

Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas

Mathematical connections established by pre-service teachers when solving measurement and comparison tasks of area

Sofía Caviedes-Barrera¹, Genaro de Gamboa-Rojas², Edelmira Badillo-Jiménez³

1. Ph.D. estudiante. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Correo electrónico: sofialuisa.caviedesbarrera@gmail.com
2. Ph.D. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Correo electrónico: genaro.degamboa@uab.cat
3. Ph.D. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España. Correo electrónico: edelmira.badillo@uab.cat

Recibido en febrero 21 de 2019

Aceptado en abril 29 de 2019

Publicado en línea en mayo 17 de 2019

Resumen

El objetivo de este estudio es indagar sobre las conexiones matemáticas entre manifestaciones del área que establecen (o no) los maestros en formación al resolver tareas asociadas al cálculo del área de superficies planas. Los estudiantes para maestro, reunidos en parejas, respondieron un cuestionario que solicitaba: 1) medir el área de superficies planas utilizando dos o tres procedimientos diferentes, y 2) justificar cada resolución con base en los procedimientos utilizados. Los resultados obtenidos evidencian que la gran mayoría de estudiantes para maestro privilegian el uso de procedimientos numéricos y el uso de fórmulas, ignorando procedimientos geométricos e intuitivos que facilitarían la tarea de cuantificar el área. En este sentido, se advierte la dificultad de los estudiantes para maestro para establecer conexiones entre las manifestaciones del área.

Palabras clave: conexiones matemáticas; conocimiento del profesorado; medición del área; estudiantes para maestro.

Abstract

The aim of this research is to explore the mathematical connections between area manifestation, which pre-service teachers can be established (or not) when solving tasks related to measuring flat surfaces. Pairs of pre-service teachers answered a questionnaire in which they were requested to: (1) measure the area of flat surfaces using two or three different methods, and (2) justify every resolution based on the methods that were used. Results showed that most aspiring teachers prioritize numerical methods and formulas, ignoring geometrical and perceptive methods, can make the task of measuring area easier. In this sense, it can be said that is difficult for pre-service teachers to establish connections between the manifestations of the area.

Keywords: Mathematical Connections; Teacher's Knowledge; Area Measurement; Pre-service Teacher.

Introducción

Diversos modelos que abordan el conocimiento del profesorado, propuestos desde la investigación y desde el análisis de situaciones prácticas, hacen referencia a la necesidad de implementar experiencias que permitan focalizarse en el desarrollo de conocimientos y competencias de los docentes como un tema fundamental en la agenda de la investigación en educación matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Ponte y Chapman, 2006; Shulman, 1986; entre otros). En este sentido, es fundamental que el conocimiento de los profesores trascienda el dominio de un tema o de sus materiales didácticos, pues esto permitiría mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Espinosa, 2016).

En este orden de ideas, las conexiones matemáticas se presentarían como un aspecto clave en el momento de enseñar y aprender un nuevo conocimiento ya que permitirían al profesorado relacionar los distintos contenidos de la disciplina de las matemáticas y, al mismo tiempo, otorgar sentido al trabajo matemático de los estudiantes (De Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015). Esta acción de establecer relaciones entre distintos contenidos matemáticos requiere el uso de varias estrategias didácticas, precisas y apropiadas si lo que se busca es favorecer la comprensión de los alumnos. El uso de tales estrategias didácticas, de acuerdo con Ball, Lubienski y Mewborn (2001), sería un aspecto clave en la enseñanza en esta área ya que estarían vinculadas con cómo los estudiantes comprenden y utilizan las ideas matemáticas. Es necesario considerar también que una mayor libertad para seleccionar y utilizar estrategias didácticas que permitan relacionar los distintos contenidos matemáticos requiere un adecuado conocimiento matemático y habilidades específicas referidas al contenido que se va a enseñar (Ball *et al.*, 2008).

En este estudio se indagó cómo un grupo de estudiantes para maestro (EPM) establece conexiones matemáticas al resolver tareas de medida y comparación de área de superficies planas. Para esto, se observaron y analizaron los cambios de registro en las diferentes estrategias de resolución utilizadas en cada tarea, lo que permitió establecer tres niveles en la elaboración de las conexiones matemáticas establecidas. Para determinar conexiones asociadas al concepto de área, se tomaron como base las

manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996) y, posteriormente, para la caracterización de las conexiones encontradas, se tomó como referencia el marco propuesto por De Gamboa y Figueiras (2014).

Teniendo en cuenta las líneas de investigación sobre las que se apoya el presente estudio, se organiza este apartado en tres bloques: el primero relacionado con aspectos del conocimiento del profesorado; el segundo, con conexiones matemáticas y la necesidad de considerarlas en el momento de enseñar un nuevo contenido, y el último apartado tiene que ver con el concepto y la medida del área y la problemática de su enseñanza y aprendizaje.

Conocimiento del profesor

Buscando un marco que permitiera analizar las relaciones entre las diferentes interpretaciones sobre un concepto matemático, se ha observado que un problema ampliamente reconocido en los resultados de las investigaciones focalizadas en el profesor es la caracterización del tipo de conocimiento matemático y didáctico-matemático que se pone en juego o que se requiere para desarrollar la tarea docente de manera eficiente (Chapman, 2008; Llinares, 2012; Sowder, 2007). Así han surgido modelos teóricos que han propuesto diversas categorías y componentes del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas.

Shulman (1986) categorizó tres tipos de conocimiento que todo profesor debía tener: 1) conocimiento del contenido (*Subject Matter Content Knowledge*, SMCK), referido a la cantidad y organización del conocimiento de un tema matemático en la mente del profesor; 2) conocimiento pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK), relacionado con las formas de representar y formular un tema en particular; y 3) conocimiento curricular del contenido (*Curricular Content Knowledge*, CCK), asociado al conocimiento de la normativa que regula la enseñanza, considerando los contenidos por tratar en cada nivel.

Posteriormente, Ball *et al.* (2008) elaboran un refinamiento del modelo propuesto por Shulman (1986) y establecen una subdivisión del dominio del conocimiento del contenido (SMCK) en tres subdominios: (1) conocimiento común del contenido (*Common Content Knowledge*, CCK), referido a aquel conocimiento matemático y habilidades utilizadas en

escenarios diferentes al de la enseñanza; 2) conocimiento especializado del contenido (*Specialized Content Knowledge, SCK*), que es el conocimiento matemático y las habilidades propias de la enseñanza; y 3) el conocimiento del horizonte matemático (*Horizon Content Knowledge, HCK*), esto es, el conocimiento que permite relacionar los distintos contenidos matemáticos que se enseñan y que forman parte del currículo. Esta relación permitiría establecer un fundamento matemático para cada uno de los contenidos matemáticos que se abordan en los distintos niveles educativos, pues se trabajarían de forma conectada contenidos de años anteriores y posteriores. Al respecto, De Gamboa *et al.* (2015) señalan que el conocimiento del horizonte matemático permite identificar aspectos claves del contenido y gestionar actividades de aula por medio de conexiones matemáticas, favoreciendo la construcción de un conocimiento matemático sólido y duradero en el alumnado.

Carrillo *et al.* (2013) proponen una reinterpretación de los modelos anteriores y utilizan el concepto de conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK), diferenciándolo de otros tipos de conocimiento en la medida en que sería especializado únicamente desde la enseñanza de las matemáticas y para los profesores que enseñan la disciplina en la educación formal. Debido a que dicha especialización contempla un conocimiento matemático y un conocimiento didáctico del contenido, permitiría a los profesores transitar entre los distintos contenidos que se delimitan en los planes de estudio. Así pues, estos autores consideran que es necesario relacionar los distintos componentes matemáticos a fin de lograr la comprensión de las características y propiedades de los variados conceptos de la disciplina, considerando el proceder habitual del alumnado.

Cabe señalar que en el presente estudio no se pretende realizar un análisis exhaustivo de la relación que existe entre el conocimiento de los futuros maestros y el tipo de conexiones matemáticas que son capaces de establecer con base en él, sino que, más bien, la idea central es realizar un primer acercamiento a la capacidad de los docentes en formación para establecer e identificar conexiones matemáticas en relación con la medida del área. En este sentido, nos apoyamos en el conocimiento del horizonte matemático ya que permitiría establecer relaciones entre distintos conceptos matemáticos asociados a la medida del área.

Conexiones matemáticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje

En la literatura se hace referencia al término “conexión matemática” como una relación entre las ideas matemáticas, construida por el alumno, y como un proceso que es parte de la actividad de hacer matemáticas (Businskas, 2008). Concretando esta idea, De Gamboa y Figueiras (2014) se refieren a las conexiones matemáticas como una red de enlaces, entendidos como vínculos lógicos y coherentes que permiten articular nuevos significados.

