es cierto que el politopo cíclico  $C_4(6)$  es combinatoriamente isomorfo al politopo  $(\Delta_2 \times \Delta_2)^*$ ?

## 9. Fórmula de Euler

En esta sección discutiremos la fórmula tal vez más famosa en la teoría de politopos. Esta fórmula presenta una relación general y profunda entre las distintas entradas del  $f$ -vector de un politopo.

**Ejemplo 9.1.** Consideremos los siguientes  $f$ -vectores:

- El tetraedro tiene  $f$ -vector  $(1, 4, 6, 4, 1)$ .
- La bipirámide triangular tiene  $f$ -vector  $(1, 5, 9, 6, 1)$ .
- El octaedro tiene  $f$ -vector  $(1, 6, 12, 8, 1)$ .

Note que si sumamos y restamos alternadamente las distintas entradas cualquiera de estos  $f$ -vectores, el resultado es siempre 0.

- Tetraedro:  $-1 + 4 - 6 + 4 - 1 = 0$ .
- Bipirámide triangular:  $-1 + 5 - 9 + 6 - 1 = 0$ .
- Octaedro:  $-1 + 6 - 12 + 8 - 1 = 0$ .

Éstas son algunas instancias de lo que se conoce como la *fórmula de Euler para politopos*. ◇

La fórmula de Euler en realidad ilustra un resultado muy general en el área de topología algebraica. Sin embargo, nosotros presentaremos una prueba completamente combinatoria, para lo que desarrollaremos el concepto de “descascaramiento” de un “complejo politopal”.

### 9.1. Característica de Euler

Comenzaremos por extender un poco nuestros objetos de estudio.

**Definición 9.2.** Un **complejo politopal**  $\mathcal{C}$  es una colección de politopos en  $\mathbb{R}^n$  tal que:

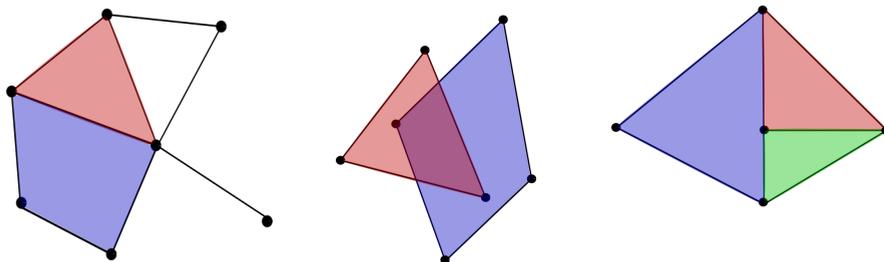
1. Si  $P \in \mathcal{C}$  y  $F$  es una cara de  $P$  entonces  $F \in \mathcal{C}$ .
2. Si  $P, Q \in \mathcal{C}$  entonces  $P \cap Q$  es una cara tanto de  $P$  como de  $Q$ .

Si  $P \in \mathcal{C}$ , abusaremos un poco de la notación y diremos que  $P$  es una **cara** de  $\mathcal{C}$ . Una **cara maximal** de  $\mathcal{C}$  es una cara que no está contenida propiamente en ninguna otra cara de  $\mathcal{C}$ . La **dimensión** de  $\mathcal{C}$  es la máxima dimensión de alguna cara  $P \in \mathcal{C}$ . Por último, diremos que  $\mathcal{C}$  es **puro** si todas sus caras maximales tienen la misma dimensión  $\dim(\mathcal{C})$ .

**Ejemplo 9.3.** En la figura 32 se muestran 3 colecciones de politopos en  $\mathbb{R}^2$ . Las figuras muestran solo los politopos maximales en cada colección, pero se asume que las colecciones son cerradas bajo tomar caras. Podemos ver que la primera colección es un complejo politopal, mientras que la segunda y la tercera no lo son. El complejo politopal de la izquierda tiene dimensión 2, no es puro, y tiene 5 caras maximales. ◇

Cualquier politopo da lugar a dos complejos politopales, de la siguiente manera.

