Lecturas Matemáticas
Volumen **40** (2) (2019), páginas 217-244
ISSN 0120-1980

Grupos y enumeración

Groups and enumerations

Nantel Bergeron[1] y Lilian J. Cruz[2]

[1]York University, Canadá
[2]Universidad del Valle, Colombia

Resumen. Estamos interesados en la definición de acciones de grupos de un grupo. Deducimos algunos resultados de enumeraciones relacionados con las acciones de grupos. En particular, demostramos el teorema de Lagrange y el lema de Burnside. Finalmente incluimos una introducción a la teoría de enumeración de Pólya.

***Palabras clave*:** Grupos, acciones de grupos, enumeraciones, teoría de Pólya.

Abstract. We motivate the definition of groups from group actions. We derive some enumerations results related to group actions. In particular, we Lagrange's theorem and Burnside's lemma. Finally we have an introduction to Pólya's enumeration theory.

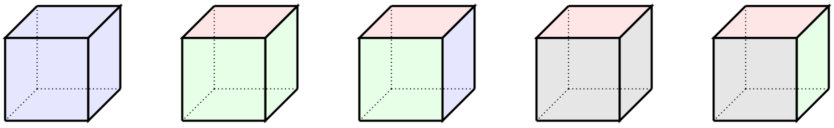
***Key words*:** Group, Group action, Enumeration, Pólya theory.

2010 AMS Mathematics Subject Classification: Primario 05E15, 05E18. Secundario 05E05, 05A15.

Día 1

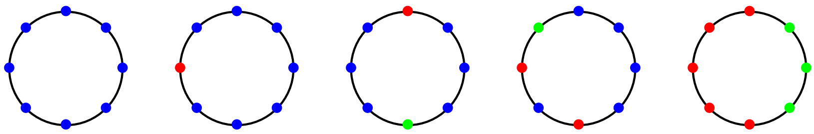
1. Introducción rápida

En este cursillo veremos cómo contar varias cantidades relacionadas con las simetrías de un objeto. Por ejemplo, ¿cuántos dados diferentes podemos construir con cuatro colores?



. . . ??

Hay muchas posibilidades y es difícil responder a la pregunta sin las herramientas que vamos a construir. Otro ejemplo típico es: ¿cuántos collares distintos podemos construir usando 3 tipos de perlas?



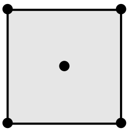
Para lograr esto necesitamos aprender sobre grupos de simetrías, acciones de grupos, etc. Luego veremos enumeraciones y aplicaciones mucho más interesantes.

2. Simetrías y grupos

Nos interesa entender todas las simetrías del objeto que estudiamos y las estructuras algebraicas sobre esas simetrías.

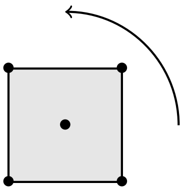
2.1. Conjuntos de Simetrías

Suponga que se tiene un cuadrado sólido que está fijo en el centro:

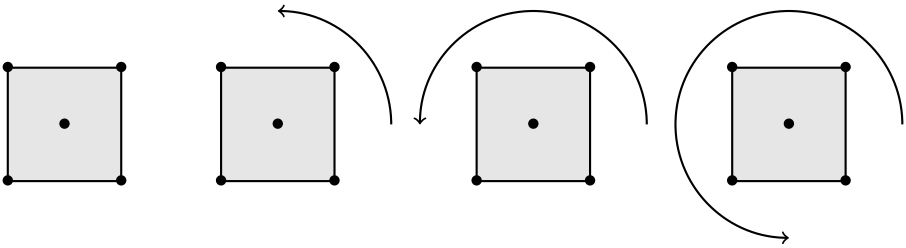


(1)

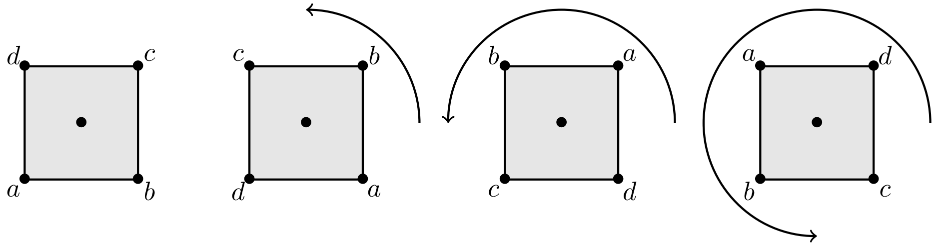
Podemos dar vuelta al cuadrado y recuperar el mismo cuadrado. Esto es un ejemplo de una simetría.



Queremos listar todas las posibilidades:



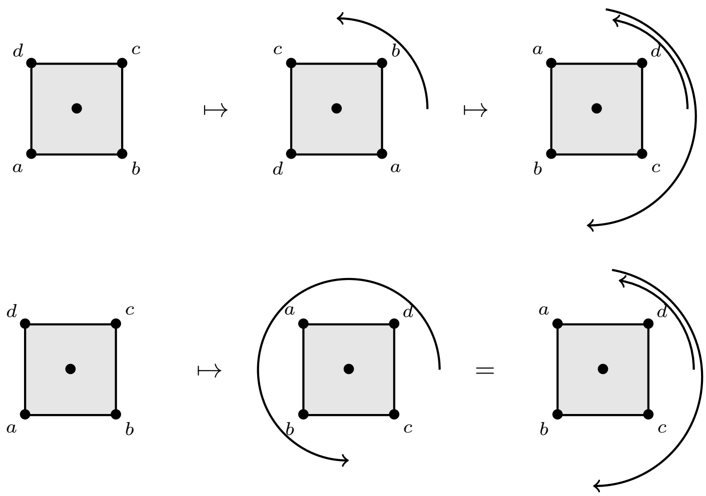
¿Hay más?, **¿cuándo crees que dos simetrías son la misma?** Para hacer un seguimiento, podemos nombrar los vértices del cuadrado para ver qué les sucede. Cada uno de estos



nombres es una marca secreta y no es parte del objeto, sólo está allí para ayudarnos a realizar un seguimiento de lo que pasa: entonces podemos codificar lo que le sucede al cuadrado, enumerando solamente lo que pasa con a, b, c, y d:

$$\sigma_0 = \frac{abcd}{abcd}, \qquad \sigma_1 = \frac{abcd}{dabc}, \qquad \sigma_2 = \frac{abcd}{cdab}, \qquad \sigma_3 = \frac{abcd}{bcda}. \tag{2}$$

Este es un modelo matemático de las simetrías del cuadrado. Ahora, decimos que dos simetrías son **iguales** si cuando comienzan con la misma marca, terminan con la misma marca después de la simetría.

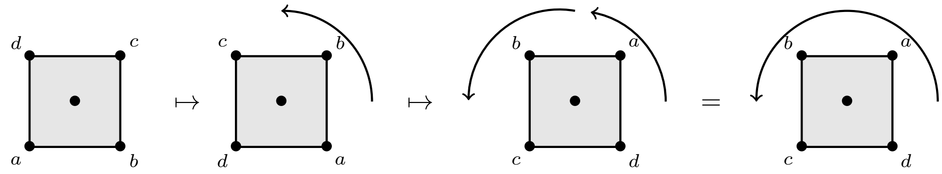


Este modelo es útil para comprender las estructuras de esas simetrías y centrarse en lo que nos interesa en este momento (o sea, los vértices o esquinas del cuadrado); lo que describe de alguna manera todas las simetrías del cuadrado. Piense en ellas como funciones. Estas no son únicas. Más adelante consideraremos otras descripciones de las **mismas simetrías** y veremos que pueden tener diferentes presentaciones.

2.2. Operaciones sobre simetrías

Ahora queremos describir las operaciones que podemos hacer sobre las simetrías.

Componiendo simetrías: ¿Qué pasa si hacemos una rotación, y luego otra?