La acción de establecer conexiones matemáticas ocurre en la mente de quienes aprenden y, por tanto, es una construcción mental (Businskas, 2008). Dicho proceso podría explicar, en parte, cómo los alumnos organizan los distintos conceptos matemáticos y los relacionan de un modo coherente. Ahora, si bien es cierto que las relaciones entre los diferentes conceptos matemáticos existen por sí solas, es tarea de los profesores asegurarse de que los estudiantes logren establecer las conexiones apropiadas entre estos. Para lograr esto, es preciso que los docentes comprendan las matemáticas como una red interrelacionada de ideas en sí mismas y conozcan estrategias y ejemplos que propicien la adecuada comprensión en los alumnos (Businskas, 2008). De este modo pueden direccionar la enseñanza para que los estudiantes logren reconocer y otorgar sentido a las distintas conexiones matemáticas.

En este sentido, la capacidad de los profesores para establecer conexiones matemáticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje se presentaría como un aspecto clave para promover la construcción de un conocimiento sólido y duradero, a la vez que permitiría gestionar posibles errores y dificultades en los alumnos (De Gamboa *et al.*, 2015). Para que esto ocurra, es necesario, entre otros conocimientos y competencias, que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la resolución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Debido al carácter interno y externo propio de la disciplina de las matemáticas, el conocimiento matemático posibilita la diferenciación de una tipología específica de conexiones. Aquellas que establecen relaciones entre aspectos internos

de la matemática se denominan conexiones intramatemáticas y, según De Gamboa y Figueiras (2014), estas pueden ser asociadas con procesos transversales y de tipo conceptual.

Las conexiones que tienen que ver con procesos transversales establecen relaciones entre un concepto matemático y un proceso transversal asociado, como pueden ser las heurísticas relacionadas con la resolución de problemas. Por su parte, las conexiones de tipo conceptual relacionan representaciones, procedimientos o técnicas asociadas a un concepto o a conceptos diferentes (De Gamboa y Figueiras, 2014). Para analizar los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático, Duval (2006) diferencia entre dos tipos de representación en la actividad matemática: 1) las conversiones, y 2) los tratamientos. Mientras que las primeras se dan entre registros diferentes, los segundos se producen dentro de un mismo registro.

Por otro lado, aquellas conexiones que establecen relaciones entre los contenidos matemáticos asociados a la vida diaria, a otras disciplinas curriculares y a modelos construidos a partir de referentes reales se denominan conexiones extramatemáticas (De Gamboa y Figueiras, 2014).

Las conexiones matemáticas, por lo tanto, tienen una relación estrecha con el conocimiento matemático que debe poseer el profesorado. En este sentido, tener un conocimiento de la disciplina, de la pedagogía y del currículo (incluyendo otros contenidos matemáticos y de distintas asignaturas) permitiría al profesorado mayor libertad para transferir el conocimiento matemático escolar (De Gamboa *et al.*, 2015).

La medida del área y dificultades asociadas

Las dificultades asociadas a la comprensión del concepto de área han tomado un rol protagónico en diversas investigaciones, las cuales han ido estableciendo principios orientadores para los procesos de enseñanza y aprendizaje que abordan este tema. Diversos estudios (Corberán, 1996; D'Amore y Fandiño, 2007; Freudenthal, 1983; entre otros) han mostrado que una gran cantidad de alumnos de educación primaria presentan dificultades y errores en el momento de resolver problemas asociados a la medida del área. Algunas de estas fallas evidencian una pobre

comprensión tanto del significado de las fórmulas como del concepto, pues se ha constatado que algunos estudiantes utilizan la fórmula de largo por ancho para encontrar el área de un rectángulo y la de otras figuras distintas.

La medición del área es particularmente interesante ya que involucra la coordinación de dos dimensiones: el origen experiencial de la fórmula del área es la acción unidimensional de cubrir físicamente un rectángulo con unidades cuadradas, la cual sugiere un proceso aditivo, mientras que la fórmula es bidimensional y multiplicativa (Outhred y Mitchelmore, 2000). Esta coordinación entre dos dimensiones puede proporcionar ejemplos variados sobre las conexiones que son capaces de establecer los alumnos al relacionar la medición del área con los conceptos de unidad y de iteración de unidad, la cantidad de unidades y el cálculo con fórmulas.

Sin embargo, para que los estudiantes sean competentes a la hora de asociar una unidad de medida al área es necesario que comprendan esta última como una cantidad bidimensional dentro de límites específicos y que se configura, según Huang y Witz (2013), a partir de la adquisición de las formas, la medida y los cálculos implicados en la medida. La acción de medir el área de una superficie exige asignar un número al área para comparar la superficie con su respectiva unidad de medida. Esto requiere entender el concepto de unidad de medida, pues el uso de este tipo de procedimientos conduce a un tratamiento cuantitativo del área (Corberán, 1996).

Considerando la complejidad en los procesos de medida del área, la riqueza contextual y la pobre instrucción, que se ve reducida al uso de fórmulas (Freudenthal, 1983), sería deseable incluir en las experiencias de enseñanza-aprendizaje un tratamiento cualitativo y cuantitativo del área. Esto permitiría a los alumnos desarrollar una variedad de estrategias y una comprensión gradual del concepto y la medida del área. A su vez, haría posible interpretar el significado propio de las fórmulas, estableciendo, por ejemplo, una relación entre experiencias concretas y el significado físico de las fórmulas.

Enfatizamos el desarrollo gradual de estrategias ya que el uso temprano de fórmulas en los procesos de medida del área podría desencadenar, en los alumnos, dificultades para interpretar el significado físico de la representación numérica del área (Corberán, 1996). D'Amore y Fandiño

(2007) muestran evidencias de cómo, al variar la forma de una superficie, estudiantes de primaria no logran aceptar la posible inmutabilidad de la medida de la superficie, siendo incapaces de identificar que el área es independiente de la forma de la superficie (propiedad de conservación).

Por otro lado, incorporar estrategias concretas y trabajar en el desarrollo gradual de una comprensión de los procesos de medida del área podría facilitar el estudio de contenidos posteriores, pues cuando la medida del área se generaliza desde aplicaciones continuas hacia aplicaciones discretas, los modelos de área se convierten en un medio natural para enseñar, por ejemplo, fracciones y multiplicaciones (Freudenthal, 1983).

El conocimiento y la comprensión del área de los futuros maestros de primaria también puede ser inadecuado. Simon y Blume (1994) informan que muchos EPM utilizan unidades lineales en lugar de unidades cuadradas para medir áreas y piensan que, al duplicarse la longitud de los lados de un cuadrado, también se duplica su área. Además, los investigadores advierten que una gran cantidad de docentes en formación no logran disociar el área del número que la mide y, al medir dos superficies iguales con distintas unidades de medida, afirman que una es mayor que otra basándose en los datos numéricos. Esto resulta preocupante pues la competencia matemática inadecuada

de profesores hace que estos vuelvan a su conocimiento procedimental, aprendido de forma rutinaria en etapa escolar, cuando se encuentran bajo presión en el momento de completar una tarea matemática (Menon, 1998), lo que hace que transmitan su incompreensión del concepto de área a los alumnos.

Corberán (1996), basándose en estudios previos (Douady y Perrin-Glorian, 1989; Freudenthal, 1983), se refiere a que la enseñanza del área debería contemplar un tratamiento cualitativo con privilegio de procedimientos geométricos, y un tratamiento de tipo cuantitativo ligado al uso de procedimientos numéricos. Así, establece cuatro diferentes manifestaciones del área que deberían estar implicadas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la medida del área, a saber: 1) el área como cantidad de plano ocupado por la superficie; 2) el área como magnitud autónoma; 3) el área como número de unidades que recubren la superficie; y 4) el área como producto de dos dimensiones lineales. Estas manifestaciones contemplan estrategias diversas vinculadas a procedimientos geométricos e intuitivos y a procesos numéricos bidimensionales y unidimensionales que podrían contribuir a desarrollar un aprendizaje más conectado del área. La Tabla 1 muestra ejemplos de los procedimientos que corresponden a cada una de las manifestaciones del área.

Tabla 1. Manifestaciones del área y procedimientos involucrados.

Manifestaciones del área (M)	Acciones/procedimientos (P)
M1. El área como cantidad de plano ocupada por una superficie	P1. Procedimientos geométricos: P1.1. Comparar áreas de superficie con ausencia de número. P1.2. Comparación directa de áreas por superposición; comparación indirecta de áreas por recorte y pegado descomponiendo la superficie.
M2. El área como magnitud autónoma	P2. Procedimientos geométricos y numéricos bidimensionales: P2.1. Descomponer superficies en partes iguales; comparar áreas de superficies observando que superficies con forma diferente pueden tener igual área. P2.2. Medir el área de una misma superficie con distintas unidades de medida.
M3. El área como número de unidades que recubren una superficie	P3. Procedimientos numéricos bidimensionales: P3.1. Fraccionar el área de una superficie y/o contar el número de unidades que recubren una superficie con uso de una unidad de medida bidimensional. P3.2. Comparar el área de una superficie con la unidad bidimensional que mide a esa superficie.
M4. El área como producto de dos dimensiones lineales	P4. Procedimientos numéricos unidimensionales y bidimensionales: P4.1. Calcular área de superficies poligonales que puedan descomponerse en triángulos o rectángulos. P4.2. Aplicar fórmulas de cálculo del área de un rectángulo o cuadrado para determinar áreas de triángulos y paralelogramos.