**Definición 9.4.** Si  $P$  es un politopo, la colección de todas las caras de  $P$  es un complejo politopal puro de dimensión  $\dim(P)$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}(P)$ . Similarmente, la colección de todas las caras *propias* de  $P$  (es decir, distintas a  $P$ ) forma un complejo politopal puro de dimensión  $\dim(P) - 1$ , que denotaremos por  $\mathcal{C}(\partial P)$ .



**Figura 32.** Colecciones de politopos en  $\mathbb{R}^2$ . Solo la primera a la izquierda es un complejo politopal.

Podemos generalizar la noción de  $f$ -vector a complejos politopales.

**Definición 9.5.** El  $f$ -vector de un complejo politopal  $\mathcal{C}$  es el vector  $(f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_d)$ , donde  $d = \dim(\mathcal{C})$  y  $f_i$  es el número de politopos en  $\mathcal{C}$  que tienen dimensión  $i$ .

**Ejemplo 9.6.** El  $f$ -vector del complejo politopal a la izquierda de la figura 32 es  $(1, 7, 9, 2)$ . Note que en este caso, la suma alternada de las entradas del vector no es igual a 0. Esto muestra que la Fórmula de Euler no es válida para cualquier complejo politopal.  $\diamond$

El ejemplo anterior nos motiva a la siguiente definición.

**Definición 9.7.** La **característica (reducida) de Euler** de un complejo politopal  $\mathcal{C}$  es

$$\chi(\mathcal{C}) := -f_{-1} + f_0 - f_1 + \dots + (-1)^d f_d,$$

donde  $(f_{-1}, f_0, \dots, f_d)$  es el  $f$ -vector de  $\mathcal{C}$ .

La característica de Euler de un complejo politopal es un invariante muy útil e importante, que satisface la siguiente forma de inclusión-exclusión.

**Proposición 9.8.** Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son dos complejos politopales tales que  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  es un complejo politopal, entonces

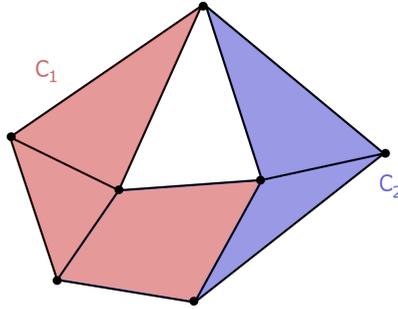
$$\chi(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2).$$

*Idea de la demostración.* Esta igualdad se tiene debido a que el número de caras en cada dimensión satisface una fórmula similar de inclusión-exclusión. El ejemplo 9.9 muestra una instancia de esto.  $\square$

**Ejemplo 9.9.** La figura 33 muestra dos complejos politopales  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  de dimensión 2, cuya unión  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  es también un complejo politopal. Podemos verificar la proposición 9.8:

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{C}_1) &= -1 + 6 - 8 + 3 = 0 \\ \chi(\mathcal{C}_2) &= -1 + 4 - 5 + 2 = 0 \\ \chi(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) &= -1 + 3 - 1 + 0 = 1 \\ \chi(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) &= -1 + 7 - 12 + 5 = -1\end{aligned}$$

Note que la razón por la que se satisface la proposición 9.8 es porque, de hecho, tal relación de inclusión-exclusión se satisface para el número de caras en cada dimensión.  $\diamond$



**Figura 33.** Dos complejos politopales:  $\mathcal{C}_1$  consiste de los dos triángulos a la izquierda y el cuadrilátero, y  $\mathcal{C}_2$  de los dos triángulos a la derecha.

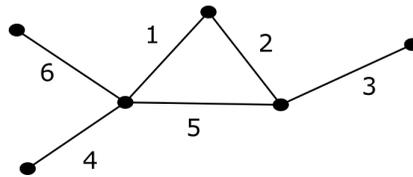
## 9.2. Descascaramientos

Ahora introduciremos la noción fundamental que nos permitirá estudiar más a fondo los  $f$ -vectores de politopos. La definición es una definición recursiva.