Al usar nuestro modelo matemático tenemos:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ d & a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & d & a & b \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}.$$

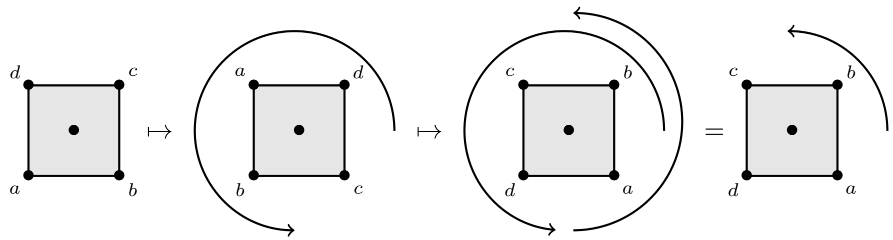
Es decir, tenemos una composición de funciones:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1\colon \{a,b,c,d\} & \to & \{a,b,c,d\} \\ a & \mapsto & d \\ b & \mapsto & a \\ c & \mapsto & b \\ d & \mapsto & c \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \sigma_2\colon \{a,b,c,d\} & \to & \{a,b,c,d\} \\ a & \mapsto & c \\ b & \mapsto & d \\ c & \mapsto & a \\ d & \mapsto & b \end{array}$$

Lo que vimos anteriormente es que

$$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$$

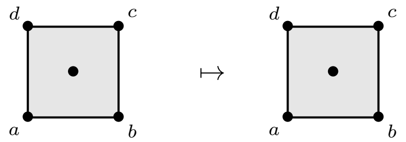
son las mismas funciones (de ahí la misma simetría). Otro ejemplo:



En todos los casos, la composición de rotaciones nos da otra rotación. Ahora, usando nuestro modelo matemático podemos ver todas las posibilidades:

	$\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}$
$\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}$
$\begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$
$\begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}$
$\begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ bcda \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ abcd \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ dabc \end{matrix}$	$\begin{matrix} abcd \\ cdab \end{matrix}$

La simetría identidad: ¿Observaste que hay una simetría especial que “no hace nada”?:

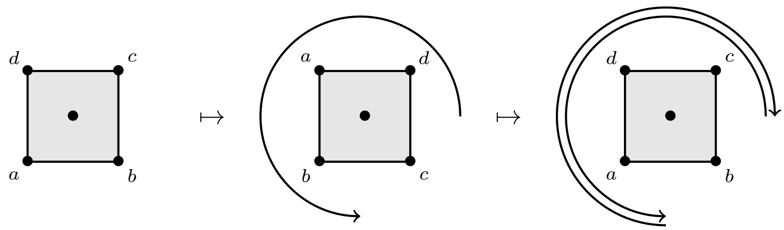


codificado por $\quad Id = \dfrac{abcd}{abcd}.$

Esta simetría es especial en el sentido que si componemos cualquier otra simetría por Id a la derecha o a la izquierda no cambiamos nada:

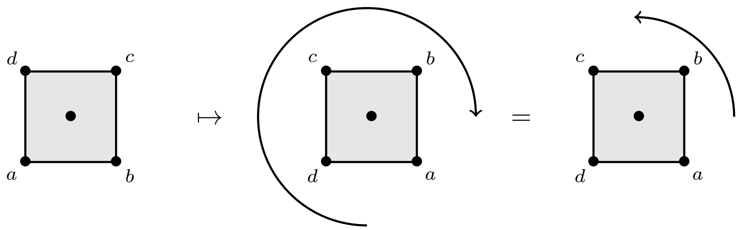
$$Id \circ \sigma = \sigma \circ Id = \sigma.$$

Invertir simetrías: Finalmente, vemos que cualquier simetría se puede deshacer:



$= \quad Id.$

Aquí tenemos que



Decimos que esta es la **inversa**. Si σ es una simetría, denotamos su inversa por σ^{-1}. Usando la notación (2) tenemos:

$$\sigma_0^{-1} = Id = \sigma_0, \qquad \sigma_1^{-1} = \sigma_3, \qquad \sigma_2^{-1} = \sigma_2, \qquad \sigma_3^{-1} = \sigma_1.$$

2.3. Grupos abstractos

Cuando hablamos de las simetrías de un objeto hemos visto cuatro características importantes:

1. Tenemos un **conjunto** de simetrías.
2. Podemos **componer** simetrías y obtener de nuevo una simetría en nuestro conjunto.
3. Tenemos una simetría especial llamada **identidad**.
4. Cada simetría tiene una **inversa**.

En términos matemáticos, tenemos un **grupo**. Más formalmente, un grupo es un conjunto G junto con:

1. Una **operación asociativa** $m\colon G \times G \to G$,
   [escribimos a menudo $m(a,b) = ab$ o $m(a,b) = a + b$.]

   Que la operación sea asociativa significa que para todos los a, b, c en G:

   $$a(bc) = (ab)c.$$

2. Un **elemento único** $1 \in G$: tal que, para todo $g \in G$

   $$1g = g1 = g.$$

3. Para cada $g \in G$, una **inversa** g^{-1}:

   $$gg^{-1} = g^{-1}g = 1.$$

Ejemplo 1. $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ donde asumimos $a^4 = 1$, entonces:

m	1	a	a^2	a^3
1	1	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	1
a^2	a^2	a^3	1	a
a^3	a^3	1	a	a^2

es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa, así:

$$a^{-1} = a^3, \qquad a^{-2} = a^2, \qquad a^{-3} = a.$$

Ejemplo 2. $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ donde asumimos $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ y $ab = ba$, entonces:

m	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa:

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

Ejemplo 3. $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$ donde asumimos $s^2 = 1$, $t^2 = 1$ y $sts = tst$ (¿lo tenemos todo?), entonces:

m	1	s	t	st	ts	sts
1	1	s	t	st	ts	sts
s	s	1	st	t	sts	ts
t	t	ts	1	tst	s	st
st	st	sts	s	ts	1	t
ts	ts	t	sts	1	st	s
sts	sts	st	ts	s	t	1

es asociativa. Tenemos el elemento especial 1 y cada elemento tiene una inversa

$$a^{-1} = a, \qquad b^{-1} = b, \qquad (ab)^{-1} = ab.$$

2.4. Grupo simétrico

Hemos visto anteriormente que las simetrías de un objeto pueden ser codificadas por algunas biyecciones de un conjunto finito (permutaciones). Esto motiva dos preguntas:

(1) ¿Es posible realizar cualquier grupo (abstracto) con un grupo de biyecciones? Equivalentemente, ¿es cierto que los grupos abstractos son las simetrías de algo?

(2) ¿El conjunto de todas las biyecciones de un conjunto finito es siempre un grupo?

Primero respondamos la segunda pregunta. Sea $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ y considere el conjunto

$$S_n = \{\sigma\colon [n] \to [n] \mid \sigma \ \textbf{ es una Biyección}\}.$$

Decimos que los elementos de S_n son **permutaciones**. Por ejemplo,

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\},$$

donde codificamos las permutaciones por su lista de valores. Es decir, usando el orden natural $1 < 2 < \ldots < n$, enumeramos los valores $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Por ejemplo, la permutación 231 es la biyección

$$\begin{array}{rcl} \{1,2,3\} & \to & \{1,2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 3 \\ 3 & \mapsto & 1 \end{array}$$

En resumen tenemos: la permutación **identidad** $Id = 123 \cdots n \in S_n$, dadas dos permutaciones $\sigma, \pi \in S_n$ podemos componer las dos funciones y obtenemos una permutación $\sigma \circ \pi \in S_n$, y para cada permutación $\sigma \in S_n$ podemos encontrar σ^{-1} tal que

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id.$$

Esto nos da un grupo interesante y lo llamaremos **el grupo simétrico**.

2.5. Representación por permutaciones

Consideremos ahora la primera pregunta: ¿podemos ver todo grupo abstracto como un grupo de simetrías? Mira el Ejemplo 1. Puedes comprobar que el conjunto de la funciones

$$\mathbf{1} \mapsto 1234, \qquad a \mapsto 2341, \qquad a^2 \mapsto 3412, \qquad a^3 \mapsto 4123,$$

es una realización del grupo C_4. Ahora, compara esto con nuestro ejemplo inicial de rotaciones del cuadrado (1) y observa que, módulo un cambio de los nombres, tenemos el mismo grupo de simetrías. El grupo abstracto C_4 se realiza usando permutaciones (un subconjunto de S_4):

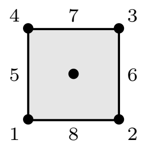
$$\{1234, 2341, 3412, 4123\} \subset S_4.$$

Necesitamos hacer algunas observaciones. Cuando tenemos $\{Id\} \subseteq H \subseteq S_n$ y H es un grupo en sí mismo con respecto a la multiplicación de S_n, decimos que H es un **subgrupo de permutaciones** de S_n. Para un grupo G, si tenemos una función $\varphi\colon G \to S_n$ tal que $\varphi(1) = Id$ y $\varphi(ab) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, entonces decimos que φ es un **homomorfismo** de G. Puedes comprobar que en este caso $\{Id\} \subseteq \varphi(G) \subseteq S_n$ es un subgrupo de permutaciones de S_n y decimos que $\varphi(G)$ es una **representación por permutaciones** de G. Más aún, si $|G| = |\varphi(G)|$ entonces decimos que $\varphi(G)$ es una **realización por permutaciones** de G.