Fuente: elaboración propia basada en Corberán (1996).

Metodología

Participantes y contexto

En este estudio participaron 64 EPM que cursaban su segundo semestre del segundo año, en el grado de Educación Primaria, período 2017-2018, en la Universidad Autónoma de Barcelona, España. Se eligió este grupo considerando que se encontraban cursando la asignatura de Aprendizaje Matemático y Currículo, que les había permitido familiarizarse con el concepto de área y los procesos de medida de áreas en diferentes superficies planas. En este sentido, el conocimiento adquirido les permitiría resolver las tareas que se les propondrían.

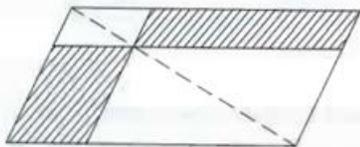
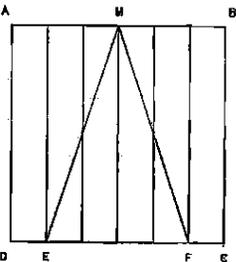
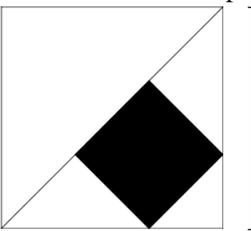
Para la recolección de datos se diseñó un cuestionario no

estructurado que constaba de tres tareas y que los EPM resolvieron en parejas. El objetivo de agruparlos así fue que ellos utilizaran estrategias diversas para resolver cada tarea y que identificaran los distintos elementos matemáticos implicados en la medida del área, considerándolos en sus resoluciones y justificaciones.

Instrumento

Se diseñó un cuestionario (Figura 1) que constaba de tres tareas pensadas para desarrollarse en una sesión de dos horas. Las Tareas 1 y 2 fueron adaptadas de Corberán (1996) y se eligieron considerando que ella buscaba analizar la comprensión del concepto de área de superficies planas en alumnos de primaria. La tercera tarea fue diseñada por los investigadores a partir de una obra de Theo van Doesburg.

Figura 1. Tareas propuestas a los estudiantes para maestro.

<p>Tarea 1</p> <p>Por un punto de la diagonal del paralelogramo se trazan las paralelas a los lados de esta figura. ¿Qué relación puedes establecer entre las áreas de las superficies sombreadas, que resultan de trazar las paralelas? Utiliza dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo, para justificar la relación establecida. Recuerda justificar tu respuesta de acuerdo a los procedimientos utilizados.</p> 	<p>Tarea 2</p> <p>El cuadrado ABCD se ha dividido en seis bandas iguales. Utiliza dos procedimientos diferentes para justificar que las áreas de las figuras AMED, MEF y MBCF son equivalentes. Justifica tu respuesta considerando los procedimientos utilizados.</p> 
<p>Tarea 3</p> <p>Calcula el área de cuadrado negro, utilizando tres procedimientos diferentes de tu elección. Justifica tu respuesta teniendo como referencia los tres procedimientos utilizados.</p>  <p style="text-align: right;">12 cm</p>	

Fuente: elaboración propia.

Cada una de las tres tareas solicitaba medir y comparar áreas de superficies planas y justificar los resultados con base en los procedimientos utilizados. Debido a que las figuras de las Tareas 1 y 2 no tenían valores numéricos asociados, la aplicación del cuestionario contempló la entrega de herramientas de medición (reglas y escuadras) a fin de que los EPM pudiesen usarlas de la forma que estimaran conveniente para medir las distintas áreas.

Las Tareas 1 y 2 solicitaban para su resolución dos procedimientos diferentes: uno de tipo numérico, al que se podía recurrir, por ejemplo, midiendo con una regla la longitud de los lados de las figuras, y otro de tipo geométrico intuitivo, que involucraba estrategias de medición no convencionales. Este último se requería para promover conversiones en las estrategias utilizadas. Por su parte, la tarea 3 demandaba tres procedimientos diferentes y a elección de los EPM. La introducción de conversiones estuvo fundamentada en Duval (2006), pues la acción de representar un objeto o relaciones matemáticas de un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo. En este sentido, las conversiones se presentarían como el tipo de conexiones que implica una mayor complejidad cognitiva, ligada a los procesos de comprensión de los estudiantes.

Análisis

Como un primer paso para el análisis se identificaron y clasificaron las estrategias que los EPM utilizaron para resolver cada tarea, en concordancia con los procedimientos asociados a cada manifestación del área (Tabla 1). Para esto se revisaron cada uno de los procedimientos de resolución y cada justificación escrita proporcionada por los EPM, con el fin de determinar cuál o cuáles manifestaciones del área estaban siendo utilizadas por cada pareja (en algunos casos, estas se evidenciaban más en las justificaciones que en los procedimientos utilizados). Una vez registradas las manifestaciones del área involucradas en cada resolución, se establecieron tres niveles para indicar el grado de conexión entre ellas: 1) conexiones primitivas; 2) conexiones emergentes; y 3) conexiones más elaboradas.

Un segundo paso fue la clasificación de las conexiones de acuerdo a los cambios de registro utilizados por los estudiantes, encontrando conversiones y tratamientos (Duval, 2006). Se tomó como conversión el uso de dos registros diferentes, uno geométrico y otro numérico, en la

resolución de cada tarea. En cuanto a los tratamientos, estos se consideraron dentro de los diferentes cálculos utilizados para medir áreas.

Se analizaron las resoluciones de 29 de las 32 parejas debido a que tres de ellas no resolvieron las tres tareas según lo solicitado; solo hicieron uso de un procedimiento para cada tarea y no proporcionaron justificaciones.

1. Estrategias de la Tarea 1

Se identificaron cuatro estrategias diferentes en las resoluciones de los EPM: 1) comparación indirecta por recorte y pegado; 2) comparación directa por superposición de superficies; 3) relación entre triángulos; y 4) medición de longitudes y uso de fórmulas.

Estrategia 1.1. Comparación indirecta por recorte y pegado

Esta estrategia está vinculada al uso de procedimientos geométricos, y su objetivo no es cuantificar el área de una superficie, sino comparar áreas de superficies estableciendo relaciones de igualdad y/o inclusión entre ellas, por lo que conduce a un tratamiento cualitativo del área. La Figura 2e muestra cómo una pareja de EPM calculó el paralelogramo propuesto en la Tarea 1 en una hoja blanca, posteriormente recortó las superficies sombreadas y las dividió por la mitad. Al colocar los dos trozos de una superficie sobre otra, comprobaron que tenían la misma área y a la vez identificaron que el área de una figura no cambia por desplazamiento o reagrupación de sus trozos, acercándose a la propiedad de conservación del área.

Estrategia 1.2. Comparación directa por superposición

Al igual que la estrategia anterior, esta es de tipo geométrico y le otorga al área un tratamiento cualitativo que permite concretar relaciones entre las áreas de dos o más superficies. La Figura 2d muestra cómo una pareja de EPM identifica que el área de la figura se mantiene al cambiar la forma de la superficie, es decir, son capaces de disociar el área de la forma de la superficie. Otras parejas intentan utilizar esta estrategia al fraccionar el paralelogramo trazando líneas verticales y/o diagonales que no muestran relación entre las superficies (Figura 2c), lo cual evidencia dificultades para descomponer la

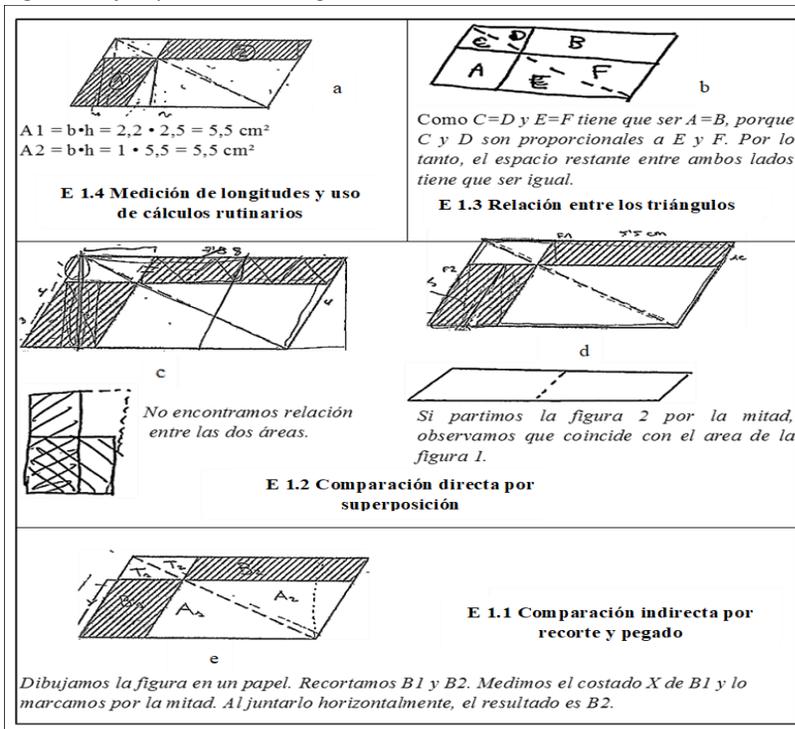
superficie de forma conveniente cuando un par de lados se presentan de forma diagonal.

