

Problemas de aprendizaje del concepto de límite en el contexto de la cinemática

S. Flores-García¹, A. Herrera-Chew² y M. A. González³

Resumen

Muchos estudiantes en los cursos de física en los primeros semestres de las carreras de ingeniería no alcanzan a comprender el concepto de límite aún cuando estas materias les brindan la oportunidad de estudiar este concepto en contexto. La aproximación didáctica a través de una instrucción tradicional no produce los elementos de orden pedagógico que el currículo necesita para el desarrollo de este conocimiento matemático aplicado a la cinemática. Esta investigación muestra una importante parte de las dificultades de aprendizaje de la mayoría de los alumnos cuando tratan de desarrollar el concepto de límite en un contexto físico. De la misma manera, los resultados obtenidos señalan la necesidad del diseño e implementación de una propuesta didáctica que promueva la formalización del conocimiento científico y el desarrollo de habilidades intelectuales de los estudiantes de la física.

1. Introducción.

Uno de los mayores problemas al que nos enfrentamos la mayoría de los seres humanos al cursar algún grado académico, es el de tener una interacción con todo aquello que mencione la palabra matemáticas.

No resulta fácil indagar sobre este problema y mucho menos el darnos cuenta de que existe. Esto se debe a que estamos muy acostumbrados a cargar nuestros errores en terceras personas, es decir, el que tiene la culpa de no aprobar un curso de matemáticas o física es el alumno.

Como lo menciona Luis Moreno Armella (1992), “existe la idea de que el conocimiento es una especie de paquete que se transmite y se adquiere tanto mejor cuanto mejores sean los vehículos que lo transportan”.

Entonces es necesario preguntarnos ¿qué es el conocimiento?, y como nuevamente menciona Moreno Armella, “Eso, que no ha resultado ser tan fácil de transmitir quizá se deba a que no es algo que puede transmitirse, debido a que el profesor no lo tiene *hecho* para consumo de sus alumnos, sino que los alumnos lo construyen.”

Este trabajo de investigación se desarrolla en el contexto físico (cinemática); además de la conversión a otros contextos sobre el concepto de límite.

De acuerdo a investigaciones previas, existen grandes deficiencias en el proceso enseñanza – aprendizaje en prácticamente todos los cursos de matemáticas en algunos tópicos relacionados al concepto de límite. Al respecto Ramiro Ávila Godoy (1994) dice que “el afirmar que la enseñanza del Cálculo es una problemática que no provoca

¹ UACJ. sergiflo@hotmail.com

² ITCJ. aleiz_herrera@yahoo.com.mx

³ ITCJ doloresgo73@hotmail.com

polémica, pues prácticamente todo profesor de Cálculo ha vivido la experiencia de no haber podido lograr que los estudiantes de sus cursos adquieran el nivel de dominio de los conceptos y métodos de la disciplina que se requieren para tener éxito en la resolución de problemas”.

Este trabajo de investigación persigue fundamentalmente, hallar los errores que los estudiantes crean en su pensamiento al momento de “recibir” algún concepto dado en clase por el profesor. Como menciona Ávila Sandoval (1998) “El profesor debe conocer el valor que tiene el error y considerarlo también como parte importante de la generación del conocimiento: el error puede, muchas veces indicar una comprensión inteligente del problema, sólo que desafortunada, es decir, para que un alumno ofrezca una respuesta equivocada, tuvo que darse un proceso intelectual que provocó una respuesta no correcta, por lo tanto no debe considerarse el error como una ausencia de conocimiento, por el contrario, es una evidencia de conocimiento incorrecto pero que para el alumno tuvo validez en su momento”.

2. Contexto de investigación.

El trabajo de investigación se realizó en el Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez

con alumnos de primer semestre en el área de ingeniería realizado en 2 etapas, la primera en el periodo del semestre agosto – diciembre de 2004 con grupo de 26 estudiantes y la segunda en el periodo del semestre enero – junio de 2005 con un total de 20 alumnos.

Se presenta a continuación un breve estudio epistemológico de cada uno de estos grupos de trabajo, empezando con el del primer semestre expuesto.