Ejercicios A

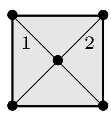
Ej.2.1 Para $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ donde asumimos $a^4 = 1$, encuentre un homomorfismo $\varphi\colon C_4 \to S_5$. Encuentre 5 puntos sobre el cuadrado que sean enviados a sí mismos después de rotar y visualícelos usando su construccción de φ.

Ej.2.2 Ponga números en los vértices y los lados del cuadrado



y use esto para definir un homomorfismo $\phi\colon C_4 \to S_8$. Ahora observe que el mismo grupo puede tener muchas realizaciones por permutaciones diferentes.

Ej.2.3 Dibuje las dos diagonales del cuadrado y llámelas 1 y 2:



Use esto para definir un homomorfismo $\phi\colon C_4 \to S_2$. Esto es una representación por permutaciones pero ¿es una realización por permutaciones? ¿Por qué?

Ej.2.4 Considere el grupo $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ donde asumimos $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ y $ab = ba$. Encuentre una manera de verlo como la simetría de un objeto. Utilice esto para dar un homomorfismo $\varphi\colon C_2 \times C_2 \to S_4$ y dar una realización por permutaciones de este grupo.

Ej.2.5 Muestre que $\mathbb{S}_3 = \{1, s, t, st, ts, sts\}$, donde asumimos $s^2 = 1$, $t^2 = 1$ y $sts = tst$, es lo mismo que $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$. Encuentre un isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{S}_3 \to S_3$. ¿Cuáles son las permutaciones $\varphi(s)$ y $\varphi(t)$? ¿Se puede encontrar un objeto geométrico tal que S_3 describa las simetrías de ese objeto?

Ej.2.6 ¿Cuál es la cardinalidad de S_n? Esa es la cantidad de permutaciones de $[n]$ que hay.

Ej.2.7 Tome un objeto geométrico o politopo en $\mathbb{R}^3$ (prisma, cubo, tetraedro, ...). Describa su simetría. Luego, ponga la etiqueta en su objeto para obtener una realización por permutaciones de ese grupo de simetrías.

Día 2

3. Acciones de grupos y enumeraciones

En los ejercicios de la Sección 2, hemos visto que para obtener una realización por permutaciones de un grupo, consideramos un objeto para visualizar las simetrías y luego se nombran algunas partes del objeto para obtener la permutación. Ahora, vamos a discutir cómo hacer esto sistemáticamente.

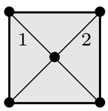
3.1. Acciones

Una **acción** de un grupo G en un conjunto finito X es un mapa $G \times X \to X$ tal que

- $1.x = x$,
- $(gh).x = g.(h.x)$.

Observemos que la notación aquí hace énfasis en el hecho de que G hace algo al elemento de X.

Ejemplo 4. En el ejercicio Ej.2.3, donde usamos $C_4 = \{1, a, a^2, a^3\}$ como las simetrías del cuadrado



nos da una acción de C_2 en $X = \{1, 2\}$.

$$\begin{array}{lll} a.1 = 2 & a^2.1 = 1 & a^3.1 = 2 \\ a.2 = 1 & a^2.2 = 2 & a^3.2 = 1 \end{array}$$

Vemos que para un $g \in G$ fijo, la función $X \to X$ dada por $x \mapsto g.x$ es una permutación de X. Es fácil comprobar que esta función es invertible, ya que

$$g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = 1.x = x\,.$$

Así que cada vez que tenemos una acción, tendremos una representación por permutaciones. ¿Cuándo sabemos si es una realización o no? En el ejemplo anterior vemos que $\{1, a^2\}$ da la misma permutación (la identidad) en X. Además, $\{a, a^3\}$ también da la misma permutación en X. Podemos dividir el grupo C_4 en clases de acuerdo con las permutaciones que dan, así:

$$\Big\{\{1, a^2\},\ \{a, a^3\}\Big\}.$$

Esto nos da una pista de lo que sucede. Antes de hacer esto, primero demos algunas proposiciones generales.

Proposición 5 (Teorema de Lagrange). *Considere un grupo finito G y H un subgrupo de G. Sea*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Entonces:

1. $\Big\{gH \bigm| g \in G\Big\}$ *es una partición de G.*
2. $|gH| = |H|$ *para todos $g \in G$.*
3. $|G|$ *es divisible por $|H|$ y $\Big|\Big\{gH \bigm| g \in G\Big\}\Big| = \frac{|G|}{|H|}$.*

Un **subgrupo**, como antes, es un subconjunto $\{1\} \subseteq H \subseteq G$ tal que H es en sí mismo un grupo dentro de G, con la misma operación de G. Vemos que (3) se sigue de (1) y (2). Para cualquier $g \in G$ tenemos una correspondencia uno a uno

$$\begin{array}{rcl} H & \longleftrightarrow & gH \\ h & \mapsto & gh \\ g^{-1}gh = h & \leftarrow & gh \end{array}$$

Esto nos da que (2) es siempre verdadero. Ahora, es necesario entender bien (1). ¿Qué estamos diciendo realmente? Volvamos al ejemplo de C_4 y observemos que $H = \{1, a^2\}$ es de hecho un subgrupo. Así, el conjunto de conjuntos está dado por:

$$1H = \{1, a^2\}; \quad aH = \{a, a^3\}; \quad a^2H = \{1, a^2\}; \quad a^3H = \{a, a^3\}.$$

Entonces, cuando escribimos

$$\Big\{gH \mid g \in C_4\Big\} = \Big\{\{1, a^2\},\ \{a, a^3\}\Big\},$$

queremos decir que **no repetimos** elementos que son los mismos. Además, la unión de estos elementos es C_4. Así, lo que (1) está diciendo es que

$$g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad g_1H = g_2H,$$

y la unión de estos conjuntos da todo el grupo G.

Vamos a hacer algunos ejemplos.

Ejemplo 6. Tomemos $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ (ver Ejemplo 2) y $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Podemos definir

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & a.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & a.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & a.3 = 3 \\ 4 & \mapsto & a.4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(b)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & b.1 = 1 \\ 2 & \mapsto & b.2 = 2 \\ 3 & \mapsto & b.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & b.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi(ab)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & ab.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & ab.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & ab.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & ab.4 = 3 \end{array}$$

Vemos que $\big(\varphi(a)\big)^2 = Id$, $\big(\varphi(b)\big)^2 = Id$ y $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a)$. Entonces, esta es una acción bien definida y es un homomorfismo. Además, sólo $\varphi(1) = Id$, $H = \{1\}$, y tenemos una realización por permutaciones de $C_2 \times C_2$.

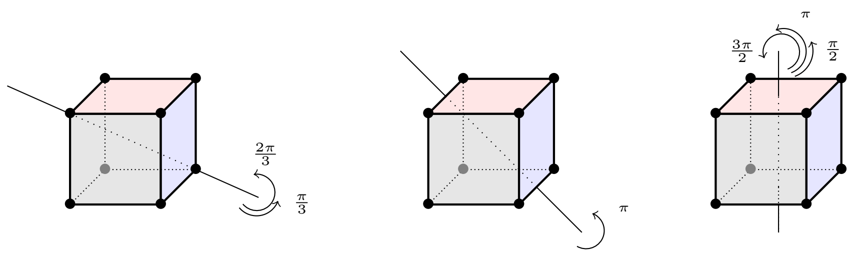
Ejemplo 7. Si en cambio tomamos

$$\begin{array}{rcl} \phi(a)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & a.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & a.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & a.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & a.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi(b)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & b.1 = 2 \\ 2 & \mapsto & b.2 = 1 \\ 3 & \mapsto & b.3 = 4 \\ 4 & \mapsto & b.4 = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \phi(ab)\colon X & \to & X \\ 1 & \mapsto & ab.1 = 1 \\ 2 & \mapsto & ab.2 = 2 \\ 3 & \mapsto & ab.3 = 3 \\ 4 & \mapsto & ab.4 = 4 \end{array}$$

Vemos de nuevo que $\big(\phi(a)\big)^2 = Id$, $\big(\phi(b)\big)^2 = Id$ y $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \phi(b)\phi(a)$. Esta es una acción diferente del mismo grupo en X. Pero esta vez, $\phi(1) = \phi(ab) = Id$ y así, no tenemos una realización por permutaciones puesto que $H = \{1, ab\}$.

3.2. El cubo

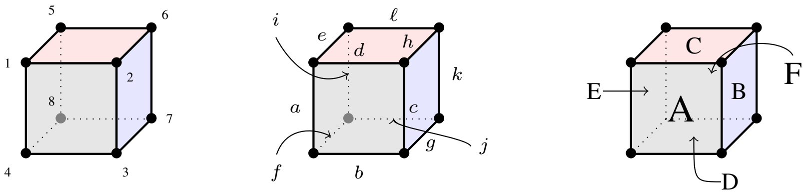
Tomemos un ejemplo con más elementos, para entender mejor lo que sucede. Consideremos el grupo B_3 de simetrías de un cubo.