**Definición 9.10.** Sea  $\mathcal{C}$  un complejo politopal *puro* de dimensión  $\dim(\mathcal{C}) \geq 1$ . Un **descascaramiento** (*shelling*, en inglés) es un ordenamiento  $F_1, F_2, \dots, F_k$  de todas las caras maximales de  $\mathcal{C}$ , tal que para todo  $1 < i \leq k$  se tiene que  $F_i \cap (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1})$  es un segmento inicial (no vacío) de un descascaramiento del complejo politopal  $\mathcal{C}(\partial F_i)$ . Note que esto implica que  $F_i \cap (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1})$  debe ser un complejo politopal puro de dimensión  $\dim(\mathcal{C}) - 1$ . Además, por convención, si  $\dim(\mathcal{C}) = 0$  entonces cualquier ordenamiento de sus caras maximales es un descascaramiento.

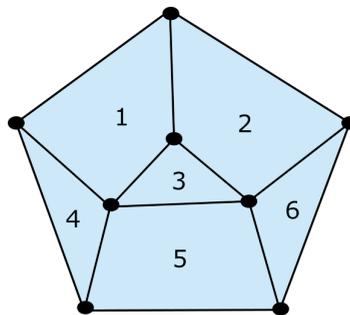
**Ejemplo 9.11.** Para entender la definición 9.10, miremos algunos ejemplos.

1. La figura 34 muestra un complejo politopal puro de dimensión 1, y un descascaramiento de éste. Si intercambiamos en el orden las caras 2 y 3, el orden que resulta ya no es un descascaramiento, debido a que la intersección de la segunda cara con las anteriores sería vacía.



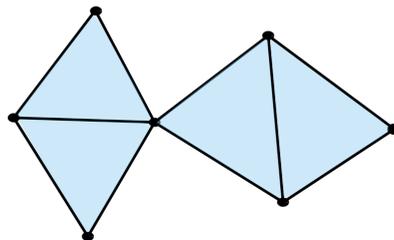
**Figura 34.** Descascaramiento de un complejo politopal 1-dimensional.

2. La figura 35 muestra un descascaramiento de un complejo politopal de dimensión 2. Si intercambiamos las caras 3 y 6 ya no obtenemos un descascaramiento, ya que en ese caso la intersección de la cara 5 con las anteriores consiste de dos segmentos opuestos, lo que no es el comienzo de un descascaramiento de su frontera.



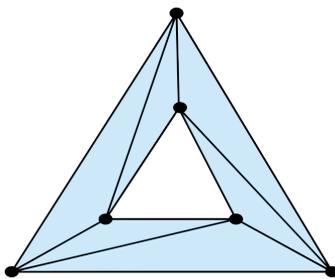
**Figura 35.** Descascaramiento de un complejo politopal 2-dimensional.

3. La figura 36 muestra un complejo politopal puro de dimensión 2. Este complejo politopal no es descascarable, ya que cualquier orden de las 4 caras maximales en algún momento cumple que  $F_i \cap (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1})$  es solo un vértice y no un complejo politopal puro de dimensión 1.



**Figura 36.** Un complejo politopal no descascarable.

4. La figura 37 muestra un complejo politopal puro de dimensión 2. El lector puede verificar que este complejo politopal no es descascarable, ya que cualquier orden de las caras maximales cumple en algún momento que  $F_i \cap (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1})$  es la unión de un vértice con una arista, y no es puro de dimensión 1.



**Figura 37.** Un complejo politopal no descascarable.

◇

**Ejemplo 9.12.** Construyamos un descascaramiento del complejo  $\mathcal{C}(\partial C_3)$  de caras propias del cubo  $C_3$ . Tomemos cualquiera de las 6 caras maximales como la primera cara. La segunda debe ser una cara maximal contigua a la primera; escojamos cualquiera de ellas. Podemos tomar la tercera cara como la cara opuesta a la segunda. Sin embargo, ahora la cuarta cara no puede ser la cara opuesta a la primera, ya que ésta se intersecta con las anteriores en dos segmentos disyuntos (lo que no es el comienzo de un descascaramiento de su frontera). Por lo tanto, la cuarta cara debe ser alguna de las dos caras restantes que son adyacentes a la primera. Finalmente, podemos tomar las 2 caras restantes en cualquier orden. ◇

**Proposición 9.13.** Si  $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}, F_k$  es un descascaramiento del complejo politopal  $\mathcal{C}$  entonces el orden reverso  $F_k, F_{k-1}, \dots, F_2, F_1$  también es un descascaramiento de  $\mathcal{C}$ .