Los alumnos de este primer grupo son egresados de preparatorias tales como los Colegios de Bachilleres 5, 6 y 7, Centros de Bachillerato (CBTIS # 114 Y 128), Preparatoria del Chamizal, Cetis 61 y algunos que provienen del resto del país.

Además el grupo formado en esta ocasión era homogéneo, es decir, todos estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial. Por otra parte, el siguiente grupo, compuesto en su totalidad por estudiantes repetidores, esta conformado por una variedad de ingenierías. Estos alumnos también egresados de preparatorias como las antes mencionadas y con características muy similares a las del grupo anterior.

3. Justificación del problema de investigación.

De acuerdo a Flores, Kanim y Kautz (2004) “Muchos estudiantes son expuestos

inicialmente a la física en los contextos de cinemática y dinámica. Un entendimiento de como estos tópicos se relacionan uno a otro requiere la habilidad para razonar acerca de vectores que representen fuerzas y cantidades cinemáticas. Las modificaciones en la instrucción presentadas en este documento (cambio de distintas representaciones matemáticas) pueden mejorar significativamente el desempeño de los estudiantes en preguntas acerca de la suma y resta de vectores e incrementar la posibilidad que los estudiantes empleen vectores en su intento para resolver problemas de mecánica”.

4. Planteamiento del problema.

El límite es una herramienta fundamental para entender las bases del conocimiento tanto del cálculo diferencial como integral. Su entendimiento conceptual, sugiere una investigación formal que establezca las bases de análisis y caracterización de los problemas de aprendizaje que el alumno enfrenta cuando trata de aprender este tópico. Es por esto que nuestro problema de investigación dice:

Cuáles son los efectos de carácter cognitivo e instruccional que produce en los alumnos del primer y segundo semestre de los cursos de Cálculo I, una metodología de

aprendizaje del concepto de límite en el contexto físico de la cinemática? Esto con base una propuesta fundamentada en el constructivismo, los diversos marcos de referencia y la técnica del aprendizaje colaborativo.

5. Metodología.

Para iniciar con el desarrollo del problema de investigación, fue necesario formular una serie de objetivos sobre el problema existente para poder definir qué es lo que se quería obtener con la investigación.

Dichos objetivos se describen a continuación:

- Detectar las creencias erróneas que los alumnos puedan crear al momento de presentarse el concepto de límite.
- Analizar dichos errores que permitan crear una nueva propuesta de enseñanza – aprendizaje.
- Crear en el alumno la conciencia de que las matemáticas, y en particular que el concepto de límite, son una herramienta aplicable en cualquier contexto real.
- Desarrollar habilidades como la deducción, creatividad y relación.

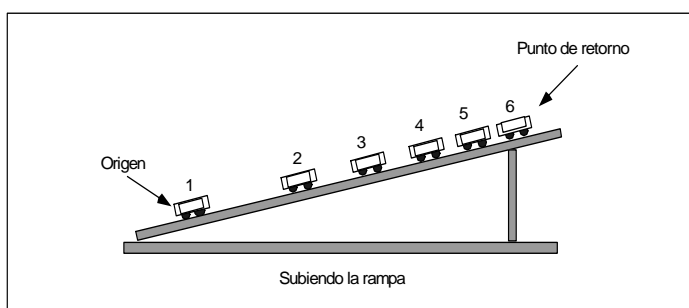
- Lograr que el alumno sea capaz de transportar el concepto matemático a problemas de interés real.
- Lograr que el alumno sepa interpretar los resultados obtenidos, utilice la lógica y sea crítico en la resolución de problemas.

La siguiente actividad está dividida en dos partes por lo extenso de su contenido. En las figuras 1, 2, 3 y 4 se muestran algunas partes del contenido de estas actividades. La primera consiste en que por medio de la representación de vectores dibujados por el alumno mismo sobre un plano (un carro que va de subida por una rampa), éste vea la diferencia o el cambio que va presentando

cada uno de los vectores en las distintas posiciones en las que se dibuja el carro. Además, el alumno debe determinar la dirección y magnitud de cada vector \vec{v} y $\Delta\vec{v}$.