Par de vértices opuestos (4 parejas) — Par de aristas opuestas (6 parejas) — Par de caras opuestas (3 parejas)

Este grupo tiene: función de identidad, $4 * 2$ rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$ para cada par de vértices opuestos, 6 rotaciones de π para cada par de aristas opuestas y $3 * 3$ rotaciones de $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$ para cada par de caras opuestas. Esto da $24 = 1 + 8 + 6 + 9$ simetrías. Este grupo comienza a ser más complicado y toma algún tiempo escribir la tabla completa de la multiplicación. Más adelante nombraremos todos sus elementos.

Para ayudarnos, vamos a nombrar todos los componentes del cubo



8 vértices 12 aristas 6 caras

El grupo B_3 actúa sobre el conjunto

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, \ell, A, B, C, D, E, F\}.$$

Por ejemplo, la permutación correspondiente a la rotación de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor de la línea a través de los vértices 3 y 5 es

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
1&2&3&4&5&6&7&8&a&b&c&d&e&f&g&h&i&j&k&A&B&C&D&E&F\\
\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\
6&7&3&2&5&8&4&1&h&c&g&k&d&b&j&e&a&f&i&B&D&F&A&C&E
\end{array}$$

En algún momento es mejor escribir esto en la notación de ciclos disjuntos. Para ello simplemente seguimos lo que sucede con el elemento mientras iteramos la misma simetría:$1 \to 6 \to 8 \to 1$ y tenemos un ciclo. Escribimos $(1\,6\,8)$ para denotar este ciclo cerrado. Entonces, la permutación anterior es

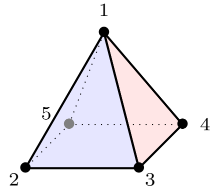
$$(1\,6\,8)(2\,7\,4)(3)(5)(a\,h\,j)(b\,c\,g)(d\,k\,f)(e\,\ell\,i)(A\,B\,D)(C\,F\,E).$$

La acción que describimos nos da una representación por permutaciones $\varphi\colon B_3 \to S_{26}$. Esta es una realización por permutaciones de B_3 (¿puedes ver por qué?). En esta representación por permutaciones, el elemento anterior tiene 8 ciclos de longitud 3 y 2 ciclos de longitud 1. Llamamos a esto la **estructura de los ciclos** del elemento. La estructura de ciclos desempeñará un papel muy importante en la teoría de Pólya. Por supuesto, si cambiamos la representación por permutaciones, obtenemos diferentes estructuras de ciclos.

3.3. Órbitas y conteo de puntos

Cuando estudiamos las acciones de B_3 en el conjunto X de vértices, aristas caras del cubo observamos que una simetría envía un vértice a otro vértice, una arista a otra arista y una cara a una cara. Una simetría preserva los tipos. Esto nos lleva a definir la noción de órbita de un punto $x \in X$.

Antes de comenzar vamos a considerar un ejemplo con menos permutaciones. Echemos un vistazo a las simetrías de



Vemos que cualquier simetría necesita fijar el punto 1. Por otro lado, siempre podemos encontrar una simetría que envíe cualquier punto de $\{2,3,4,5\}$ a otro punto de $\{2,3,4,5\}$. Decimos que el grupo de simetría que actúa sobre los puntos $\{1,2,3,4,5\}$ tiene dos órbitas: $\{1\}$ y $\{2,3,4,5\}$. Vemos que las órbitas codifican la naturaleza de los puntos en nuestros objetos. Así que las órbitas nos dan información interesante sobre las simetrías de los objetos. Ahora vamos a definir órbitas y ver cómo contar puntos dentro de ellas.

Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X, decimos que la **órbita** $G.x$ de un punto $x \in X$ es el conjunto

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Este es el conjunto de puntos de X que podemos alcanzar desde x con la acción de G. Vimos anteriormente un ejemplo de órbitas.

¿Cómo contar el número de puntos dentro de las órbitas de X? Es decir, ¿podemos encontrar una fórmula para $|G.x|$? Ya la hemos encontrado. Sea

$$Stab(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} \subseteq G.$$

Como vemos, $G.x \subseteq X$ y $Stab(x) \subseteq G$. El conjunto $Stab(x)$ es de hecho un subgrupo de G. Esto nos da una buena manera de calcular $G.x$.

Proposición 8 (Teorema de Lagrange)**.** *Para $x \in X$, tenemos*

$$|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

La idea es construir una biyección explícita entre los dos conjuntos

$$G.x \quad \leftrightarrow \quad \{gS \mid g \in G\}$$

donde $S = Stab(G)$. Para cualquier $y \in G.x$, hay muchos posibles $g \in G$ tal que $y = g.x$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \alpha\colon G.x & \to & \{gS \mid g \in G\} \\ y & \mapsto & gS \text{ donde } g \text{ es tal que } g.x = y \end{array}$$

Por supuesto tenemos que asegurarnos de que la anterior es una nueva definición. Es decir, que

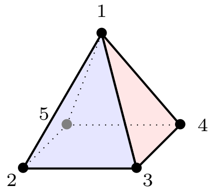
$$y = g.x = h.x \quad \Longleftrightarrow \quad h^{-1}g.x = x \quad \Longleftrightarrow \quad gS = hS.$$

La función en la otra dirección está dada por

$$\begin{array}{rcl} \beta\colon \{gS \mid g\in G\} & \to & G.x \\ gS & \mapsto & g.x \end{array}$$

Las dos funciones construyen una correspondencia entre los dos conjuntos.

Si volvemos a nuestro ejemplo, el grupo de simetrías de



es C_4 (¿ves esto?). Hemos observado 2 órbitas:$\{1\}$ y $\{2,3,4,5\}$. Para 1, vemos que cada simetría lo fija, entonces

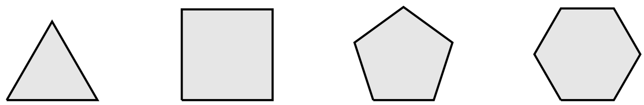
$$\frac{|C_4|}{|Stab(1)|} = \frac{4}{4} = 1.$$

Para cualquiera de los puntos $2,3,4$ o 5, sólo la simetría identidad fija tal punto, y obtenemos

$$\frac{|C_4|}{|Stab(2)|} = \frac{4}{1} = 4.$$

Ejercicios B

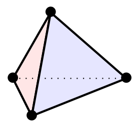
Ej.3.1 D_3, D_4, D_5, D_6: Estudie los grupos dihedrales. Estos son grupos de simetrías de



$D_3 = S_3$ D_4 D_5 D_6

donde podemos girar la figura **y** también levatarla de la mesa, voltearla y ponerla de nuevo sobre la mesa (reflexión). Encuentre una realización por permutaciones para cada una y dé la estructura de los ciclos de sus elementos.

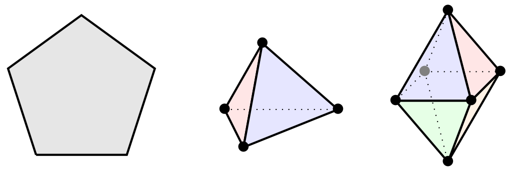
Ej.3.2 A_4: Estudie el grupo de simetrías rotacionales de un tetraedro. Encuentre una realización por permutaciones y describa la estructura de los ciclos.



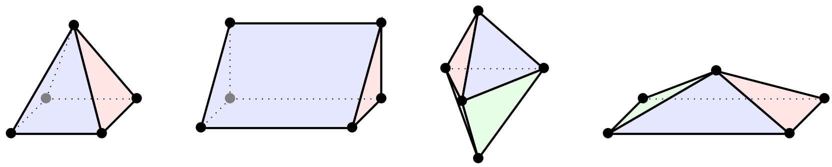
[¿Qué sucede si se permiten las reflexiones? Es un grupo más grande, ¿cuál?]

Ej.3.3 Dado $G = S_3$, encuentre todas las diferentes acciones de S_3 en $X = \{a, b, c\}$. En cada caso, describa el homomorfismo correspondiente $\varphi\colon S_3 \to S_3$. Describa la estructura de los ciclos de cada elemento de S_3, para cada representación por permutaciones que construyó.

Ej.3.4 Contar el número de puntos, bordes y caras de los siguientes objetos, usando la Proposición 8.