*Idea de la demostración.* Este resultado se sigue por inducción en la dimensión del complejo politopal, usando la siguiente observación: Si  $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}, F_k$  es un descascaramiento entonces  $F_i \cap (F_{i+1} \cup F_{i+2} \cup \dots \cup F_k) = \partial F_i - (F_i \cap (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1}))$ . □

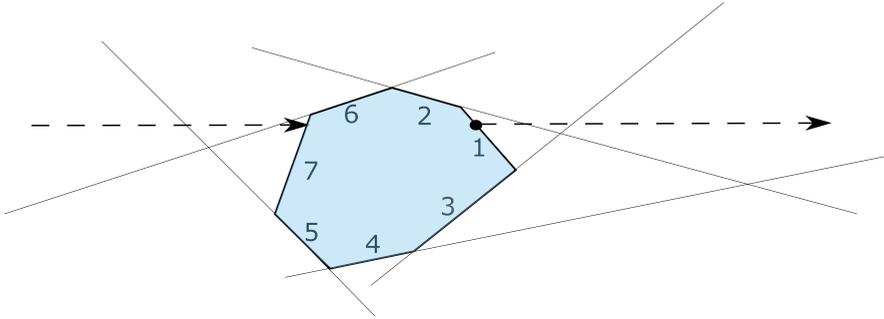
El siguiente teorema es fundamental en la teoría de politopos. El hecho que los politopos son convexos es esencial para su prueba.

**Teorema 9.14.** Si  $P$  es un politopo entonces  $\mathcal{C}(\partial P)$  es descascarable.

*Idea de la demostración.* Imaginemos que el politopo  $P$  es un planeta sólido. Tomemos un punto sobre la superficie de este planeta que esté en el interior de una cara maximal. Ahora, imaginemos un viaje en una nave espacial, comenzando en ese punto y alejándose del planeta siguiendo una línea recta suficientemente genérica. Al comienzo del viaje, desde la nave espacial solo es posible ver una cara maximal de  $P$  (la cara en la que comienza el viaje). A medida que la nave avanza, nuevas caras maximales del planeta se van volviendo visibles desde la nave. El viaje continua hasta el infinito, y supongamos que después de esto la nave reaparece en el lado completamente opuesto de la recta, ahora acercándose al planeta. Desde bien lejos, la nave puede ver todas las caras que antes no

veía. A medida que se acerca, algunas de estas caras maximales dejan de ser visibles, hasta que solo se ve una en el momento en que la nave aterriza de nuevo en el planeta.

Por inducción en la dimensión de  $P$ , no es muy difícil probar que el orden en el que se vieron las caras maximales durante este viaje (junto con el orden en el que se dejaron de ver en la segunda mitad del viaje) forman un descascaramiento de  $P$ . Más detalles se pueden encontrar en [4, Teorema 8.12].  $\square$



**Figura 38.** La nave espacial saliendo del planeta y el descascaramiento resultante.

### 9.3. Fórmula de Euler

Finalmente estamos en posición para probar la Fórmula de Euler.

**Teorema 9.15** (Fórmula de Euler). *Si  $P$  es un politopo entonces  $\chi(\mathcal{C}(P)) = 0$ .*

*Idea de la demostración.* Usemos inducción en  $d = \dim(P)$  para probar que  $\chi(\mathcal{C}(P)) = 0$  y  $\chi(\mathcal{C}(\partial P)) = (-1)^{d-1}$ . Tomemos un descascaramiento  $F_1, F_2, \dots, F_k$  de  $\mathcal{C}(P)$ , el cual existe por el Teorema 9.14. Consideremos la secuencia de complejos politopales

$$\mathcal{C}(F_1), \mathcal{C}(F_1) \cup \mathcal{C}(F_2), \dots, \mathcal{C}(F_1) \cup \mathcal{C}(F_2) \cup \dots \cup \mathcal{C}(F_k) = \mathcal{C}(\partial P).$$