La intención de pedir la comparación de magnitudes y direcciones de velocidades en dos posiciones distintas además de su graficación, y nuevamente pedir las en otras dos posiciones consecutivas diferentes; es para que el alumno perciba la diferencia de que cada una cambia de magnitud, mas no de dirección.

La figura siguiente representa una fotografía estroboscópica de un carro que rueda sobre una rampa hacia arriba. (En una fotografía estroboscópica, la posición de un objeto se observa en ciertos instantes que están separados por iguales intervalos de tiempo).



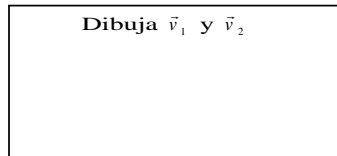
1.
 - a) Dibuja en la fotografía los vectores que representen la velocidad instantánea del carro en cada una de las posiciones indicadas con número. Si en algún punto la *velocidad* es *cero*, indícalo en la misma fotografía.
 - b) Luego de haber trazado los vectores, *explica* por qué los dibujaste así.

Figura 1. Representación del carro en subida.

2.

a) En el espacio de abajo, compara las magnitudes y direcciones de las velocidades en los puntos 1 y 2, dibujando los vectores que representen esas velocidades.

Sugerencia: Dibuja los vectores uno debajo del otro (paralelamente) y llámalos \vec{v}_1 y \vec{v}_2 respectivamente.



b) Nuevamente, en el espacio de abajo, indica cómo representarías la *diferencia* entre el vector \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , ($\vec{v}_2 - \vec{v}_1$), a esa diferencia de velocidades, llámale $\Delta\vec{v}$.



NOTA: $\Delta\vec{v}$ es el vector que hay que sumarle a \vec{v}_2 para igualarlo con \vec{v}_1 .

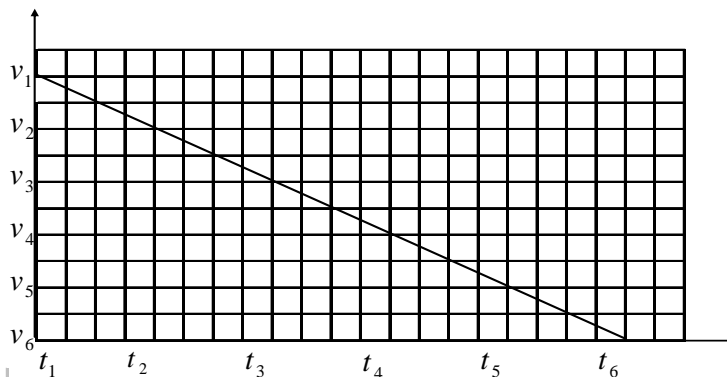
c) Llamaremos al vector $\Delta\vec{v}$. "cambio de velocidad". ¿Por qué crees que el nombre es apropiado para el vector

$\Delta\vec{v}$?

d) ¿Cómo es la dirección del vector cambio en velocidad con relación a la dirección de los vectores velocidad?

Figura 2. Parte de las preguntas del experimento del objeto sobre una rampa.

3. ¿Cómo sería la *magnitud* del vector cambio en velocidad entre los puntos 1 y 2 comparada con la magnitud del mismo vector para dos *puntos consecutivos diferentes* (por ejemplo, los puntos 3 y 4)? **Explica.** (Puede serte útil emplear el gráfico *velocidad* versus *tiempo* correspondiente a este movimiento).

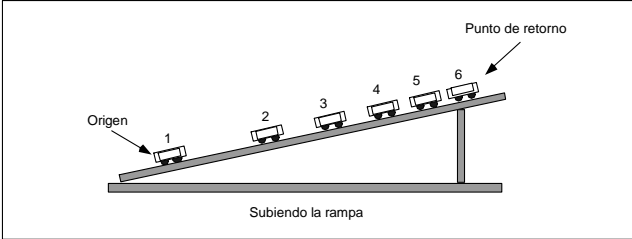


a) Considera el vector cambio en velocidad entre dos puntos que no sean consecutivos, por ejemplo, 2 y 5, ¿cambia la dirección del vector cambio en velocidad con respecto a la obtenida para dos puntos consecutivos?