Ej.3.5 El objeto no siempre es totalmente simétrico y los puntos, bordes y caras se dividen en órbitas más pequeñas (diferentes tipos de puntos, aristas, caras). Utilizar las órbitas para contar el número de puntos, aristas y caras de los siguientes objetos usando la Proposición 8 y el grupo de simetrías.



(Ejercicios adicionales)

Ej.3.6 Observe nuevamente Ej.2.2. Describa la estructura de los ciclos de cada elemento de C_4 para esta representación por permutaciones.

Ej.3.7 Muestre que $Stab(x)$ es un subgrupo.

Ej.3.8 En la proposición 8, muestre que $\alpha \circ \beta = Id$ y $\beta \circ \alpha = Id$.

Ej.3.9 Contar el número de vértices, aristas, 2-caras, 3-caras, ..., de un hirpercubo de dimensión n.

[Sugerencia. Encontrar un grupo de simetría del hipercubo que contiene exactamente una órbita para cada tipo de caras.]

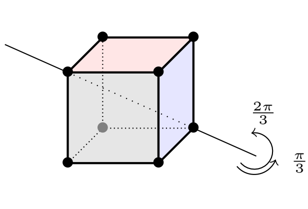
Día 3

4. Revisión del teorema de Lagrange

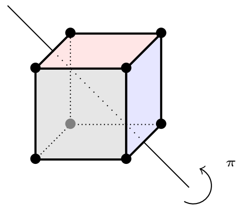
Proposición 9 (Teorema de Lagrange)**.** *Sea G un grupo que actúa sobre el conjunto X. Para $x \in X$, tenemos:*

1. *una biyección $G.x \to \{gStab(x) \mid g \in G\}$,*
2. $|G.x| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$.

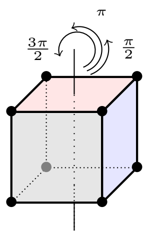
Ejemplo 10. Si miramos la Sección 3.2, el grupo B_3



Par de vértices opuestos
(4 parejas)

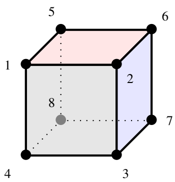


Par de aristas opuestas
(6 parejas)

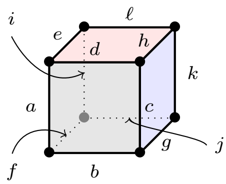


Par de caras opuestas
(3 parejas)

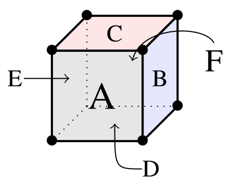
actúa sobre el conjunto de vértices, aristas y caras del cubo:



8 vértices



12 aristas



6 caras

Vemos que exactamente tres simetrías fijan el vértice 1. Por lo tanto

$$|B_3.1| = \frac{|B_3|}{3} = \frac{24}{3} = 8.$$

Similarmente, sólo dos simetrías fijan la arista a, entonces

$$|B_3.a| = \frac{|B_3|}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Finalmente cuatro simetrías fijan una cara, entonces

$$|B_3.A| = \frac{|B_3|}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Esto es útil para contar vértices, aristas, caras, de objetos con muchas simetrías. Es aún más útil para las cosas que no podemos ver (como en las dimensiones superiores).

Proposición 11. *Considere un grupo finito G que actúa sobre un conjunto finito X. Sea*

$$H = \{g \in G \mid g.x = x \text{ para todo } x \in X\}.$$

Entonces,

(1) H es un subgrupo de G.

(2) La acción da una realización por permutaciones si y sólo si $|H| = 1$.

(3) Podemos tomar $X = G$ y la acción es multiplicación a la izquierda; en este caso obtenemos una realización por permutaciones.

Dejamos como ejercicio probar (1). Si nunca lo has hecho, es bueno hacerlo. Si lo has visto antes, es fácil.

El ítem (2) es sutil. Cuando tenemos una acción $G \times X \to X$, hemos visto en los ejercicios de la Sección 2 que podemos construir un homomorfismo $\varphi\colon G \to S_{|X|}$. Para un g fijo, la permutación $\varphi(g)$ está dada por cómo g permuta X bajo la función $x \mapsto g.x$. Ahora tenemos

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \quad\iff\quad g_1H = g_2H.$$

En efecto,

$$g_1.x = g_2.x \quad\iff\quad g_2^{-1}g_1.x = g_2^{-1}g_2.x = x.$$

Esto es válido para todos los x si y sólo si $g_2^{-1}g_1 \in H$. Esto es, $g_2^{-1}g_1H = H$ (ya que H es un subgrupo) y por tanto $g_1H = g_2H$. Vemos que tenemos tantas permutaciones en $\varphi(G)$ como elementos en $\{gH \mid g \in G\}$. Entonces,

$$|\varphi(G)| = \left|\{gH \mid g \in G\}\right| = \frac{|G|}{|H|} = |G| \quad\iff\quad |H| = 1.$$

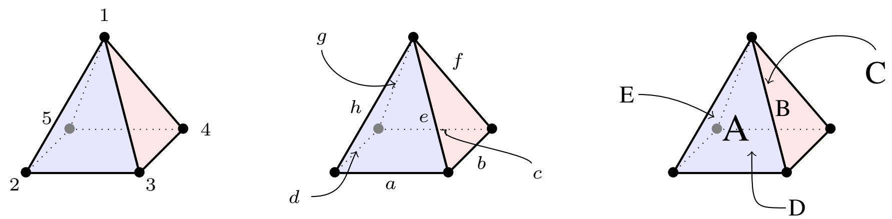
Ahora (3) es mucho más fácil. Observemos que la acción aquí es $G \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$, la multiplicación habitual, pero pensamos en $\mathbf{G}$ como el conjunto en el que actuamos. El hecho de que sea una acción es claro, al utilizar la asociatividad y la multiplicación por 1 en la definición de acción. Si tenemos $gh = h$ entonces está claro que $g = ghh^{-1} = hh^{-1} = 1$. Así, $H = \{1\}$.

Observación 12. La Proposición 11 (3), nos dice que cualquier grupo abstracto puede realizarse (al menos en una forma) como un grupo de permutaciones. Esto se conoce como el *teorema de Cayley*.

4.1. Contando el número de órbitas

En este punto esperamos que estés convencido de que el uso de la teoría de grupos es poderoso para contar cosas relacionadas con simetrías. Nuestro siguiente paso es contar el número de órbitas. Como hemos visto anteriormente, podemos ver esto como contar el número de tipos de puntos que tenemos.

Ejemplo 13. Veamos nuevamente C_4 actuando sobre la pirámide cuadrada y consideremos sus vértices, aristas y caras.



El grupo C_4 actúa sobre el conjunto $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e, f, g, h, A, B, C, D, E\}$. Este conjunto se descompone en órbitas disjuntas. Denotamos esto como

$$Y/C_4 = \Big\{\{1\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c, d\}, \{e, f, g, h\}, \{A, B, C, E\}, \{D\}\Big\}.$$

Vemos que el número de órbitas cuentan diferentes tipos de cosas.

En cuanto al número de elementos en una órbita, también hay una hermosa fórmula para contar el número de órbitas de una acción. Si G actúa sobre un conjunto X, definimos

$$Fix(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}.$$

Proposición 14 (Lema de Burnside)**.** *Dado un grupo finito G que actúa sobre un conjunto finito X, tenemos*

$$\big|X/G\big| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big|Fix(g)\big|.$$

Ver esto no es difícil después de algunas manipulaciones de los conceptos que hemos tratado.

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} \big|Fix(g)\big| &= \sum_{g\in G}\sum_{x\in X} \delta_{x,g.x} = \sum_{x\in X}\sum_{g\in G} \delta_{x,g.x} \\
&= \sum_{x\in X} \big|Stab(x)\big| = \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|G.x|} \\
&= |G| \textstyle\sum_{x\in X} \frac{1}{|G.x|} = |G|\big|X/G\big|.
\end{aligned}$$

La última igualdad es un buen truco.