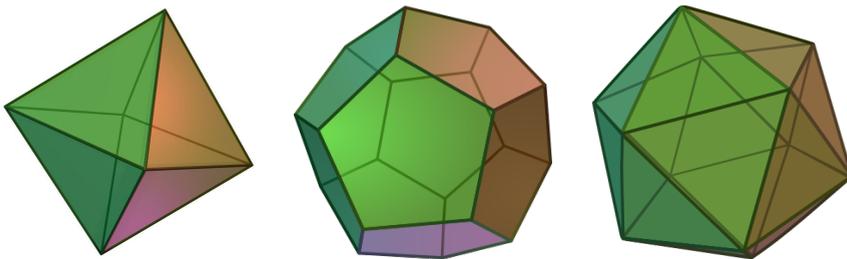
**Afirmación:** Todos estos complejos politopales tienen característica de Euler igual a 0, excepto el último, cuya característica de Euler es  $\chi(\mathcal{C}(\partial P)) = (-1)^{d-1}$ .

Esta afirmación la podemos probar de manera inductiva, de la siguiente manera. Como  $F_1$  tiene dimensión  $d - 1$ , nuestra hipótesis de inducción nos dice que  $\chi(\mathcal{C}(F_1)) = 0$ . La característica de Euler del segundo complejo la podemos calcular usando la proposición 9.8 y nuestra hipótesis de inducción:  $\chi(\mathcal{C}(F_1) \cup \mathcal{C}(F_2)) = \chi(\mathcal{C}(F_1)) + \chi(\mathcal{C}(F_2)) - \chi(\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{C}(F_2)) = 0 + 0 - 0 = 0$ , donde  $\chi(\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{C}(F_2)) = 0$  debido a que  $\mathcal{C}(F_1) \cap \mathcal{C}(F_2)$  es el comienzo de un descascaramiento de  $\mathcal{C}(\partial F_2)$  (y de nuevo nuestra hipótesis de inducción en la dimensión). De la misma forma,  $\chi(\mathcal{C}(F_1) \cup \mathcal{C}(F_2) \cup \mathcal{C}(F_3)) = \chi(\mathcal{C}(F_1) \cup \mathcal{C}(F_2)) + \chi(\mathcal{C}(F_3)) - \chi((\mathcal{C}(F_1) \cup \mathcal{C}(F_2)) \cap \mathcal{C}(F_3)) = 0 + 0 - 0 = 0$ , por inducción. Continuando este proceso, llegamos a que  $\chi(\mathcal{C}(\partial P)) = \chi(\mathcal{C}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(F_{k-1})) + \chi(\mathcal{C}(F_k)) - \chi((\mathcal{C}(F_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(F_{k-1})) \cap \mathcal{C}(F_k))$ . Las dos primeras características de Euler

son 0 por inducción, mientras que la última es igual a  $\chi(\mathcal{C}(\partial F_k)) = (-1)^{d-2}$ , también por inducción. Esto prueba que  $\chi(\mathcal{C}(\partial P)) = (-1)^{d-1}$ , y por lo tanto  $\chi(\mathcal{C}(P)) = 0$ , como queríamos.  $\square$

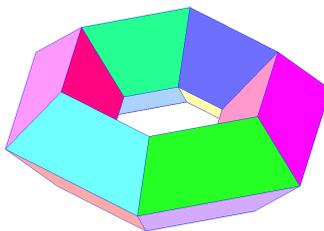
### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 9

9.1. (*Descascaramientos en 3D.*) Describa descascaramientos de la frontera del octaedro, del dodecaedro, y del icosaedro.



**Figura 39.** Politopos en 3D.<sup>9</sup>

9.2. (*Características de Euler.*) ¿Cuál es la característica de Euler (reducida) del complejo politopal de dimensión 2 que muestra la figura 40?



**Figura 40.** Un toro hexagonal.<sup>10</sup>

9.3. (*Politopos en 3D.*) ¿Existen dos politopos de dimensión 3 con el mismo número de vértices y de caras maximales pero distinto número de aristas?

9.4. (*Número de descascaramientos.*) ¿Cuántos descascaramientos existen de la frontera del tetraedro? ¿Cuántos de la frontera del cubo?

9.5. (*Descascaramientos en 4D.*) Encuentre un descascaramiento de la frontera de  $\Delta_3 \times \Delta_1$ .