Estrategia 1.3. Estimación visual basada en la relación entre los triángulos

Corresponde a una estrategia de tipo geométrico que busca establecer relaciones de igualdad entre áreas de dos o más superficies. La Figura 2b muestra que los EPM la utilizan para argumentar la igualdad de áreas, advirtiendo que, al

trazarse la diagonal del paralelogramo, los triángulos resultantes (medianos y pequeños) son iguales en apariencia y por lo tanto las superficies sombreadas también deben serlo. En este caso las justificaciones se sustentan únicamente en estimaciones visuales y no se hace mención a elementos matemáticos que determinan el área de las figuras sombreadas (por ejemplo, que ambas superficies sombreadas están determinadas por la base y la altura de los triángulos); por ello, esta estrategia está referida únicamente a procedimientos donde la estimación visual es protagonista.

Figura 2. Ejemplos de estrategias observadas en la Tarea 1.



Fuente: elaboración propia.

Estrategia 1.4. Medición de longitudes y uso de fórmulas

Esta estrategia utiliza procedimientos de carácter numérico empleando una unidad de medida unidimensional que mide las longitudes de los lados de la figura. El objetivo es la cuantificación del área y/o la comparación de áreas de superficies por medio de un tratamiento cuantitativo. La Figura 2a muestra cómo los EPM usan la regla para medir la longitud de los lados de cada superficie sombreada, para luego multiplicar largo por ancho. El número obtenido resulta de una operación multiplicativa que surge, a su vez, del producto de dos unidades unidimensionales.

En este caso las parejas coordinan la estructura multiplicativa, pero solo cuando se tienen las longitudes de la superficie que se quiere medir, relacionándolas directamente con la fórmula del área. En algunos casos, las parejas fallan al medir la longitud de los lados pues posicionan la regla de forma diagonal en lugar de vertical, de manera que obtienen una longitud mayor o menor a la real. El uso de regla en esta ocasión no apoya las resoluciones de las parejas, pues los EPM no advierten que un paralelogramo puede representarse también como un rectángulo. Las justificaciones se sustentan únicamente en la descripción de los cálculos utilizados.

2. Estrategias de la Tarea 2

Se identificaron tres estrategias diferentes: 1) reconfiguración por complementariedad; 2) descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades; y 3) medición de longitudes y uso de fórmulas.

Estrategia 2.1. Reconfiguración por complementariedad

Esta estrategia es de tipo geométrico, pues el objetivo no es la cuantificación del área de una superficie, sino establecer relaciones de inclusión y/o igualdad para comparar áreas. La Figura 3c muestra cómo las parejas de EPM hacen uso de una estimación visual para argumentar que el trozo faltante de cada banda rectangular corresponde al mismo triángulo ubicado en el lado superior y/o inferior de esta, identificando que cada superficie se compone de dos bandas rectangulares. Este procedimiento se ve apoyado por la descomposición que presentaba la superficie, lo cual facilita a las parejas establecer relaciones entre los trozos rectangulares y triangulares, permitiéndoles comparar las áreas con la unidad bidimensional que mide a esa superficie, en este caso el rectángulo.

Estrategia 2.2. Descomposición conveniente de la superficie y recuento de unidades

Esta estrategia es de tipo numérico con uso de una unidad bidimensional (triángulo). Se busca la cuantificación del área, ya sea para establecer comparaciones o para determinar la medida del área de una superficie; por lo tanto, realiza un tratamiento cuantitativo del área. La Figura 3d muestra cómo una pareja de EPM divide el cuadrado horizontalmente en dos mitades y posteriormente traza las diagonales en cada uno de los rectángulos obtenidos. Luego cuenta cuántos triángulos conforman cada superficie y concluye que todas las superficies contienen el mismo número de triángulos. En este caso, la pareja utiliza el triángulo como unidad de medida bidimensional y no necesita recurrir al uso de fórmulas, lo que permite establecer una primera relación con el carácter bidimensional del área. El número de

triángulos obtenidos resulta de una operación aditiva, que procede del recuento de unidades que recubren exactamente la superficie.

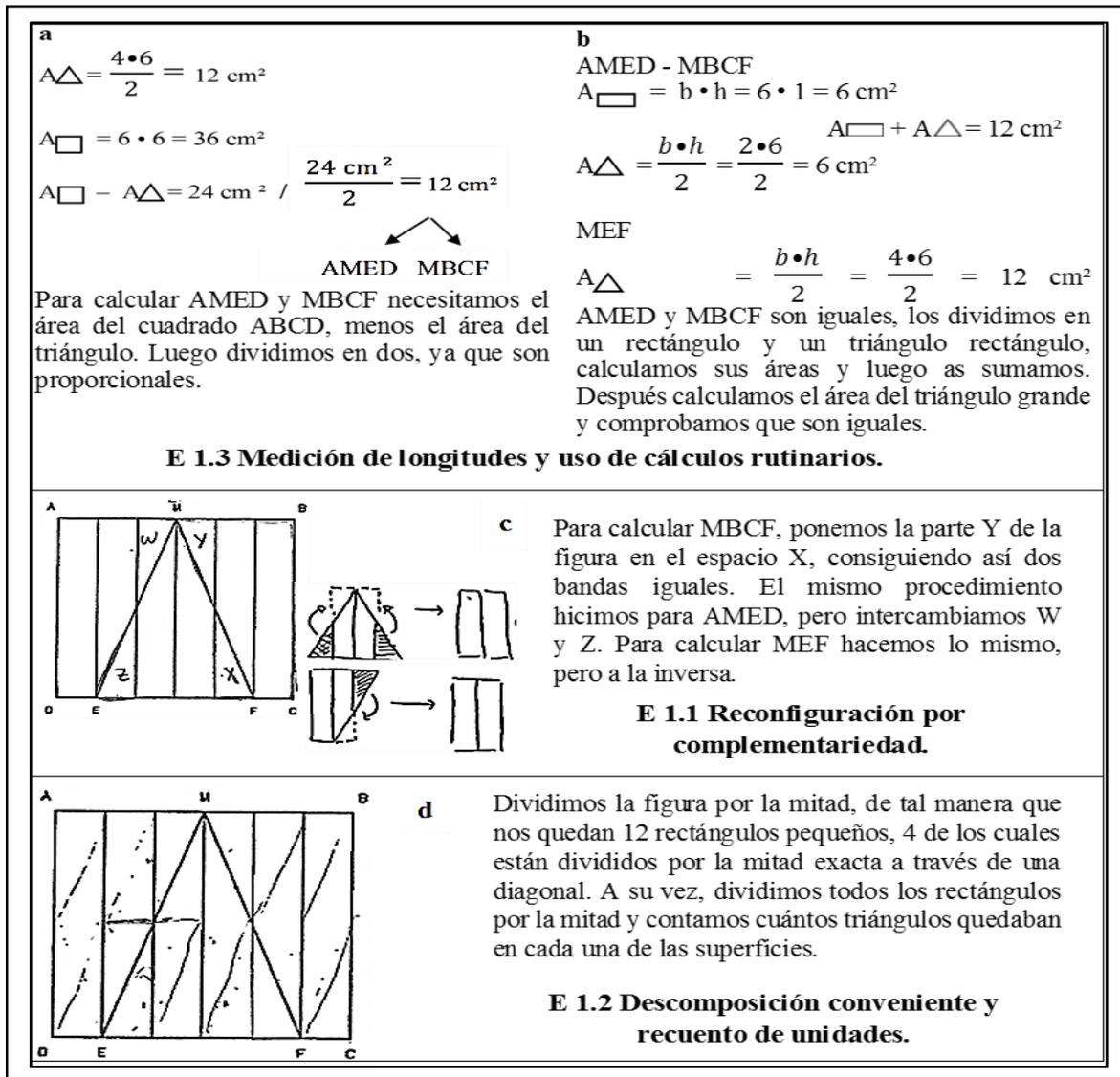
Estrategia 2.3. Medición de longitudes y uso de fórmulas

Esta estrategia es de tipo numérico, pues utiliza una unidad de medida unidimensional que mide las longitudes de los lados de la figura. El objetivo es la cuantificación del área y/o la comparación de áreas de superficies por medio de un tratamiento cuantitativo. Sin embargo, es posible advertir diferencias en cuanto a la aplicación de fórmulas. La Figura 3b muestra cómo las parejas de EPM advierten que cada trapecio se conforma por un triángulo rectángulo y una banda rectangular, por lo que calculan el área de estas dos superficies y las suman para obtener el área de los trapecios. Posteriormente, calculan el área del triángulo del centro, comparan las áreas de las tres superficies considerando los productos obtenidos y concluyen que poseen igual área.