Así que, si queremos contar el número de órbitas de una acción, simplemente necesitamos encontrar la cardinalidad del conjunto $Fix(g)$ para cada $g \in G$. Veamos nuevamente a $C_4 = \{\mathbf{1}, a, a^2, a^3\}$ actuando sobre Y en el ejemplo 13. Encontramos que:

$Fix(\mathbf{1}) = Y,$

$Fix(a) = \{1, D\},$

$Fix(a^2) = \{1, D\},$

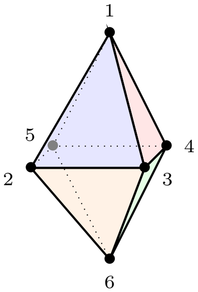
$Fix(a^3) = \{1, D\}.$

Por lo tanto,

$$\big|Y/C_4\big| = \frac{1}{4}(18 + 2 + 2 + 2) = \frac{24}{4} = 6.$$

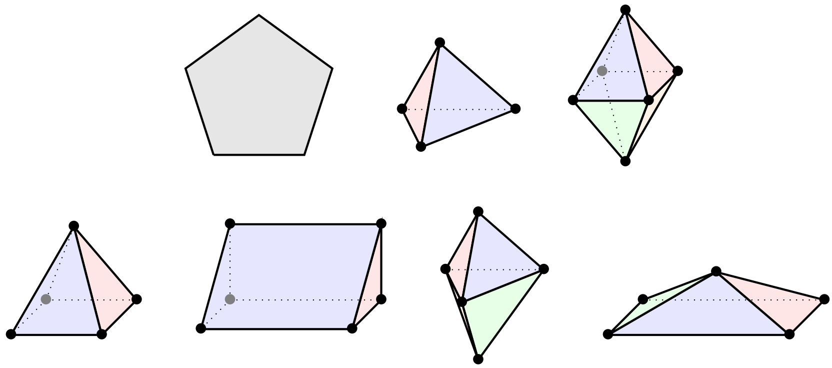
Es maravilloso que esto funcione tan bien.

Realiza un ejemplo más. Describe las simetrías, ciclos, órbitas de los vértices, aristas, y caras de

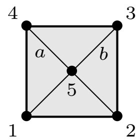


Ejercicios C

Ej.4.1.1 Considere las acciones que se definieron en los ejercicios Ej.3.4 y Ej. 3.5, y use la proposición 14 para contar el número de órbitas en cada uno de los siguientes objetos.



Ej.4.1.2 Considere las acciones de $C_4 = \{\mathbf{1}, a, a^2, a^3\}$ en el conjunto $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}$ con los cinco vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y los dos segmentos diagonales $\{a, b\}$ representados a continuación. Utilice la proposición 14 para contar el número de órbitas.

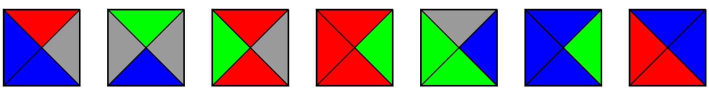


Ej.4.1.3 Muestre que H en la proposición 11 es un subgrupo.

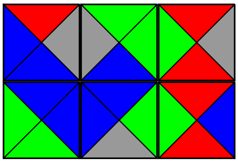
Día 4

5. Coloración y teoría de Pólya

Supongamos que nuestra amiga Laura quiere crear un juego con piezas de baldosas como las siguientes:

 . . .

El juego consiste en embaldosar un tablero de 2×3 de modo que el color coincida donde las baldosas se tocan. Un buen juego terminará con un mosaico como este:



Pero a ella le gustaría saber cuántos tipos de baldosas necesita, y cuántos buenos juegos diferentes serán posibles. Vamos a tratar de ayudarla...

5.1. Coloraciones de acciones

Cuando tenemos un conjunto finito X, una **coloración** de X con ciertos colores es una función $w\colon X \to \{colores\}$. De hecho, si tenemos un conjunto como $X = \{1,2,3\}$ y dos colores $rojo$ y $azul$, podemos hacer 8 coloraciones diferentes. A saber:

$$123; \quad 123; \quad 123; \quad 123; \quad 123; \quad 123; \quad 123; \quad 123.$$

Esto es lo mismo que las funciones $\{1,2,3\} \to \{rojo, azul\}$. Si C es un conjunto de colores, entonces denotamos por C^X el conjunto de todos las coloraciones de X por C. Este es el conjunto de todas las funciones

$$C^X = \{w\colon X \to C \text{ función}\}.$$

Para nuestro ejemplo anterior con $X = \{1,2,3\}$ y $C = \{rojo, azul\}$ obtenemos

$$C^X = \{123, 123, 123, 123, 123, 123, 123, 123\}.$$

Ahora, cuando un grupo G actúa sobre X, entonces G **también** actúa sobre el conjunto más grande de todas las coloraciones C^X de manera natural. De hecho, si $w \in C^X$, tomamos $(g.w)(x) = w(g^{-1}.x)$ y funciona. Aquí $g.w$ es una nueva función construida desde w. Necesitamos usar la inversa de g en esta definición para que el "tecnicismo" de la definición de acción funcione para la acción en C^X.

$$\begin{aligned}
((hg).w)(x) &= w((hg)^{-1}.x) \\
&= w((g^{-1}h^{-1}).x) \\
&= w(g^{-1}.(h^{-1}.x)) \\
&= (g.w)(h^{-1}.x)) \\
&= (h.(g.w))(x).
\end{aligned}$$

Observemos el tecnicismo en mostrar que $(hg).w = h.(g.w)$. Trata de entender cada igualdad. Este tecnicismo es importante para que las cosas funcionen bien, pero no jugará un gran papel al final.

Ejemplo 15. Trabajemos con nuestro ejemplo y el grupo de permutaciones S_3 actuando sobre $X = \{1, 2, 3\}$ (permuta los números). Recordemos que

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\},$$

cada $\sigma \in S_3$ es una permutación $\sigma \colon X \to X$, y tenemos una acción. Sea $C = \{rojo, azul\}$ y consideremos $w \in C^X$. Por ejemplo, 123 es la función $w(1) = rojo$, $w(2) = azul$ y $w(3) = rojo$. Sea $\sigma = 231$ y comprobemos que $\sigma^{-1} = 312$. Así que la nueva función $\sigma.w$ se define como sigue:

$$(\sigma.w)(1) = w(\sigma^{-1}(1)) = w(3) = rojo,$$

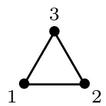
$$(\sigma.w)(2) = w(\sigma^{-1}(2)) = w(1) = rojo,$$

$$(\sigma.w)(3) = w(\sigma^{-1}(3)) = w(2) = azul.$$

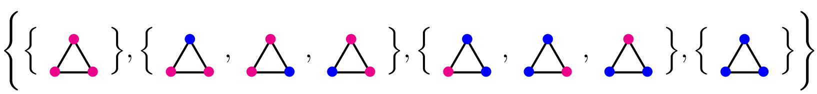
Luego, $\sigma.w = 123$. Si observamos las órbitas de X con la acción de S_3 vemos que sólo hay una órbita (X es una sola órbita). Pero si miramos las órbitas de la acción sobre C^X, surge una imagen muy diferente:

$$C^X/S_3 = \Big\{\{123\}, \{123, 123, 123\}, \{123, 123, 123\}, \{123\}\Big\}.$$

Podemos representar esto en un triángulo. Recordemos que $S_3 = D_3$ es la simetría del triángulo permitiendo volteretas y rotaciones.

$X =$ 

El conjunto C^X/S_3 se puede representar como

$C^X/S_3 =$ 

Como podemos ver, cada órbita representa **un** tipo posible de collar con tres perlas y dos colores de perlas diferentes. Así que podemos usar la proposición 14 para contar el número de posibilidades. Primero tenemos que averiguar qué es $Fix(g)$ para cada simetría en el conjunto C^X. Veamos primero nuestro ejemplo. Para $Id = 123 \in S_3$ es fácil, puesto que 123 siempre fija todas las coloraciones

$$Fix(Id) = C^X \qquad \Longrightarrow \qquad \big|Fix(123)\big| = |C|^{|X|} = 2^3 = 8.$$

Para las otras permutaciones:

$$\begin{array}{lcl}
Fix(132) = \{123, 123, 123, 123\} & \Longrightarrow & \big|Fix(132)\big| = 4 = 2^2 \\
Fix(213) = \{123, 123, 123, 123\} & \Longrightarrow & \big|Fix(213)\big| = 4 = 2^2 \\
Fix(231) = \{123, 123\} & \Longrightarrow & \big|Fix(231)\big| = 2 = 2^1 \\
Fix(312) = \{123, 123\} & \Longrightarrow & \big|Fix(312)\big| = 2 = 2^1 \\
Fix(321) = \{123, 123, 123, 123\} & \Longrightarrow & \big|Fix(321)\big| = 4 = 2^2.
\end{array}$$

Usando la proposición 14 obtenemos la respuesta correcta:

$$\big|C^X/S_3\big| = \frac{1}{6}(8+4+4+2+2+4) = \frac{24}{6} = 4.$$

Notaste que $\big|Fix(g)\big|$ siempre es un potencia de $|C| = 2$, esto no es un accidente.