Figura 3. Gráfica que indica velocidad contra tiempo.

Esperando que después de analizar el ejercicio anterior, su deducción con respecto a la dirección del vector cambió cuando la velocidad es la misma.

1. Se muestra nuevamente la fotografía estroboscópica de la práctica 1, 1ª parte, en ella coloca un punto medio entre la posición 1 y la posición 2, llámale punto 7. Dibuja el vector velocidad que va de 1 a 7.



a) Dibuja el vector "cambio en velocidad" $\Delta \vec{v}$, es decir, $\vec{v}_{17} - \vec{v}_{12}$. ¿Cómo es la dirección de $\Delta \vec{v}$ con respecto a \vec{v}_{12} ?
Coloca un nuevo punto a la mitad entre 1 y 7 y llámale 8 a este punto. Dibuja el vector velocidad que va de 1 a 8.

b) Dibuja el vector "cambio en velocidad" $\Delta \vec{v}$, es decir, $\vec{v}_{18} - \vec{v}_{17}$. ¿Cómo es la dirección de $\Delta \vec{v}$ con respecto a \vec{v}_{12} ?
Coloca nuevamente un punto a la mitad entre 1 y 8 y llámale 9 a este punto. Dibuja el vector velocidad que va de 1 a 9.

c) Dibuja el vector "cambio en velocidad" $\Delta \vec{v}$, es decir, $\vec{v}_{19} - \vec{v}_{18}$. ¿Cómo es la dirección de $\Delta \vec{v}$ con respecto a \vec{v}_{12} ?

d) ¿Seguirá el vector $\Delta \vec{v}$ (obtenido de la diferencia entre puntos medios) en la misma dirección que los vectores $\Delta \vec{v}$ anteriores? (Considera que cada vez el punto nuevo dibujado estará mas cerca del punto 1).

Figura 4. Contenido de la segunda parte de la actividad 1.

Cada una de las preguntas mostradas en la figura 4 tienen como finalidad convencer al estudiante que a pesar de que la diferencia entre cada vector $\Delta \vec{v}$ sea cada vez mas pequeña. La dirección de éste no cambia.

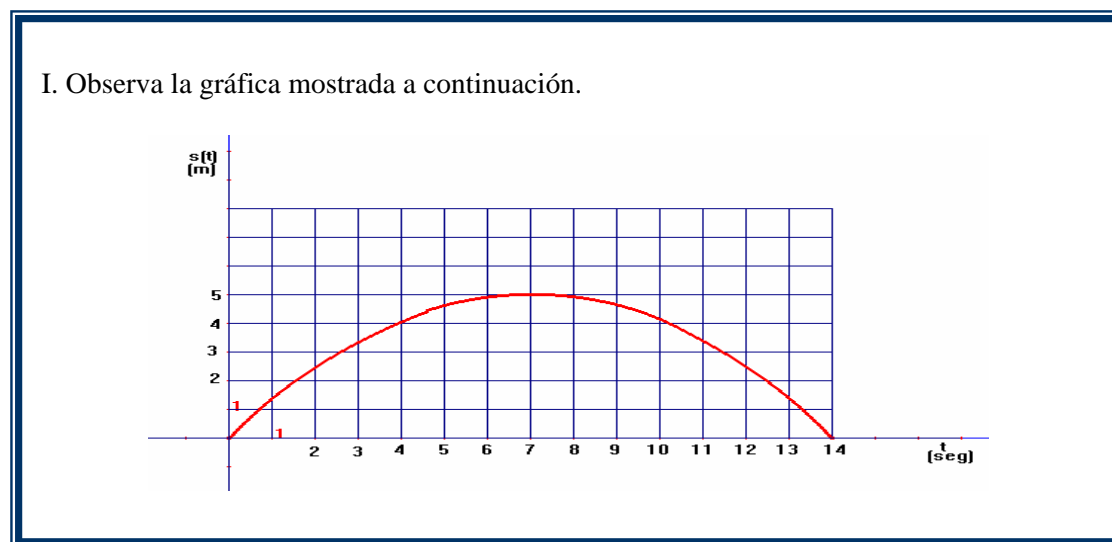


Figura 5. Representación gráfica del movimiento con aceleración constante

La siguiente tabla muestra los valores correspondientes de posición en distintos segundos mostrados es la gráfica de la figura 5.