Por otro lado, la Figura 3a muestra cómo algunas parejas calculan el área del triángulo del centro del cuadrado para luego restarla al área del cuadrado. La diferencia obtenida la dividen entre dos, argumentando que los trapecios de cada esquina son iguales. Así obtienen que cada superficie posee un área de 12 cm^2 y concluyen que tienen igual área. Solo una pareja aplica directamente la fórmula del área de triángulos y trapecios para determinar que las tres superficies poseen igual área. Las fundamentaciones proporcionadas son únicamente descriptivas, relacionando el área directamente con el uso de fórmulas.

Por otro lado, la Figura 3a muestra cómo algunas parejas calculan el área del triángulo del centro del cuadrado para luego restarla al área del cuadrado. La diferencia obtenida la dividen entre dos, argumentando que los trapecios de cada esquina son iguales. Así obtienen que cada superficie posee un área de 12 cm^2 y concluyen que tienen igual área. Solo una pareja aplica directamente la fórmula del área de triángulos y trapecios para determinar que las tres superficies poseen igual área. Las fundamentaciones proporcionadas son únicamente descriptivas, relacionando el área directamente con el uso de fórmulas.

Figura 3. Ejemplos de estrategias observadas en la Tarea 2.



Fuente: elaboración propia.

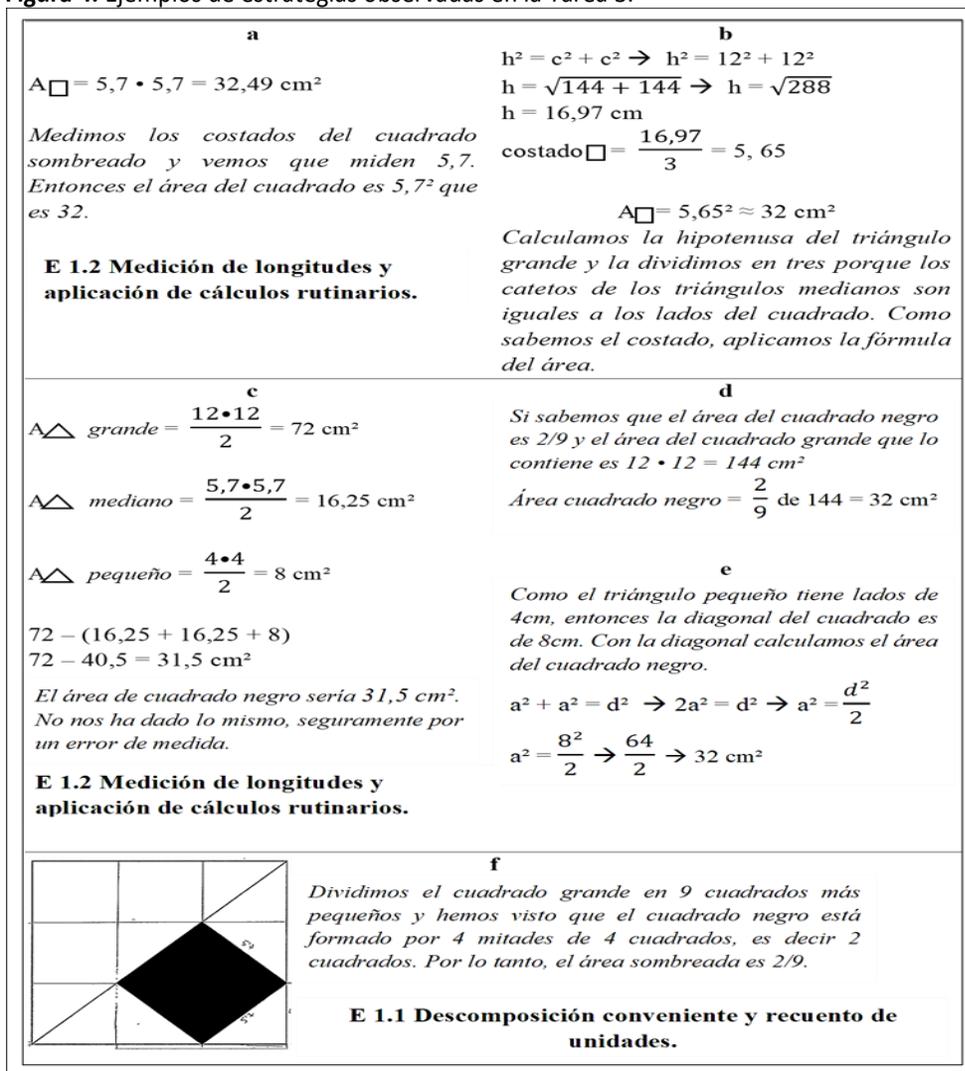
3. Estrategias de la Tarea 3

Se identifican dos estrategias diferentes: 1) descomposición conveniente de la superficie y recuento de unidades; 2) medición de longitudes y uso de fórmulas.

Estrategia 3.1. Descomposición conveniente y recuento de unidades

Esta estrategia es de tipo numérico con uso de una unidad bidimensional (cuadrado y/o triángulo). Se busca la cuantificación del área, ya sea para establecer

comparaciones entre áreas de superficies o para determinar la medida del área de una superficie; por lo tanto, realiza un tratamiento cuantitativo del área. La Figura 4f muestra cómo las parejas de EPM fraccionan el cuadrado grande en nueve cuadrados más pequeños (de 4 cm cada uno), y en un caso en 18 triángulos más pequeños. En ambas maneras de fraccionar la superficie las parejas establecen relaciones de inclusión, de modo que concluyen que el área de la superficie del cuadrado negro ocupa dos unidades cuadradas de un total de nueve que conforman el cuadrado grande. En este caso, el cuadrado es utilizado como unidad de medida bidimensional, estableciendo una proporción respecto del área total.

Figura 4. Ejemplos de estrategias observadas en la Tarea 3.

Fuente: elaboración propia.

Estrategia 3.2. Medición de longitudes y uso de fórmulas

Esta estrategia es de tipo numérico, pues utiliza una unidad de medida unidimensional que mide las longitudes de los lados de la figura. El objetivo es la cuantificación del área y/o la comparación de áreas de superficies por medio de un tratamiento cuantitativo. Sin embargo, es posible advertir diferencias en cuanto al conocimiento matemático que poseen los estudiantes asociado al uso de fórmulas. La Figura 4a muestra cómo las parejas de EPM, en uno de los procedimientos, miden directamente con la regla uno de los costados del cuadrado para posteriormente aplicar la fórmula del área. En este caso las parejas coordinan la estructura multiplicativa, pero solo cuando se tienen las longitudes de la superficie que se quiere medir,

relacionándola directamente con la fórmula del área.

En otro procedimiento, Figura 4c, las parejas de EMP calculan, primero, el área del triángulo grande que representa la mitad del cuadrado grande. Luego, el área de los dos triángulos medianos y del triángulo pequeño que conforman una parte de la mitad del cuadrado grande. Seguido a esto, realizan un procedimiento aditivo entre las áreas de los triángulos (dos medianos más uno pequeño), para finalmente restarla al área que corresponde a la mitad del cuadrado, con lo cual obtienen la medida del área sombreada.

Otro procedimiento se muestra en la Figura 4b. Las parejas de EPM hacen uso del teorema de Pitágoras para obtener la hipotenusa del triángulo grande que representa la mitad

del cuadrado grande. Una vez cuentan con este dato, lo dividen entre tres, pues identifican que el lado del cuadrado negro corresponde a una tercera parte de la hipotenusa del triángulo. Así calculan la medida de uno de los costados del cuadrado negro y aplican directamente la fórmula para determinar el área.

Un último procedimiento se ejemplifica en la Figura 4e, donde las parejas utilizan la relación entre el área del cuadrado negro y su diagonal para calcular el área. Aquí, los EPM identifican que el área del cuadrado negro corresponde al cuadrado de la diagonal dividido entre dos, por lo que, al aplicar esta fórmula, obtienen la medida del área del cuadrado solicitado.

Resultados

Las estrategias observadas en las tres tareas de medida y comparación de áreas de superficies planas muestran similitudes tanto en los procedimientos como en las justificaciones. Las más comunes utilizadas en cada tarea parecen ser análogas con el uso de fórmulas, ya que, como un procedimiento común, las parejas de EPM miden directamente los costados de las figuras para obtener la medida de sus longitudes y posteriormente hacen uso de fórmulas que permitan determinar el área. En cada una de las tareas es posible evidenciar matices entre resoluciones pertenecientes a un mismo tipo de estrategia, lo cual creemos que puede deberse a las diferencias en el conocimiento matemático de los EPM. La Tabla 2 muestra las cantidades de parejas que utilizan cada estrategia.