<sup>9</sup>Figura 39 creada por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

<sup>10</sup>Figura 40 tomada de la página <http://www.kidsmathgamesonline.com>.

### 10. $h$ -vectores y ecuaciones de Dehn-Sommerville

En esta última sección hablaremos de  $h$ -vectores, y estudiaremos más a fondo los  $f$ -vectores de aquellos polítopos cuyas caras son todas símplices.

**Definición 10.1.** Un polítopo  $P$  se llama **simplicial** si todas sus caras maximales son símplices.

**Ejemplo 10.2.** Cualquier símplice es un polítopo simplicial. El octaedro  $D_3$  es un polítopo simplicial, mientras que el cubo  $C_3$  no lo es. En general, cualquier polítopo cruz  $D_n$  es simplicial, mientras que los únicos hipercubos que son simpliciales son el segmento  $C_1$  y el cuadrado  $C_2$ .  $\diamond$

Si  $P$  es un polítopo, podemos pensar en un descascaramiento de  $\mathcal{C}(\partial P)$  como una forma de construir a  $P$  por pasos. Llevar cuentas de las caras que aparecen en cada paso de este proceso nos lleva a profundos resultados, como veremos a continuación.

**Definición 10.3.** Si  $F$  es un símplice y  $\mathbf{v}$  es un vértice de  $F$ , denotamos por  $F_{\mathbf{v}}$  a la única cara maximal de  $F$  que no contiene a  $\mathbf{v}$ . Supongamos ahora que  $F_1, F_2, \dots, F_k$  es un descascaramiento de un polítopo simplicial  $P$ . La **restricción** de  $F_i$  es la cara

$$R_i := \text{convexa}\{\mathbf{v} \in F_i \mid (F_i)_{\mathbf{v}} \subset F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1}\}.$$

Note que el número de vértices de  $R_i$  es igual al número de caras maximales de  $F_i$  contenidas en  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1}$ .

**Ejemplo 10.4.** Consideremos el descascaramiento  $F_1, \dots, F_8$  del octaedro  $D_3$  que se muestra en la figura 41. El lector debe asegurarse de calcular las diferentes restricciones  $R_i$  de las caras  $F_i$ , que tienen las siguientes dimensiones.

$R_1$	$\emptyset$
$R_2$	vértice
$R_3$	vértice
$R_4$	segmento
$R_5$	vértice
$R_6$	segmento
$R_7$	segmento
$R_8$	triángulo

$\diamond$

**Definición 10.5.** Dado un descascaramiento  $F_1, \dots, F_k$  de la frontera  $\mathcal{C}(\partial P)$  de un polítopo simplicial  $P$ , el  **$h$ -vector** de  $P$  se define como el vector

$$(h_0, h_1, h_2, \dots, h_d), \quad \text{donde } h_i := |\{j \mid R_j \text{ tiene exactamente } i \text{ vértices}\}|,$$

donde  $R_j$  es la restricción de la cara  $F_j$ .

<sup>11</sup>Figura 41 basada en imagen por Kjell André bajo la licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

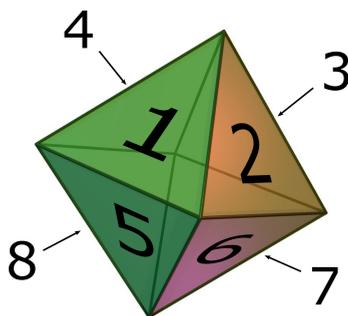


Figura 41. Un descascaramiento del octaedro.<sup>11</sup>

**Ejemplo 10.6.** Volviendo al descascaramiento del octaedro descrito en el ejemplo 10.4, vemos que hay una restricción con 0 vértices ( $R_1$ ), tres restricciones con un vértice ( $R_2$ ,  $R_3$ , y  $R_5$ ), tres restricciones con dos vértices ( $R_4$ ,  $R_6$ , y  $R_7$ ), y una restricción con 3 vértices ( $R_8$ ). El  $h$ -vector del octaedro es entonces  $(1, 3, 3, 1)$ .  $\diamond$

*Observación 10.7.* Hemos definido el  $h$ -vector de un politopo simplicial  $P$  basados en una escogencia de un descascaramiento de su frontera. Sin embargo, no es para nada claro que este  $h$ -vector no dependa del descascaramiento escogido! Pronto probaremos que este es el caso, y presentaremos una descripción del  $h$ -vector que claramente depende solo de  $P$ .