Proposición 16. *Dado G que actúa sobre X, obtenemos una acción de G sobre C^X. Para $g \in G$, tenemos que*

$$w \in Fix(g) \quad \Longleftrightarrow \quad w(x) = w(g.x) = w(g^2.x) = w(g^3.x) = ...$$

para todos los $x \in X$. Es decir, w es constante durante los ciclos de g para la acción en X.

Presta atención aquí. Tenemos **dos** acciones a considerar: la acción de G sobre X y la acción de G sobre C^X. Estamos interesados en el conjunto $Fix(g)$ para la acción de G en C^X, pero para calcularlo, utilizamos la acción de G sobre X. Vemos en la proposición 16 que estamos interesados en los ciclos disjuntos de g sobre X. Recuerda que los ciclos de $g \in G$ se obtienen observando lo que sucede cuando aplicamos una potencia sucesiva de g a los elementos de X: $x \to g.x \to g^2.x \to \cdots$ hasta que regresemos a x. Si g fija a w, es decir $(g.w)(x) = w(x)$, entonces aplicando g^{-1} a ambos lados obtenemos

$$w(x) = (g^{-1}.w)(x) = w(g.x).$$

Aplicando g^{-1} de nuevo a la igualdad anterior obtenemos

$$w(g.x) = (g^{-1}.w)(x) = (g^{-2}.w)(x) = w(g^2.x).$$

Podemos seguir así para mostrar una de las implicaciones de la proposición 16.

En la notación de ciclos, la permutación 213 es $(1\,2)(3)$. Observemos que en $Fix(213)$, todas las coloraciones del conjunto tienen el mismo color para el ciclo $(1\,2)$ y para el ciclo (3). Por otro lado, 231 es un sólo ciclo $(1\,2\,3)$ y sólo 2 colores son constantes en este ciclo. El recíproco de la proposición anterior queda como ejercicio. Lo que hemos visto hasta ahora es que cuando G actúa sobre C^X, tenemos

$$\big|Fix(g)\big| = |C|^{|cyc_X(g)|},$$

donde $|cyc_X(g)|$ es el número de ciclos en la descomposición de g como producto de ciclos disjuntos.

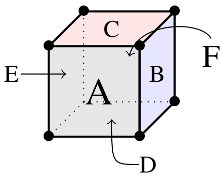
Teorema 17. *Dado G que actúa en X, tenemos que G actúa sobre C^X. Sea $c = |C|$,*

$$\left|C^X/G\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} c^{|cyc_X(g)|}.$$

Observa que esto se sigue de la proposición 14 y la proposición 16.

Ejercicios D

Nuestra amiga Laura que acaba de aprender sobre este teorema está bastante segura de que podemos usarlo para resolver su pregunta. Hagamos esto juntos ... Primero un poco de calentamiento.

Ej.5.1 Sea B_3 que actúa sobre el cubo 

y sea $X = \{A, B, C, D, E, F\}$ el conjunto de caras. Considere $C = \{rojo, negro, azul, verde\}$ y B_3 actúa en las coloraciones C^X. Ahora, responde a la primera pregunta que teníamos: ¿cuántos dados diferentes con cuatro colores podemos construir?

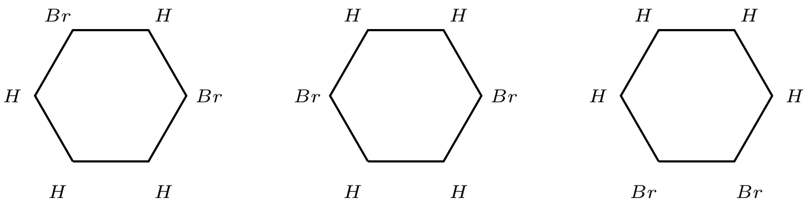
Ej.5.2 Ahora, responde a la segunda pregunta que teníamos: ¿cuántos collares de longitud 8 con 3 tipos de perlas podemos hacer? [Sugerencia: usa D_8 actuando sobre un octágono.]

Ej.5.3 Resuelve las dos preguntas de Laura. Ten en cuenta que las baldosas están coloreadas en un solo lado.

Día 5

6. Teoría de Pólya

Hoy, Laura dijo que es una mala idea tener el mismo color en una sola baldosa más de dos veces. El juego sería más interesante si no permitimos el mismo color más de dos veces en cada baldosa. Pero ahora, ¿necesitamos rehacer toda nuestra estrategia de conteo? Ella no está segura de que podamos resolver su problema. Pero oyó que un matemático que gustaba de la ciencia, de nombre Pólya, tenía un problema similar y encontró una solución. La molécula $C_6H_4Br_2$ tiene 6 átomos de carbono (C) en un hexágono, y los átomos de hidrógeno (H) y bromo (Br) se unen de forma circular alrededor de él. Pero en la naturaleza hay más de una posibilidad y la molécula puede tener un comportamiento diferente, dependiendo de la configuración.



Él quería también entender la posible configuración de una molécula más compleja y para ello necesitaba refinar el principio de contar y poder contar coloraciones con un tipo de colores específicos (cuántos de cada color). Para esto necesitamos refinar nuestro conteo recordando qué colores fueron usados.

Sigamos con un ejemplo.

Ejemplo 18. Recordemos que $D_6 = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ actúa sobre el hexágono, como se muestra en la figura 1 y esto define una acción en los vértices $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

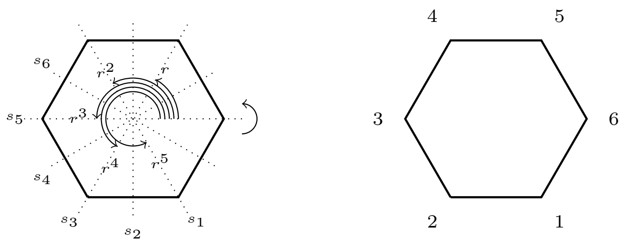


Figura 1. D6

Hemos visto en el teorema 17 que el número de ciclos para cada elemento del grupo desempeña un papel importante en el conteo de coloraciones. Si queremos refinar nuestro conteo, ahora tenemos que estudiar exactamente el tipo de ciclos de cada elemento de D_6 usando la representación por permutaciones con respecto a X. Para ello utilizaremos monomios para codificar el tipo de ciclos de cada elemento. Por ejemplo, si un elemento tiene 2 ciclos de longitud 1, 3 ciclos de longitud 2 y 1 ciclo de longitud 4, entonces lo codificaremos con un monomio

$$x_1^2 x_2^3 x_4.$$

En general, el exponente de x_i es el número de ciclos de longitud i en nuestra representación por permutaciones del elemento. Para D_6 que actúa sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tenemos

elemento de D_6	tipo de ciclos	monomio de ciclos
1	$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	x_1^6
r	$(1\,2\,3\,4\,5\,6)$	x_6
r^2	$(1\,3\,5)(2\,4\,6)$	x_3^2
r^3	$(1\,4)(2\,5)(3\,6)$	x_2^3
r^4	$(1\,5\,3)(2\,6\,4)$	x_3^2
r^5	$(1\,6\,5\,4\,3\,2)$	x_6
s_1	$(1)(4)(2\,6)(3\,5)$	$x_1^2x_2^2$
s_2	$(1\,2)(3\,6)(4\,5)$	x_2^3
s_3	$(2)(5)(1\,3)(4\,6)$	$x_1^2x_2^2$
s_4	$(2\,3)(1\,4)(5\,6)$	x_2^3
s_5	$(3)(6)(2\,4)(1\,5)$	$x_1^2x_2^2$
s_6	$(3\,4)(2\,5)(1\,6)$	x_2^3

Ahora ponemos toda esta información en un polinomio (la suma de todos los monomios), con lo cual producimos

$$P_{D_6,X}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = \frac{1}{12}\big(x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2x_2^2\big).$$

Llamamos a esto el **polinomio de índice de ciclos** de la representación por permutaciones de D_6. El factor $\frac{1}{12}$ está ahí, ya que jugará un papel en el resultado final. Este polinomio no utiliza las variables x_4 y x_5 en este caso.

En general, considere un grupo G que actúa sobre un conjunto finito X donde $n = |X|$. El índice de ciclos de la representación por permutaciones de G sobre X es

$$P_{G,X}(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{1}{G}\sum_{g\in G} x_1^{|cyc_{X,1}(g)|}x_2^{|cyc_{X,2}(g)|}\cdots x_n^{|cyc_{X,n}(g)|},$$

donde $|cyc_{X,i}(g)|$ es el número de ciclos de longitud i en la representación por permutaciones de g con X. Observamos de inmediato que si coloreamos la acción con $c = |C|$ colores, el teorema 17 se puede escribir como sigue

$$\big|C^X/G\big| = P_{G,X}(c,c,...,c).$$

¿Ves esto?