En el caso de la Tarea 1, las estrategias de tipo geométrico fueron las menos utilizadas. La comparación directa por recorte y pegado fue empleada solo por una pareja de EPM (Figura 2e), de un total de 29; y la comparación directa por superposición fue aplicada correctamente por seis parejas de EPM (Figura 2d), lo que les permitió identificar que el área de los paralelogramos no varía al cambiar la forma de las superficies. Sin embargo, dos de las parejas de EPM no pudieron seguir esta estrategia de forma correcta, pues intentaron fraccionar el paralelogramo trazando líneas verticales y/o diagonales que no mostraban relación entre las superficies (Figura 2c). La estrategia de estimación visual basada en la relación entre los triángulos fue usada apropiadamente por 24 parejas (Figura 2b) y de forma incorrecta por una pareja. En este último caso, los EPM identificaron la igualdad de los triángulos, pero no

advirtieron la relación entre esto y las superficies sombreadas. Por último, 26 parejas recurrieron adecuadamente a la estrategia de medición de longitudes y uso de fórmulas (Figura 2a), mientras que dos parejas la ejecutaron de forma incorrecta pues fallaron al medir la altura del paralelogramo, posicionando la regla de forma diagonal en lugar de vertical.

En la Tarea 2, la estrategia de reconfiguración por complementariedad fue utilizada correctamente por todas las parejas de EPM (Figura 3c), las cuales, sin excepción, argumentan sus resoluciones con base en sus estimaciones visuales. Es probable que esta estrategia se haya visto apoyada por la descomposición que presentaba la superficie, pues les permitió a las parejas relacionar los trozos rectangulares y triangulares, comparando las áreas por medio de las bandas rectangulares.

Por otro lado, la estrategia de descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades se observó solo en una pareja de EPM (Figura 3d), mientras que la medición de longitudes y uso de fórmulas fue aplicada por 28 parejas. Ahora bien, existen diferencias en cuanto al uso de fórmulas para medir el área, pues 18 de las parejas, al no saber la fórmula del área del trapecio, realizaron un proceso aditivo de las formas geométricas conocidas (rectángulos y triángulos) que componen cada trapecio, a fin de obtener su área (Figura 3b). Entretanto, 11 parejas restaron al área total del cuadrado el área del triángulo EMF, diferencia que luego dividieron entre dos para establecer el área de las figuras AMED y MBCF (Figura 3a).

Para la Tarea 3, solo cinco parejas evidenciaron el uso de procedimientos geométricos vinculados a la estrategia de descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades. A su vez se observan diferencias entre las formas de descomponer la superficie, ya que cuatro parejas fraccionaron el cuadrado grande en nueve cuadrados más pequeños, y una pareja lo dividió en 18 triángulos más pequeños. De todos modos, en ambos casos concluyeron que la proporción es de $2/9$ (Figura 4f).

Por otro lado, la medición de longitudes y uso de fórmulas fue utilizada por la totalidad de parejas. En este caso se advierten diferencias en cuanto al uso de fórmulas para medir áreas, pues 27 parejas, en uno de los procedimientos, midieron directamente con la regla uno de los costados del cuadrado para posteriormente aplicar la fórmula del área (Figura 4a); 12 parejas hicieron uso del

teorema de Pitágoras para obtener uno de los costados del cuadrado negro (Figura 4b); dos parejas relacionaron el área del cuadrado negro con su diagonal y utilizaron esta fórmula para calcular el área (Figura 4e), y 21 parejas determinaron áreas de triángulos para restarlas al área de la mitad del cuadrado grande, a fin de obtener el área del cuadrado negro (Figura 4c).

Tabla 2. Número de parejas que utilizan cada estrategia en las tres Tareas.

Estrategias	Parejas que la utilizan de forma correcta	Parejas que la utilizan de forma incorrecta
Tarea 1		
1.1. Comparación indirecta por recorte y pegado	1	0
1.2. Comparación directa por superposición.	6	2
1.3. Estimación visual basada en la relación entre los triángulos	24	1
1.4. Medición de longitudes y uso de fórmulas	26	1
Tarea 2		
2.1. Reconfiguración por complementariedad de trozos	29	0
2.2. Descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades	1	0
2.3. Medición de longitudes y uso de fórmulas	28	0
Tarea 3		
3.1. Descomposición conveniente de superficies y recuento de unidades	5	0
3.2. Medición de longitudes y uso de fórmulas	29	0

Fuente: elaboración propia.

Relación entre estrategias y conexiones entre las manifestaciones del área

A partir de los datos anteriores, es posible evidenciar que las respuestas más débiles presentan procedimientos geométricos pobres, ligados siempre a la acción de asignarle una unidad de medida (numérica unidimensional) al área, por lo que se observan dificultades para medir y/o comparar áreas cuando no hay un valor numérico asociado. Se identifica un número muy reducido de parejas, un máximo de cinco en cada tarea, que son capaces de otorgar al área un tratamiento cualitativo ausente de todo número y, por el contrario, el mayor número de parejas, sobre 20, apuntan mayormente al uso de las distintas fórmulas para el cálculo de áreas sin considerar procedimientos geométricos que podrían facilitar la cuantificación de superficies.

Para establecer conexiones entre manifestaciones del área, es preciso que los estudiantes utilicen procedimientos

tanto de tipo geométrico como numérico a fin de enriquecer la comprensión del concepto y de la medida del área. Sin embargo, como se ha evidenciado, muy pocas parejas de EPM logran realmente establecer conexiones entre las manifestaciones del área, pues la tendencia es utilizar procedimientos numéricos que implican el uso de fórmulas para medir áreas, dejando de lado los procedimientos geométricos que permiten la comparación de áreas de superficies sin recurrir a cálculos numéricos.

Considerando los procedimientos utilizados y las justificaciones proporcionadas por cada pareja, se han establecido tres niveles que permiten clasificar las conexiones que establecen los EPM:

Nivel 1. Conexiones primitivas entre manifestaciones del área

En este nivel las parejas de EPM se inclinan exclusivamente por el uso de cálculos rutinarios para medir áreas. Algunos

procedimientos sugieren una tendencia generalizada de los EPM a privilegiar la aplicación de fórmulas cuando se tiene la longitud de los lados de una figura (Figuras 2a, 3a y 4a), sin considerar los elementos matemáticos de los que puede depender el área de una superficie. En caso de no tener la longitud, una mayoría se inclina por obtenerla al medir con la regla. En este nivel los estudiantes coordinan únicamente la dimensión multiplicativa del área, sin relacionarla con la dimensión lineal asociada a procesos aditivos, como por ejemplo el recubrimiento de superficies y la relación entre la unidad de medida y la superficie que se va a medir. Así, las conexiones se dan solo entre los procedimientos numéricos asociados al área como producto de dos dimensiones lineales, sin involucrar las otras manifestaciones del área. Las conexiones entre los procedimientos numéricos se apoyan en las descomposiciones, ya hechas, de las figuras.

Nivel 2. Conexiones emergentes entre manifestaciones del área

En este nivel las parejas de EPM se inclinan por el uso de cálculos rutinarios para medir áreas; no obstante, recurren a procedimientos de tipo geométrico como una segunda opción. Las parejas encuentran relaciones de inclusión entre las figuras que pueden componer una superficie (triángulos, rectángulos y cuadrados), pero en el momento de medir las áreas necesitan recurrir al uso de fórmulas (Figuras 3b, 4c y 4d); sin embargo, al establecer comparaciones no necesitan utilizar fórmulas (Figuras 2b, 2d y 3c). En este nivel los EPM pueden hacer mención a algunos elementos matemáticos de los que puede depender el área de una superficie, como por ejemplo que el área de una figura no cambia por desplazamiento o reagrupamiento. Los estudiantes que se encuentran en este nivel coordinan la dimensión multiplicativa del área y son capaces de relacionarla, en ciertas tareas, con la dimensión lineal asociada a procesos aditivos. Logran utilizar estrategias de recubrimiento de superficies y relacionar la unidad de medida y la superficie que se va a medir.

Nivel 3. Conexiones elaboradas entre manifestaciones del área

En este nivel las parejas de EPM pueden utilizar cálculos rutinarios para medir áreas y además recurrir (sin problemas) a procedimientos de tipo geométrico

estableciendo relaciones de inclusión entre las figuras que pueden componer una superficie (triángulos, rectángulos y cuadrados), comparando y midiendo áreas sin llegar a calcularlas. Además, se consideran los elementos matemáticos de los que puede depender el área de una superficie (Figuras. 3d y 4f), como la propiedad de conservación, longitud de los lados, número de unidades cuadradas que recubren una superficie, entre otros. Los estudiantes que se encuentran en este nivel son capaces de coordinar las dimensiones aditiva y multiplicativa del área estableciendo relaciones entre los procesos aditivos y multiplicativos que se ven implicados en los procesos de medición. Logran utilizar estrategias de recubrimiento de superficies y relacionar la unidad de medida y la superficie que se va a medir. Además, pueden advertir que el área de una superficie es independiente de la forma de la superficie, acercándose a la propiedad de conservación.

Los niveles descritos son desarrollados entendiendo que cada nivel necesita el uso de estrategias más sofisticadas para medir áreas y que no se relacionan con el uso de fórmulas, sino con otorgar al área un tratamiento cualitativo. Cuando el uso de fórmulas queda limitado por la ausencia de unidades de medida de longitud, los estudiantes se ven desafiados a utilizar estrategias que no siempre tienen incorporadas en su conocimiento matemático, pues no están familiarizados con procedimientos de tipo geométrico.