Las restricciones de las distintas caras maximales en un descascaramiento de  $\mathcal{C}(\partial P)$  nos ayudan a llevar cuentas de las nuevas caras que van apareciendo al construir  $P$ .

**Proposición 10.8.** Sea  $F_1, \dots, F_k$  un descascaramiento de la frontera  $\mathcal{C}(\partial P)$  de un politopo simplicial  $P$ . Para todo  $i$ , las caras de  $P$  que están contenidas en  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1} \cup F_i$  pero que no están contenidas en  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{i-1}$  son exactamente las caras de  $F_i$  que contienen a  $R_i$ .

La prueba de la proposición 10.8 no es muy difícil, y se deja como ejercicio al lector (Ejercicio 3). El siguiente corolario es básicamente una reformulación.

**Corolario 10.9.** Si  $F_1, \dots, F_k$  es un descascaramiento de la frontera  $\mathcal{C}(\partial P)$  de un politopo simplicial  $P$ , entonces el orden de caras propias  $\mathcal{L}(P) - \{P\}$  se descompone como la unión disyunta de intervalos

$$\mathcal{L}(P) - \{P\} = [R_1, F_1] \sqcup [R_2, F_2] \sqcup \dots \sqcup [R_k, F_k].$$

**Ejemplo 10.10.** El lector debe asegurarse de que la proposición 10.8 y su corolario se satisfacen para el descascaramiento del octaedro descrito en los ejemplos 10.4 y 10.6.  $\diamond$

El corolario anterior nos permite contar las caras de un politopo simplicial  $P$  en base a su  $h$ -vector.

**Proposición 10.11.** *Podemos recuperar el número de caras de un polítopo simplicial  $P$  de dimensión  $d$  a partir de su  $h$ -vector como*

$$\begin{aligned} f_{-1} &= h_0 \\ f_0 &= d h_0 + h_1 \\ f_1 &= \binom{d}{2} h_0 + (d-1) h_1 + h_2 \\ &\vdots \\ f_i &= \binom{d}{i+1} h_0 + \binom{d-1}{i} h_1 + \binom{d-2}{i-1} h_2 + \cdots + \binom{d-i-1}{0} h_{i+1} \\ &\vdots \\ f_{d-1} &= h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_d. \end{aligned}$$

*Idea de la demostración.* Contemos el número de caras  $i$ -dimensionales de  $P$  usando la descomposición de  $\mathcal{L}(P)$  descrita en el corolario 10.9. Un intervalo  $[R_j, F_j]$  contiene caras de dimensión  $i$  si y solo si  $\dim(R_j) \geq i$ , es decir, si el número de vértices  $k$  de  $R_j$  es por lo menos  $i+1$ . En este caso, como el intervalo  $[R_j, F_j]$  es un álgebra booleana  $\mathbb{B}_{d-k}$ , el número de caras  $i$ -dimensionales en  $[R_j, F_j]$  es exactamente  $\binom{d-k}{i+1-k}$ . Sumando sobre todos estos intervalos obtenemos la expresión deseada.  $\square$

La relación anterior entre el  $f$ -vector y el  $h$ -vector de un polítopo simplicial se puede codificar de manera compacta, de la siguiente manera.

**Definición 10.12.** El  $f$ -polinomio de un polítopo  $P$  es el polinomio en la variable  $t$  dado por

$$f_P(t) := f_{d-1} + f_{d-2} t + \cdots + f_0 t^{d-1} + f_{-1} t^d,$$

donde  $(f_{-1}, f_0, \dots, f_d)$  es el  $f$ -vector de  $P$ .

El  $h$ -polinomio de un polítopo simplicial  $P$  es

$$h_P(t) := h_d + h_{d-1} t + \cdots + h_0 t^d,$$

donde  $(h_0, h_1, \dots, h_d)$  es el  $h$ -vector de  $P$ .