Para D_6,

$$P_{D_6,X}(c,c,c,c,c,c) = \frac{1}{12}\big(c^6{+}2c{+}2c^2{+}4c^3{+}3c^2c^2\big) = \frac{1}{12}\big(c^6{+}2c{+}2c^2{+}4c^3{+}3c^{2+2}\big).$$

Ahora el exponente de c en el lado derecho, cuenta exactamente el número de ciclos como en el teorema 17.

Si queremos refinar nuestro conteo, podemos usar el polinomio de índice de ciclos, que refleja el tamaño de cada ciclo. Recordemos que un color debe respetar los ciclos de un elemento para ser fijado por este elemento. La variable x_i en el polinomio de índice de ciclos aporta un ciclo de longitud i. En lugar de sustituir $x_i \leftarrow c$, podemos intentar mantener un registro de qué color se usó y cuántas veces. La manera de codificar esto con la función generadora es hacer

$$x_i \leftarrow a_1^i + a_2^i + \cdots + a_c^i.$$

Entendemos la expresión del lado derecho como eligir (el símbolo "+") un color de $\{a_1, a_2, \ldots, a_c\}$ y usarlo i-veces.

Veamos lo que sucede cuando hacemos esto con $P_{D_6,X}$ teniendo dos colores $\{a, r\}$:

$$P_{D_6,X}(a+r, a^2+r^2, a^3+r^3, a^4+r^4, a^5+r^5, a^6+r^6)$$

$$= \frac{1}{12}\big((a+r)^6 + 2(a^6+r^6) + 2(a^3+r^3)^2 + 4(a^2+r^2)^3 + 3(a+r)^2(a^2+r^2)^2\big).$$

Vamos a expandir:

$$\begin{array}{rcl}
(a+r)^6 & = & a^6 + 6a^5r + 15a^4r^2 + 20a^3r^3 + 15a^2r^4 + 6ar^5 + r^6 \\
a^6 + r^6 & = & a^6 + r^6 \\
(a^3+r^3)^2 & = & a^6 + 2a^3r^3 + r^6 \\
(a^2+r^2)^3 & = & a^6 + 3a^4r^2 + 3a^2r^2 + r^6 \\
(a+r)^2(a^2+r^2)^2 & = & (a^2 + 2ar + r^2)(a^4 + 2a^2r^2 + r^4) \\
 & = & a^6 + 2a^5r + 3a^4r + 2a^3r + 3a^2r + 2ar^5 + r^6.
\end{array}$$

Cada expansión monomial "cuenta" el número de coloraciones que fija cada elemento de D_6. Por ejemplo, $s_5 \in D_6$ tiene ciclos $(3)(6)(2\,4)(1\,5)$. Sabemos que un color será fijado una vez que escojamos un color para 3, 6, $\{2,4\}$ (mismo color) y $\{1,5\}$ (mismo color). El monomio de ciclos es $x_1^2x_2^2$. Cuando sustituimos $x_1 \leftarrow a+r$ y $x_2 \leftarrow a^2+r^2$ producimos todas las opciones de elegir un color $(a+r)(a+r)(a^2+r^2)(a^2+r^2)$ para 3, 6, $\{2,4\}$ y $\{1,5\}$, respectivamente. Entonces, la expansión

$$a^6 + 2a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + 2ar^5 + r^6$$

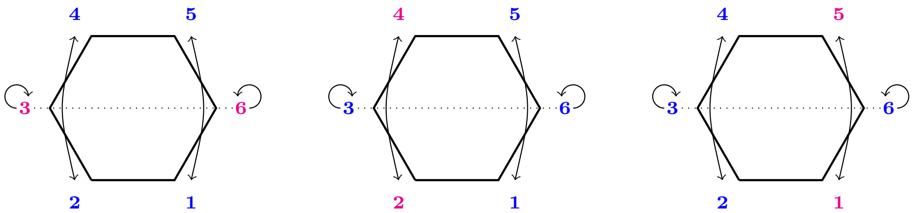
nos da un refinamiento para contar las coloraciones que se fijan por s_5, teniendo en cuenta cuántas veces se utiliza un color. Por ejemplo, el coeficiente 3 delante de a^4r^2 significa que hay 3 coloraciones que serán fijadas por s_5 con cuatro a y dos r. Cuando expandimos $(a+r)(a+r)(a^2+r^2)(a^2+r^2)$ podemos obtener a^4r^2 de tres maneras diferentes:

$$(a+\underline{\mathbf{r}})(a+\underline{\mathbf{r}})(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)$$

$$(\underline{\mathbf{a}}+r)(\underline{\mathbf{a}}+r)(a+\underline{\mathbf{r^2}})(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)$$

$$(\underline{\mathbf{a}}+r)(\underline{\mathbf{a}}+r)(\underline{\mathbf{a^2}}+r^2)(a+\underline{\mathbf{r^2}}).$$

Cada forma de obtener el monomio a^4r^2 corresponde exactamente a una opción de color que se fija por s_5 seleccionando el color que ponemos en cada ciclo 3, 6, $\{2,4\}$ y $\{1,5\}$ respectivamente. Éstos son (enumerados de la misma manera que conseguimos los monomios anteriormente):



Donde aquí coloreamos los elementos de X, rojo para los r y azul para los a. Así, continuamos nuestra expansión de $P_{D_6,X}$

$$\begin{aligned} &P_{D_6,X}(a+r, a^2+r^2, a^3+r^3, a^4+r^4, a^5+r^5, a^6+r^6) \\ &\quad = \tfrac{1}{12}\big(12a^6 + 12a^5r + 36a^4r^2 + 24a^3r^3 + 36a^2r^4 + 12ar^5 + 12r^6\big) \\ &\quad = a^6 + a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + ar^5 + r^6. \end{aligned}$$

Cuando hacemos esto, delante de cada monomio usamos la proposición 14 para cada distribución de colores por separado. Entonces

$$P_{D_6,X} = a^6 + a^5r + 3a^4r^2 + 2a^3r^3 + 3a^2r^4 + ar^5 + r^6$$

nos da la distribución de coloraciones posible dependiendo de cuántas veces se utiliza cada color. De hecho, la pregunta de Pólya se responde, ya que hay exactamente tres coloraciones posibles de un hexágono usando 2 Br y 4 H. Es el coeficiente de a^2r^4 en $P_{D_6,X}$ después de la sustitución $x_i \leftarrow a^i + r^i$.

Resumimos lo que hemos hecho en general como sigue:

Teorema 19 (Pólya)**.** *Dado un grupo G que actúa sobre un conjunto X, considere la acción de G sobre C^X con $c = |C|$.*

(a) El polinomio de índice de ciclos $P_{G,X}$ evaluado en c es

$$P_{G,X}(c, c, \ldots, c) = \big|C^X/G\big|.$$

(b) El coeficiente de $a_1^{d_1} a_2^{d_2} \cdots a_c^{d_c}$ en el polinomio resultante de la sustitución

$$x_i \leftarrow a_1^i + a_2^i + \cdots + a_c^i$$

en $P_{G,X}$, es el número de coloraciones de X con el color a_i usado d_i veces.

Con lo expuesto en la sección y generalizando el ejemplo 18 obtenemos una demostración del teorema.

Ejercicios E

Ahora tratemos de resolver la pregunta de Laura. Una vez más, calentemos un poco antes.

Ej.6.1 Elije una representación por permutaciones que hayas hecho antes.

(a) Da el polinomio de índice de ciclos.

(b) Contar el número de coloraciones usando 3 colores.

(c) Contar el número de coloraciones usando 3 colores, pero no repetir ningún color en una coloración.

(d) Contar el número de coloraciones usando 3 colores, pero teniendo un color repetido una vez.

Ej.6.2 Contar el número de manera de construir las baldosas de Laura sin colores utilizados más de dos veces.

Ej.6.3 ¿Puedes contar el número de los buenos embaldosados de Laura de tamaño 2×3, usando sólo las baldosas del ejercicio Ej.6.2?

Ej.6.4 ¿Puedes contar coloraciones en una dimensión más alta? (Coloraciones de un politopo)?

Referencias

[1] R. A. Brualdi, *Introductory Combinatorics*, Pearson, 2010.

[2] G. Pólya & R. C. Read *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds* Springer-Verlag 1987.

Recibido en enero 25 de 2018. Aceptado para publicación en octubre 4 de 2019.

NANTEL BERGERON
MATHEMATICS AND STAT. DEPARTMENT
YORK UNIVERSITY
TORONTO, CANADÁ
e-mail: bergeron@yorku.ca

LILIAN J. CRUZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE
CALI, COLOMBIA
e-mail: lilian.cruz@correounivalle.edu.co