En el nivel 1 las estrategias que pueden ser utilizadas tienen relación con la manifestación 4 del área, pues se reducen únicamente al uso de cálculos rutinarios y fórmulas para medir áreas. Sin embargo, no se muestra una comprensión de la estructura lineal y aditiva de las superficies.

Para el nivel 2, las estrategias se relacionan con las manifestaciones 4 y 3, ya que, además del uso de cálculos rutinarios, los estudiantes son capaces de descomponer superficies de forma conveniente y establecer relaciones entre el tamaño de la superficie de una figura y el número de unidades que la recubren por medio de un procedimiento aditivo; por lo tanto, establecen relaciones entre la superficie que se va a medir y la unidad de medida que mide a esa superficie.

Finalmente, el nivel 3 se relaciona con las manifestaciones del área 1, 2, 3 y 4. Los estudiantes deben ser capaces de medir y comparar áreas utilizando procedimientos de tipo geométrico intuitivos que implican estrategias no

convencionales (comparación directa e indirecta de superficies) y procedimientos numéricos aditivos y multiplicativos que se relacionan con la descomposición y recubrimiento de superficies y la conexión entre la unidad de media y la superficie que se va a medir. La clasificación de las parejas por tarea y nivel se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Número de parejas de EPM por nivel en cada tarea.

	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Nivel 1	26	28	29
Nivel 2	21	28	21
Nivel 3	3	5	5

Fuente: elaboración propia.

Debido a que el cuestionario solicitaba de forma obligada el uso de dos procedimientos diferentes, uno con cálculo y otro sin cálculo, la gran mayoría de las parejas se encuentran en los niveles 1 y 2 de conexiones entre manifestaciones del área, donde el procedimiento geométrico utilizado estuvo vinculado al uso de valores numéricos obtenidos por medio de la regla de medir. Una minoría de parejas se encuentran en el

nivel 3 de conexiones entre manifestaciones del área, lo cual indicaría que existen dificultades para medir y/o comparar áreas cuando no hay un valor numérico asociado.

Relación entre procedimientos y conexiones intramatemáticas

Este estudio se ha centrado en las conexiones intramatemáticas de tipo conceptual con tratamiento y conversión. Así, las resoluciones que se dan dentro de un mismo registro (de naturaleza geométrica o numérica) responden a tratamientos, las resoluciones que se dan entre registros diferentes responden a conversiones (registros de naturaleza geométrica y numérica). A fin de promover conversiones, se solicitaba resolver el cuestionario por medio de dos procedimientos diferentes.

Considerando las estrategias y los procedimientos utilizados por las parejas de EPM, se clasificaron las conexiones intramatemáticas concordando con el marco propuesto por De Gamboa y Figueiras (2014). Tal clasificación de las parejas por tarea y tipología de conexiones se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Número de parejas que establecen conexiones intramatemáticas.

	Conexiones intramatemáticas		
	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3
Conversiones	26	29	21
Tratamientos con énfasis en los procedimientos y definiciones asociadas a fórmulas	24	26	21
Tratamientos con énfasis en las operaciones	14	0	0

Fuente: elaboración propia.

Conversiones

Los cambios de registro observados en las resoluciones de cada tarea muestran similitudes en cuanto a los procedimientos utilizados por cada pareja. A pesar de que el cuestionario demandaba el uso de procedimientos geométricos y numéricos, solo 21 de 29 parejas evidencian conversiones en todas sus resoluciones y/o justificaciones, pues realizan para cada una de las tareas un tratamiento cualitativo y cuantitativo del área (Figuras 2a y 2b; 3b y 3c; 4a y 4f). Sin embargo, las conversiones evidenciadas responden a registros geométricos donde las parejas necesitan de unidades de medida unidimensionales o bidimensionales asociadas para poder cuantificar y/o

comparar el área de las distintas superficies. En este sentido, las conversiones se vinculan al nivel 2 de conexiones emergentes entre manifestaciones del área, y se evidencia que el uso de procedimientos puramente geométricos se presenta como una dificultad para los estudiantes.

Tratamientos con énfasis en los procedimientos y definiciones asociadas a fórmulas

La mayoría de las parejas establece este tipo de conexión, pues presentan procedimientos numéricos que implican únicamente el uso de las fórmulas del área de cuadrados,

triángulos y rectángulos (Figuras 2a, 3a, 3b y 4c), relacionadas con multiplicar largo y ancho (y dividir entre dos en el caso de los triángulos) en cada una de las tareas. En este sentido, estos tratamientos se vinculan al nivel 1 de conexiones primitivas entre manifestaciones del área, pues lo que se busca es cuantificar el área de una superficie por medio de valores numéricos asociados y que permitan la aplicación de las fórmulas conocidas por los estudiantes.

Tratamientos con énfasis en las operaciones

Se identifican 14 de 29 parejas que son capaces de establecer relaciones entre distintos elementos y operaciones matemáticas y aplicarlas de forma correcta para determinar las áreas de las superficies solicitadas. Tal es el caso, por ejemplo, de la apropiada relación entre el área de un cuadrado y su diagonal y/o la utilización del teorema de Pitágoras (Figuras 4b y 4c) para obtener el área que se solicitaba en la Tarea 3. Este tipo de tratamientos, al igual que el caso anterior, se vinculan al nivel 1 de conexiones primitivas entre manifestaciones del área, pues lo que se busca es cuantificar el área de una superficie por medio de valores numéricos asociados y que permitan la aplicación de las fórmulas conocidas por los estudiantes. Sin embargo, se advierten ciertos matices en el conocimiento de los elementos matemáticos que poseen los estudiantes, pues mientras que algunas parejas evidencian conocimiento del teorema de Pitágoras y de la relación que hay entre el área de un cuadrado y su diagonal, otras parejas solo poseen conocimiento de la fórmula del área como largo por ancho.

Discusión

Al analizar los procedimientos y/o justificaciones realizadas por cada pareja de EPM, es posible evidenciar que existe una tendencia generalizada a asociar el área con el uso de cálculos rutinarios y fórmulas, aun cuando estos implican una mayor cantidad de tiempo en resolver cada tarea. No obstante, se puede anotar que, a pesar de que los estudiantes conocen la fórmula de memoria (largo por ancho) y pueden aplicarla fácilmente cuando dos longitudes les son dadas, este proceso les presenta un mayor grado de dificultad cuando no conocen una o ambas de sus longitudes. En este caso, los procedimientos geométricos e intuitivos que permitan disociar el área de la forma de la superficie y comprender el papel de la unidad de medida en el cálculo de áreas vendrían a aumentar el

nivel de comprensión que los estudiantes poseen respecto a la medición del área y, al mismo tiempo, les podrían facilitar la tarea de cuantificar el área de una superficie.

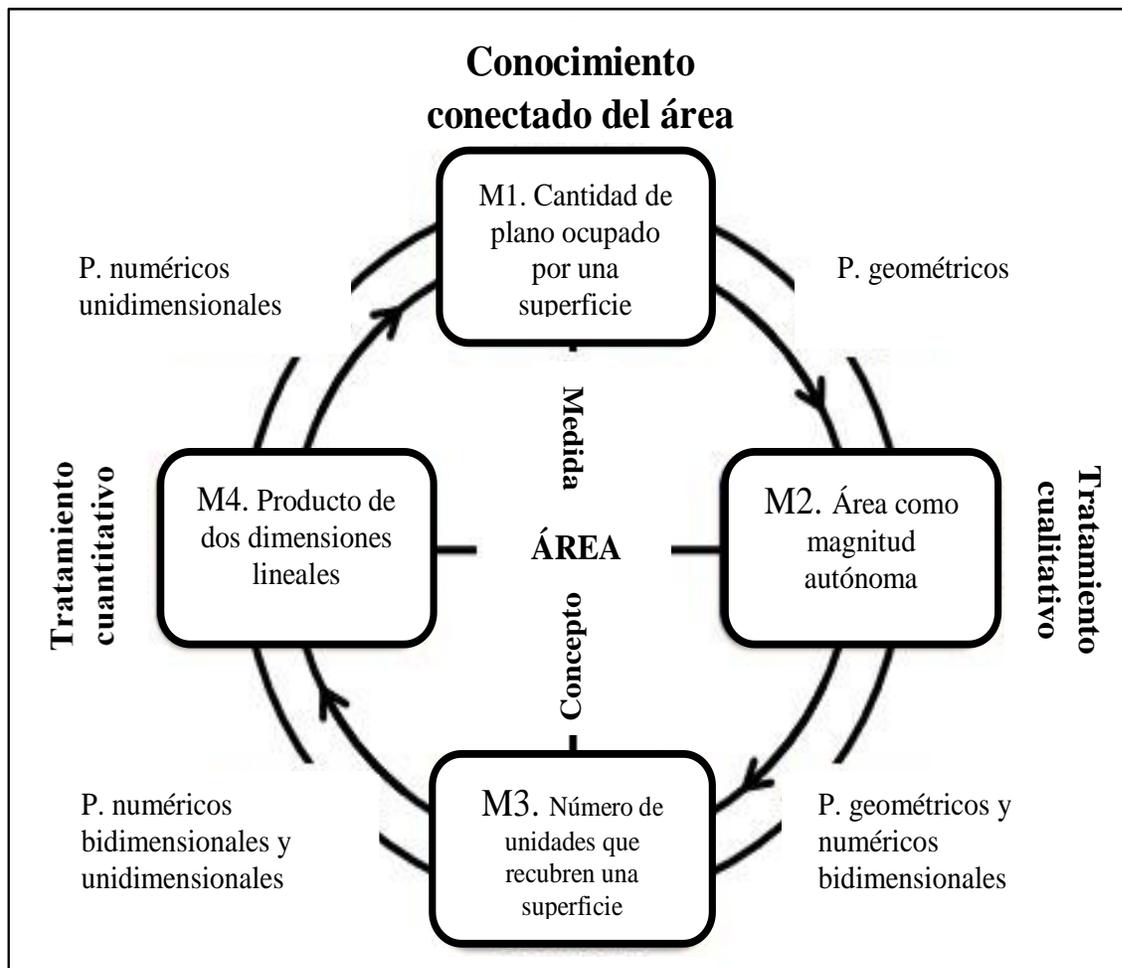
Teniendo en cuenta las diferentes manifestaciones del área y la tendencia de los EPM, se puede evidenciar en estos un escaso conocimiento de elementos matemáticos (papel de la unidad de medida, conservación del área, relaciones aditivas y multiplicativas) asociados a la medida y al concepto área. La comparación de áreas en un contexto numérico resulta más sencilla para los estudiantes que en un contexto geométrico intuitivo. Mientras que en el primer caso se requiere únicamente la aplicación de una fórmula, que puede realizarse de forma rutinaria y no necesariamente comprensiva (Corberán, 1996), es imprescindible que en el segundo contexto el alumno conozca y comprenda los elementos de los que depende el área, pudiendo establecer relaciones entre procedimientos no convencionales y procedimientos aditivos, multiplicativos.