El alumno puede hacer uso de ellos si lo cree necesario para contestar las preguntas que se le plantean.

Tabla 1. Indica posiciones del carro a distintos tiempos.

t	$s(t)$
0	0
1	1.3
2	2.4
3	3.3
4	4
5	4.5
6	4.8
7	5
8	4.8
9	4.5
10	4
11	3.3
12	2.4
13	1.3
14	0

Esta actividad se presentó como ejercicio mostrado en la figura 5 y la tabla 1 donde se le pregunta al estudiante sobre cuales serian las velocidades medias en distintos intervalos de tiempo para luego cuestionarle directamente sobre el limite de la posición cuando el tiempo tiende a hacerse mas pequeño cada vez como se muestra a continuación:

- a) ¿Cuál es la *velocidad media* entre 1 y 4 segundos?
- b) ¿Cuál es la *velocidad media* entre 4 y 7 segundos?
- c) ¿Cuál es la *velocidad instantánea* a los 4 segundos?
- d) ¿Cuál es el *límite* $s(t)$ de 4 a 3 segundos (esto es, cuando el incremento del tiempo tiende a ser cero)? Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} s(t)_{(4 \rightarrow 3)}$$

- e) ¿Cuál es el *límite* de $s(t)$ de 3 a 2 segundos, (esto es, cuando el incremento del tiempo tiende a ser cero)? Simbólicamente se expresa así:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} s(t)_{(3 \rightarrow 2)}$$

f) ¿Cuál es el límite de $s(t)$ de 2 a 1 segundos, es decir:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} s(t)_{(2 \rightarrow 1)}$$

Las siguientes actividades están dirigidas a trabajar en los contextos gráfico y numérico.

6. Análisis y discusión de resultados.

6.1 Práctica 1 (Cinemática).

En la práctica 1, primera parte, la cual se trabaja como actividad grupal (6 equipos de 4 a 5 estudiantes), se presenta una fotografía que muestra un carro en distintas posiciones y que rueda hacia arriba por una rampa, ahí se le pide primeramente al estudiante, que represente de

manera vectorial la velocidad instantánea en las distintas posiciones que muestra el carro. Los integrantes de los 5 equipos dibujaron vectores en la dirección en la que se muestra el carro, además en cada posición fueron disminuyendo el tamaño de estos, lo cual es correcto. La explicación que ellos dan de por qué dibujan así los vectores, son variadas:

“Todos llevan una misma dirección, es decir, van hacia arriba.”

“Por el ángulo de inclinación del riel.”

“El carro va siguiendo el riel, así que tiene la misma dirección.”

“El tamaño indica la magnitud, la inclinación indicará la dirección.”

“La dirección porque van subiendo, la magnitud porque su velocidad irá disminuyendo.”

Se presenta un recuadro, donde se le pide al alumno que dibuje dos vectores con los que representó las velocidades instantáneas del carro, en distintas posiciones y que lo haga de manera paralela, para que los compare, tanto en magnitud

como dirección y los llame respectivamente \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , y se le pregunta cómo representaría la diferencia de ellos gráficamente. Las figuras 6, 7 y 8 muestran algunos ejemplos hechos por alumnos.