**Ejemplo 10.13.** Si  $D_3$  es el octaedro, su  $f$ -polinomio es  $f_{D_3}(t) = 8 + 12t + 6t^2 + t^3$ , y su  $h$ -polinomio es  $h_{D_3}(t) = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$ .  $\diamond$

**Proposición 10.14.** *Si  $P$  es un polítopo simplicial, tenemos que*

$$h(t+1) = f(t),$$

y por lo tanto

$$h(t) = f(t-1).$$

*En particular, el  $h$ -vector de  $P$  depende solamente de su  $f$ -vector.*

*Idea de la demostración.* Esta relación es simplemente una reformulación de las ecuaciones en la proposición 10.11. Los detalles se dejan como ejercicio al lector.  $\square$

Terminamos esta sección con un elegante teorema sobre el  $h$ -vector de un politopo simplicial. Nótese que, en vista de la proposición 10.14, este teorema expresa ciertas relaciones no triviales que debe cumplir todo  $f$ -vector de un politopo simplicial.

**Teorema 10.15** (Ecuaciones de Dehn-Sommerville). *Si  $P$  es un politopo simplicial entonces su  $h$ -vector satisface*

$$h_i = h_{d-i}$$

para todo  $i$ .

*Demostración.* Por la proposición 9.13, sabemos que si  $F_1, F_2, \dots, F_{k-1}, F_k$  es un descascaramiento de  $P$  entonces el orden inverso  $F_k, F_{k-1}, \dots, F_2, F_1$  también lo es. Ahora, para todo  $i$ , las caras maximales de  $F_i$  que están contenidas en  $F_1 \cup \dots \cup F_{i-1}$  son exactamente las caras maximales de  $F_i$  que no están contenidas en  $F_{i+1} \cup \dots \cup F_k$ . De esto se sigue que la cara maximal  $F_i$  contribuye a la entrada  $h_j$  del  $h$ -vector si y solo si, en el descascaramiento reverso,  $F_i$  contribuye a la entrada  $h_{d-j}$ . Ya que el  $h$ -vector es el mismo para ambos descascaramientos, el teorema se sigue.  $\square$

#### EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 10

- 10.1. ( *$h$ -vector del icosaedro.*) Calcule el  $h$ -vector del icosaedro de dos maneras distintas: usando un descascaramiento y a partir del  $f$ -polinomio.
- 10.2. ( *$f$ -vectores imposibles.*) Explique por qué los siguientes no pueden ser los  $f$ -vectores de ningún politopo simplicial:
- $f = (1, 8, 12, 13, 7, 1)$ .
  - $f = (1, 9, 17, 14, 6, 1)$ .
  - $f = (1, 7, 13, 12, 6, 1)$ .
- 10.3. (*Restricciones de caras.*) Si  $F_1, F_2, \dots, F_k$  es un descascaramiento de un politopo simplicial, demuestre que las caras de  $F_1 \cup \dots \cup F_{i-1} \cup F_i$  que no están en  $F_1 \cup \dots \cup F_{i-1}$  son exactamente las caras de  $F_i$  que contienen a la restricción  $R_i$ .

#### Referencias

- [1] R. S. González D'León & Jhon Bladimir Caicedo, *Conjuntos parcialmente ordenados y retículos*, Notas de clase del minicurso en Días de Combinatoria 2017.
- [2] B. Grünbaum, *Convex polytopes. Prepared by Volker Kaibel, Victor Klee, and Günter M. Ziegler*, 2nd ed., vol. 221, New York, NY: Springer, 2003.
- [3] Numberphile, *Perfect shapes in higher dimension*, <https://www.youtube.com/watch?v=2s4TqVAbfz4>, YouTube video.

- [4] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 152, Springer-Verlag, New York, 1995.

Recibido en enero 25 de 2018. Aceptado para publicación en octubre 4 de 2019.

FELIPE RINCÓN  
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES  
QUEEN MARY UNIVERSITY OF LONDON  
LONDRES, REINO UNIDO  
e-mail: f.rincon@qmul.ac.uk

SIMÓN SOTO  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE  
EINDHOVEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY  
EINDHOVEN, PAÍSES BAJOS  
e-mail: s.a.soto.ochoa@tue.nl