Para mejorar la comprensión que los estudiantes tienen acerca de la medida y concepto del área, sería necesario trabajar con diferentes estrategias y otorgar al área un tratamiento tanto cualitativo como cuantitativo, considerando los elementos matemáticos que se ven implicados en cada estrategia y procedimiento. En ese sentido, es preciso un aprendizaje progresivo que abarque las cuatro manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996), coordinando y conectando las dos dimensiones que se ven implicadas en la medición del área, a fin de propiciar una comprensión relacional entre las fórmulas del área y los procedimientos de carácter intuitivo. Un ejemplo de cómo trabajar hacia un conocimiento conectado del área se muestra en la Figura 5.

Concordando con Corberán (1996), Outhred y Mitchelmore (2000), D'Amore y Fandiño (2007), entre otros, se asume que el concepto y la medida del área requieren de diversas estrategias y procedimientos que permitan el desarrollo de la comprensión en los estudiantes. En este sentido, la variedad de estrategias y procedimientos se vinculan directamente con las cuatro manifestaciones del área. De esta forma se otorga en primera instancia un tratamiento cualitativo al área, pasando por distintos procedimientos que permiten una comprensión de los procesos de medición, hasta llegar al estudio de fórmulas para el cálculo de áreas. También es válido considerar que los enfoques intuitivos de medición podrían influir positivamente en el

razonamiento de los estudiantes, ayudándolos a establecer diferentes conexiones en el momento de resolver tareas de medida y comparación de áreas, y podrían servir de apoyo en la producción de soluciones multiplicativas para cuantificar el área.

Figura 5. Conexiones entre procedimientos de medición del área.



Fuente: elaboración propia basada en las manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996).

Además, se observa que las tareas de medida y comparación de áreas de diversas superficies que abordan las distintas manifestaciones del área pueden proporcionar una base clara para el soporte conceptual, tanto de la geometría como del número, lo que permite a su vez establecer conexiones entre estos dos dominios a medida que se desarrolla el razonamiento cuantitativo por medio de diversas estrategias y procedimientos de medida. Coincidiendo con De Gamboa *et al.* (2015), las conexiones matemáticas, en esta aproximación, otorgarían mayor sentido al trabajo matemático de los estudiantes, pues se abordaría el estudio del concepto y medida del área de un modo comprensivo.

Conclusiones

Los tres niveles que se determinaron para clasificar las conexiones matemáticas que establecen las parejas entre las distintas manifestaciones del área sugieren la necesidad de trabajar diferentes estrategias para medir y comparar áreas, a fin de que los EPM puedan construir un conocimiento más conectado en relación con el concepto de área. Sería importante trabajar los procesos de medida del área incorporando estrategias que involucren el uso de unidades de medida no convencionales en conjunto con las unidades de longitud convencionales, más una fórmula asociada a cálculos matemáticos.

Esto permitiría a los estudiantes justificar procedimientos más allá de la propia percepción visual, a la vez que les proporcionaría un amplio abanico de estrategias para comparar y medir áreas en contextos geométricos.

La tendencia de los EPM a utilizar la fórmula del área de memoria puede ser resultado de su experiencia escolar, donde no se desarrolló una comprensión de la estructura lineal y bidimensional del área. Por lo tanto, se sugiere trabajar las descomposiciones convenientes de superficies y la propiedad de conservación del área (entre otras estrategias) ya que estas podrían ayudar a los estudiantes a desarrollar un razonamiento de tipo intuitivo, a la vez que permitirían identificar la representación mental que los estudiantes poseen en relación con la conexión de la dimensión aditiva y multiplicativa del área y establecer las bases del trabajo respecto al concepto de área.

Lo anterior no significa que las prácticas tradicionales no tengan ningún papel que desempeñar en los procesos de enseñanza aprendizaje del área. No se niega en este estudio el valor que tiene medir áreas a partir de medidas de longitud sobre el uso de unidades no convencionales que pueden resultar “aburridas”. Sin embargo, la enseñanza podría diseñarse para tener en cuenta, por ejemplo, la comprensión inicial que los estudiantes tienen sobre el área como número de unidades que recubren una superficie y número de filas y/o columnas, estableciendo una conexión entre estos dos procesos.

Finalmente, los resultados refuerzan los encontrados por Simon y Blume (1994) al observar que una gran cantidad de EPM muestran un conocimiento poco comprensivo del concepto de área, asociándolo mayoritariamente al uso de fórmulas para su cálculo y presentando dificultades para medir áreas cuando no existe un valor numérico asociado. En este sentido, las manifestaciones del área propuestas por Corberán (1996) tendrían un importante rol que desempeñar en los procesos de medida del área y en el estudio comprensivo del concepto de área.

Agradecimientos

Este estudio se ha realizado con financiamiento de CONICYT PFCHA/DOCTORADO BECAS CHILE/2018-72190032. Este trabajo se ha realizado en el marco colaborativo del Proyecto EDU2015-65378-P, MINECO-España/FEDER-Europa y con el apoyo del Grupo GIPEAM,

SGR2017-101, AGAUR-Catalunya. Este trabajo se ha realizado en el marco del Programa de Doctorado en Educación de la UAB.

Declaración de Conflicto de Intereses

Durante este estudio no han incidido intereses personales o ajenos a la voluntad de los autores, por lo que las conductas y valores que se han adoptado durante toda la investigación son acordes con los que de forma habitual y éticamente guían la actividad investigadora.

Referencias Bibliográficas

- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson. (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. (4.a edición) (pp. 433-456). Washington, D. C.: American Educational Research Association.
- Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Businskas, A. M. (2008). *Conversation about Connections: How Secondary Mathematics Teachers Conceptualize and Contend with Mathematical Connections*. Burnaby, BC, Canadá: Universidad Simon Fraser.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery y M. Mariotti. (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.
- Chapman, O. (2008). Mathematics teacher educators' learning from research on their instructional practices. En B. Jaworski y T. Wood. (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 115-136). Rotterdam: Sense Publishing.
- Corberán, R. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, Valencia, España.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*, 10(1), 39-68.
- De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el

- conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337- 344). Salamanca: SEIEM.
- De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, 10(1), 1-24.
- Douady, R. y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387-424.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Espinosa, R. E. (2016). La formación docente en los procesos de mediación didáctica. *Praxis*, 12, 90-102. Doi: 10.21676/23897856.1850
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf
- Huang, H. M. E. y Witz, K. G. (2013). Children's Conceptions of Area Measurement and Their Strategies for Solving Area Measurement Problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10-26.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, (2), 53-70.
- Menon, R. 1998. Preservice teachers understanding of perimeter and area. *School Science and Mathematics*, 7(98), 362-368.
- Outhred, L. y Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutiérrez y P. Boero. (Eds.), *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Simon, M. A. y Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 472-494.
- Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Para citar este artículo: Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis*, 15(1), 69-87. Doi: <http://dx.doi.org/10.21676/23897856.2984>