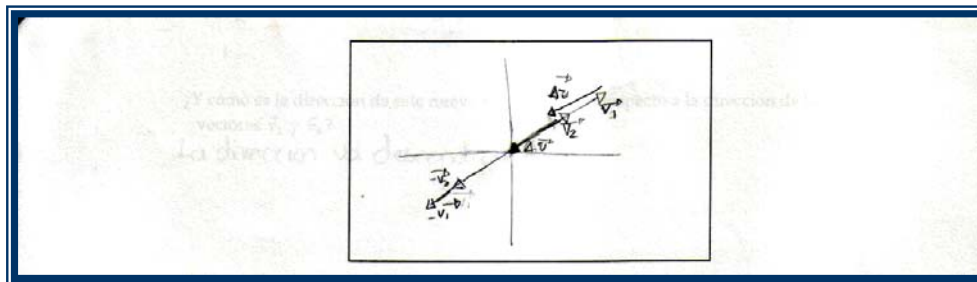


Figura 6. Respuesta correcta de alumno sobre comparación de vectores (velocidad).

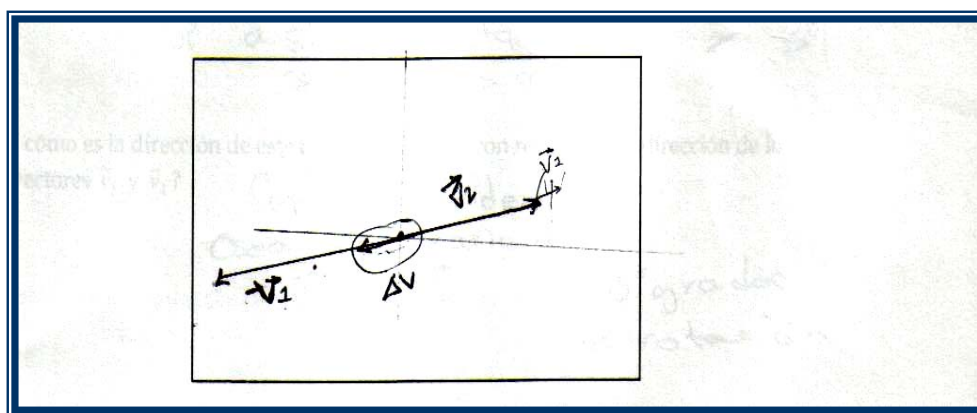


Figura 7. Respuesta correcta de alumno sobre comparación de vectores (velocidad).

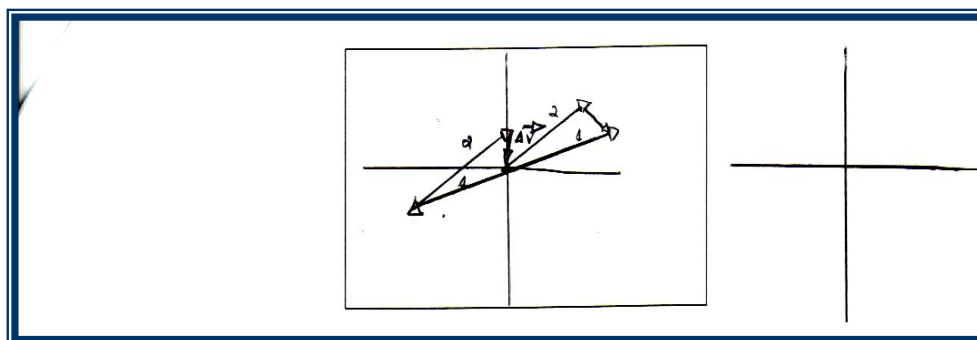


Figura 8. Respuesta incorrecta de alumno sobre comparación de vectores (velocidad).

Al vector $\Delta\vec{v}$ le llamamos *cambio de velocidad*, preguntando por qué creen apropiado el nombre para ese vector, siendo estas algunas de las respuestas más significativas:

“El vector velocidad, cambió de dirección 180° y magnitud, consideran dola absoluta menor que \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .”

“Porque este vector significa un decremento en la velocidad..”

“Porque la velocidad no es constante.”

“Representa el cambio o la disminución de velocidad.”

“Porque hay un cambio en la dirección.”

“Porque es un decremento de la velocidad.”

6.2 Práctica 2 (Cinemática).

Para continuar con el trabajo hecho anteriormente, en la segunda parte de esta primera actividad, se muestra nuevamente la fotografía estroboscópica del carro, y se procede de manera muy semejante a lo hecho anteriormente, con la diferencia de que se le pide al estudiante que dibuje un punto intermedio entre la posición 1 y 2 del carro y le llame 7.

Dentro de esta segunda parte se incluyen una serie de preguntas “clave” para introducir el

concepto de límite, la primera de ellas cuestiona al alumno sobre la magnitud del vector velocidad en estas nuevas posiciones, a lo cual el 50% responde que cada vez es mayor la velocidad y el otro 50% responde que cada vez es menor. Se le pregunta también sobre la magnitud de $\Delta\vec{v}$, pidiéndole que indique si aumenta, disminuye ó permanece igual, a lo cual todos responden que va en disminución. Algunas explicaciones que ellos expresan son las que a continuación se indican:

“Porque los vectores entre \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se van acercando a la posición 1.”

“Porque al sacarle un punto medio se va haciendo mas pequeño.”

“Debido a que el incremento se hace pequeño cuando divide entre 2.”

Esta parte termina preguntando al alumno qué significa $\Delta\vec{v}/\Delta t$ cuando Δt disminuye o se hace muy pequeño, a lo cual las respuestas fueron variadas:

“La velocidad aumenta.”

“Significa que en algún punto se considera que se vuelve 0.”

“Si Δt disminuye también $\Delta \vec{v}$ disminuye.”

“El resultado es una aceleración la cual se mantendrá constante.”

El análisis de las siguientes actividades se refiere al contexto numérico y gráfico.

7. Conclusiones.

Según Flores (2006), “la mayoría de los estudiantes de nivel medio superior, presentan dificultades de entendimiento de los conceptos fundamentales de física. No solamente en lo que se refiere a la modalidad clásica, si no también, con el área de la física moderna. El desarrollo conceptual de los distintos objetos matemáticos que representan a los conceptos físicos determina, en gran medida, una evolución cognitiva en las estructuras matemáticas del alumno. Varios investigadores del área de la enseñanza y aprendizaje de las ciencias han monitoreado las dificultades del proceso cognitivo del desarrollo del entendimiento de la física. La mayoría de estos investigadores concluye, que el estudiante promedio desarrolla un entendimiento aproximado del 5% al 10% de toda la gama de conocimiento del que es capaz de construir. Una de las principales causas de estos resultados es el gran reto del entendimiento conceptual, que implican los diversos cambios de una representación de un fenómeno físico a otra representación durante el proceso de

entendimiento. Sin embargo, la versatilidad del alumno para pasar de una representación a otra puede estar influenciada por las características del contexto de la situación de aprendizaje”.

Después de una encuesta verbal dirigida a los estudiantes al término de las prácticas, se pudo observar por medio de sus comentarios, que para todos, la metodología empleada en este trabajo era una novedad. Algunos de sus comentarios fueron tales como: “*entiendo que se trata de llegar a un concepto*”; “*me pareció mas sencilla la manera de abordar el tema*”; “*para mí fue un poco mas complejo, pero tiene sentido, esto permitió que todos tengamos la oportunidad de aprender, por la variedad de prácticas*”; “*no he entendido cuál es el fin*”.

De acuerdo a los resultados tal parece que aún tenemos mucho por hacer. Primeramente para que se genere un cambio en el método de aprendizaje y después un extenso trabajo por parte de las instituciones con ayuda de los maestros para la creación de métodos de enseñanza que ayuden a la mejor comprensión de conceptos en el área de la física.

Referencias:

Ávila Godoy R. 1994., *La Enseñanza del Cálculo*, Universidad de Sonora.

Ávila Sandoval MS. 1998. *Enseñanza de Trigonometría a través de problemas físicos*, tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Flores S. 2006. *Student use of vectors in mechanics*, tesis para obtener el grado de doctorado en física, Universidad Estatal de Nuevo México.

Flores S, Kanim S y Kautz CH. 2004. *Student use of vectors in introductory mechanics*, Am. J. Phys., **72** (4), 460-468.

Moreno Armella L. 1992. *Constructivismo y educación matemática*, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV.